

# Bölüm 7

## Karmaşık Sayılar

Karmaşık sayılar gerçel sayıların genişlemesiyle elde edilen daha büyük bir kümedir. Genişleme şu gerekmeden doğmuştur:  $x^2 = +1$  denkleminin çözümü  $+1, -1$  sayılarıdır ve  $\mathbb{R}$  içindedir. Ama  $x^2 = -1$  denkleminin çözümü  $\mathbb{R}$  içinde yoktur. Özellikle elektromanyetik teoride bütün ikinci derece denklemlerin çözüm kümesine gerekseme doğar. O nedenle  $\mathbb{R}$  gerçel sayılar kümesini bütün ikinci derece denklemlerin köklerini içerecek büyüklüğe genişletmek gereği vardır. Bu genişleme kolay yapılır.

$$x^2 = -1$$

denkleminin çözümü olarak  $+i$  ve  $-i$  sayıları tanımlanır.

**Tanım 7.1.**

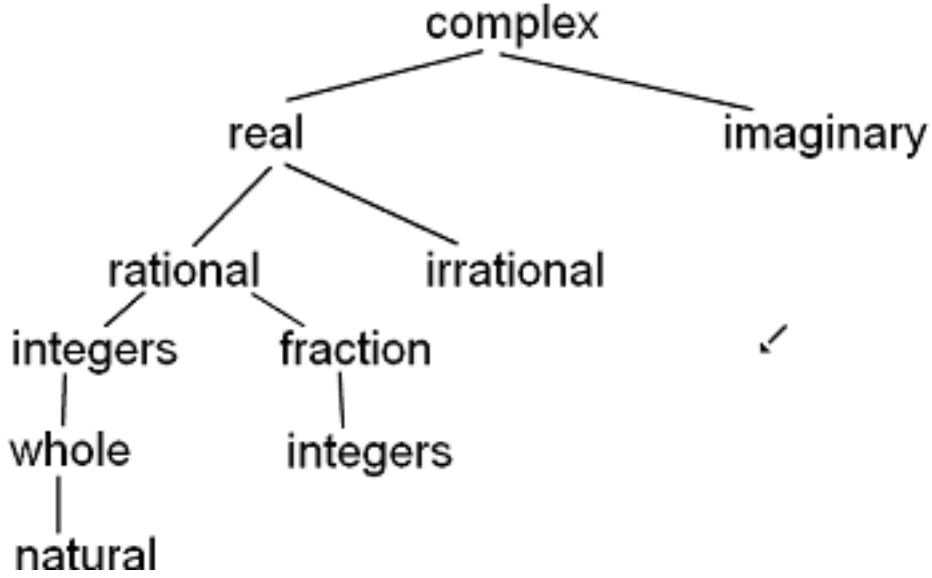
$$\sqrt{-1} = +i$$

denilir. Bu bir tanımdır.  $+i$  sayısına karmaşık sayıların birim ögesi denilir.

### 7.1 Karmaşık Sayılar

Belli türden denklemleri çözebilmek için bazı sayı kümelerinin yetersiz kaldığını; bu tür denklemlere çözüm bulmak için sözkonusu sayı kümelerinin genişletilerek daha büyük sayı kümeleri elde edildiğini biliyoruz. Örneğin,

$x + 3 = 0$  gibi bir denklem doğal sayılarda çözülemeyince, doğal sayılar kümesi  $\mathbb{N}$  genişletilerek tam sayılar kümesi  $\mathbb{Z}$  oluşturulmuştur.



Şekil 7.1: Karmaşık Sayının Düzlemsel Gösterimi

$3x+4=0$  gibi bir denklem  $\mathbb{Z}$ 'de çözülemeyince, bu küme genişletilerek rasyonel sayılar kümesi ( $\mathbb{Q}$ ) oluşturulmuştur.

$x^2-7=0$  gibi bir denklem  $\mathbb{Q}$ 'da çözülemeyince, bu küme irrasyonel sayılarla genişletilerek gerçel (reel) sayılar kümesi  $\mathbb{R}$  oluşturulmuştur. Gerçel (real) sayılar kümesi ile sayı ekseninin noktalarının bire bir eşlendiğini hatırlayınız.

$a, b, c \in \mathbb{R}$  ve  $a \neq 0$  için  $ax^2 + bx + c = 0$  denklemini çözerken,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ve

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olmak üzere,

$b^2 - 4ac > 0$  ise, denklemin gerçel iki kökü vardır

$b^2 - 4ac = 0$  ise, denklemin gerçel ve eşit iki kökü vardır

$b^2 - 4ac < 0$  ise, denklemin gerçel kökü yoktur

kurallarını anımsayınız.

Dikkat ederseniz, üçüncü olasılıkta negatif sayıların karekökü söz konusudur. Bu sayılar,  $\mathbb{R}$ 'nin elemanı değildir.

Örneğin,  $x^2 + 3 = 0$  denkleminin  $\mathbb{R}$  içinde çözümü yoktur. Çünkü her gerçel sayının karesi pozitifdir; dolayısıyla  $x^2 = -3$  denklemini sağlayan hiçbir gerçel sayı yoktur.

Öyleyse  $\mathbb{R}$  gerçel sayılar kümesinin genişletilerek, içinde bu tür denklemlerin de çözülebildiği daha büyük bir sayı sistemi oluşturmaya gerek vardır.

$x^2 + 1 = 0$  denklemini sağlayan  $\sqrt{-1}$  sayısına *sanal (imajiner) sayı birimi* denir ve  $i = \sqrt{-1}$ ,  $i^2 = -1$  biçiminde gösterilir.

## 7.2 Gerçel ve Sanal Kısımlar

$a, b \in \mathbb{R}$  ve  $i^2 = -1$  olmak üzere  $a + ib$  biçimindeki sayılara

### karmaşık (kompleks) sayılar

denir.

Karmaşık sayıyı genellikle  $z$  ve bu sayıların oluşturduğu kümeyi  $\mathbb{C}$  ile göstereceğiz.

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

dir.  $z = a + ib$  karmaşık sayısında;

$a$ 'ya bu sayının gerçel (reel) kısmı denir ve  $ge(z)$  ile gösterilir.  $b$ 'ye bu sayının sanal (imajiner) kısmı denir ve  $san(z)$  [ $Im(z)$ ] ile gösterilir.

$$ge(z) = a \Rightarrow [san(z) = b \wedge z = ge(z) + i \cdot san(z)]$$

$$san(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} [\mathbb{R} \subset \mathbb{C}]$$

$$ge(z) = 0 \Rightarrow z = 0 + bi \Leftrightarrow z = bi$$

### Örnek 7.1.

$z = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$  karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulalım:

$$z = \frac{1}{2} + i\left(-\frac{2}{3}\right) \text{ ise}$$

$$san(z) = -\frac{2}{3}$$

olur.

### 7.3 Karmaşık sayıların Eşitliği

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $z_1 = a + ib$  ve  $z_2 = c + id$  olsun.

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

dir.

#### Örnek 7.2.

$z_1 = 3x - i\frac{1}{2}$  ve  $z_2 = -36 + (y + 1)i$  sayılarının eşit olabilmesi için  $x$  ve  $y$ 'nin ne olacağını bulalım:

$$3x + i(-\frac{1}{2}) = -36 + i(y + 1)$$

$$\begin{aligned} 3x = -36; & \quad y + 1 = -\frac{1}{2} \\ x = -12; & \quad y = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

#### Örnek 7.3.

$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{y^2}i$  sayısının karmaşık sayı olabilmesi için  $x$  ve  $y$  nin ne olacağını bulalım:

Verilen sayının karmaşık sayı olabilmesi için,

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1}, \frac{1}{y^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow & \quad x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ ve } x \in \mathbb{R} \\ & \quad y^2 \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \text{ ve } y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olmalıdır.

#### Örnek 7.4.

$4x^2 - 2x + 1 = 0$  denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12 < 0$  olduğundan, denklemin karmaşık sayı olan iki kökü vardır:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2.4}$$

eşitliğinden

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{12}}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{8} \sqrt{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

çıkar. Benzer şekilde  $x_2$  de hesaplanabilir ve

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i), \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i) \right\}$$

bulunur.

## 7.4 Sanal Birimin Kuvvetleri

$n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,  $i$ 'nin kuvvetleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{array}{lll} i = \sqrt{-1} & i^2 = -1 & i^3 = i^2 \cdot i = -i \\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 & i^5 = i^4 \cdot i = i & i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1 \\ i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i & i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 & i^9 = (i^4)^2 \cdot i = i \\ i^{10} = (i^4)^2 \cdot i^2 = -1 & i^{11} = (i^4)^2 \cdot i^3 = -i & i^{12} = i^{4 \cdot 3} = 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ i^{4n+1} = i & i^{4n+2} = -1 & i^{4n+3} = -i \\ i^{4n} = 1 & & \end{array}$$

### Örnek 7.5.

$i^{-27}$  sayısını hesaplayalım.

$$i^{-27} = i^{-(4 \times 6 + 3)} = \frac{1}{i^{4 \cdot 6} \cdot i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{(-i)i} = \frac{i}{1} = i$$

bulunur.

### Örnek 7.6.

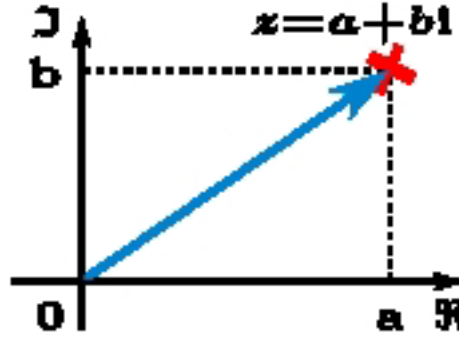
$$\frac{3 - i^{412}}{1 - i^{210}}$$

ifadesini sadeleştirelim:

$$\begin{aligned} \frac{3 - i^{412}}{1 - i^{210}} &= \frac{3 - i^{4 \times 103}}{1 - i^{4 \times 52} \cdot i^2} \\ &= \frac{(3 - (1))}{1 - 1 \cdot (-1)} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

## 7.5 Geometrik Gösterim



Şekil 7.2: Karmaşık Sayının Düzlemsel Gösterimi

Karmaşık sayılar ile analitik düzlemin noktaları bire bir eşlenebilir. Bu eşlemede,  $x + yi$  sayısına  $(x, y)$  noktası karşılık getirilir.

Şekilde,  $0 + 0i$  sayısı,  $O(0, 0)$  noktası ile,  $x + 0i$  sayıları  $Ox$  eksenini ile, bütün  $0 + yi$  sayıları,  $Oy$  eksenini ile eşlenir.  $Ox$  eksenine gerçel (reel) eksen,  $Oy$  eksenine sanal (imajiner) eksen denir.

Yukarıda belirtildiği gibi karmaşık sayılarla bire bir eşlenen düzleme, *karmaşık düzlem* diyeceğiz.

## 7.6 Karmaşık Sayının Eşleniği

Şekil 7.3'ü inceleyiniz.  $x + yi$  ve  $x - yi$  sayılarından birine diğerinin eşleniği denir.  $z$  karmaşık sayısının eşleniğini  $\bar{z}$  biçiminde göstereceğiz.

$$\bar{z} = \overline{(x + yi)} = x + (-y)i = x - yi$$

dir. Şekil dikkatle incelendiğinde bir karmaşık sayı ile eşleniğinin, gerçel eksene ( $Ox$  eksenine) göre simetrik oldukları görülür.

**Teorem 7.1.** Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği kendisidir.

*İspat:*  $z = x + yi$  karmaşık sayısını düşünelim.

$$(\bar{z})^- = [(x + yi)^-]^- = [x - yi]^- = x + yi = z$$

olur. Örneğin,

$$z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i \Rightarrow \overline{(\bar{z})} = 1 + 2i$$

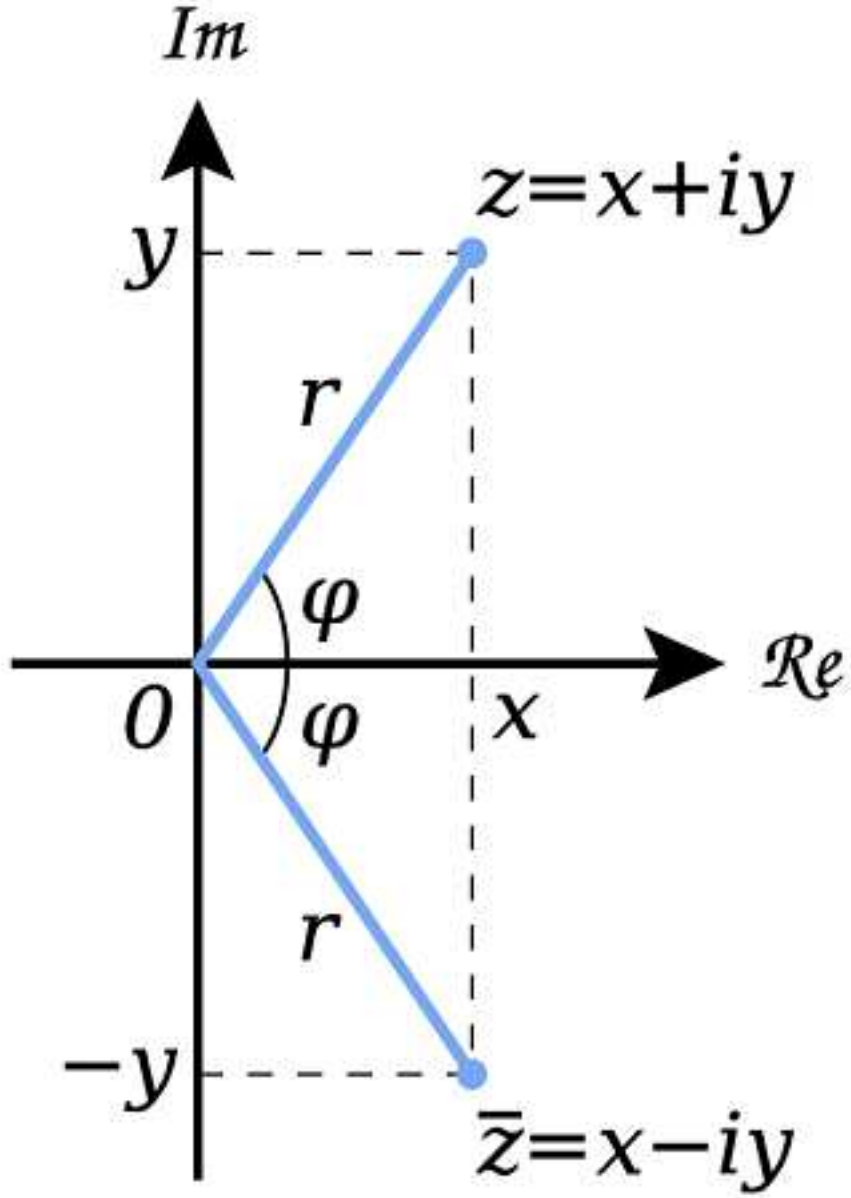
### Örnek 7.7.

Aşağıda verilen karmaşık sayıların eşleniklerini bulalım.

- a)  $1 - \frac{1}{2}i$    c) 203   e)  $\sqrt{-16} + 3$   
 b)  $\sqrt{2} + i$    d)  $\sqrt{-7}$    f)  $7 - \sqrt{-9} + \sqrt{-4}$

### Çözümler:

- a)  $1 - \frac{1}{2}i$ 'nin eşleniği  $1 + \frac{1}{2}i$ 'dir.  
 b)  $\sqrt{2} + i$ 'nin eşleniği  $\sqrt{2} - i$ 'dir.  
 c) 203'ün eşleniği 203 tür.  
 d)  $\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$ 'nin eşleniği  $-\sqrt{7}i$ 'dir.  
 e)  $\sqrt{-16} + 3 = 3 + 4i$ 'nin eşleniği  $3 - 4i$ 'dir.  
 f)  $7 - \sqrt{-9} + \sqrt{-4} = 7 - 3i + 2i = 7 - i$ 'nin eşleniği  $7 + i$ 'dir.



Şekil 7.3: Karmaşık Eşlenik



## 7.7 Mutlak Değer (modül)

Karmaşık düzlem üzerinde  $x + yi$  sayısına karşılık gelen nokta  $Z$  olsun.  $ZAO$  dik üçgeninde,

$$|OZ|^2 = |x|^2 + |y|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

veya

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

yazılır.

Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına uzaklığına bu sayının *modülü* veya *mutlak değeri* denir.

$z = x + yi$  sayısının modülü  $|z|$  ile gösterilir.  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  dir.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  için  $\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$  ve  $|z| \geq 0$  dır.

### Örnek 7.8.

$u = 3 - 4i$  sayısının modülünü bularak karmaşık düzlemde gösterelim:  
 $|u| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$  olur.

### Örnek 7.9.

olduğunu gösterelim:

$z = a + bi$  olsun.  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  dir.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 + 0i = 0$$

ve

$$z = 0 \Rightarrow z = 0 + 0i \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + 0^2} \Rightarrow |z| = 0$$

bulunur.

## 7.8 Toplama ve Çıkarma

İki karmaşık sayı  $u = a + bi$  ve  $v = c + di$  olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı  $i$ 'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. Bu nedenle,

$$u + v = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$u - v = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Yandaki şekli inceleyiniz.

### Örnek 7.10.

$z_1 = 2 - 3i$  ve  $z_2 = 1 + 2i$  ise  $z_1 + z_2$  ve  $z_1 - z_2$  toplam ve farklarını bularak karmaşık

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 - 3i) + (1 + 2i) \\ &= (2 + 1) + (-3 + 2)i \\ &= 3 - i \end{aligned}$$

sayılar düzleminde gösterelim.

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (2 - 3i) - (1 + 2i) \\ &= (2 - 1) + (-3 - 2)i \\ &= 1 - 5i \end{aligned}$$

Yandaki şekil üzerinde, karmaşık sayıların toplam ve farkının geometrik yorumunu yapınız.

## 7.9 Toplama Çıkarmasının özellikleri

### Kapalılık Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ve  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$  olsun

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

bulunur.  $a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + c), (b + d) \in \mathbb{R}$  olduğundan

$$(z_1 + z_2) \in \mathbb{C}$$

olur. O halde, karmaşık sayılar kümesi toplama işlemine göre *kapalıdır*.

**Etkisiz (birim) Eleman Varlığı**

$z_1, 0 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 = a + bi$  ve  $0 = 0 + 0i$  olsun.

$$\begin{aligned}
 z_1 + 0 &= a + bi + 0 + 0i; \\
 &= (a + 0) + (b + 0)i \\
 &= a + bi \\
 &= z_1 \\
 0 + z_1 &= 0 + 0i + a + bi \\
 &= (0 + a) + (0 + b)i \\
 &= a + bi \\
 &= z_1
 \end{aligned}$$

olur. O halde, sıfır, karmaşık sayılarda toplama işlemine göre *etkisiz (birim) elemandır*.

**Ters Eleman Varlığı**

$z \in \mathbb{C}$  ve  $z = a + bi$  ise  $-z = -a - bi$  diye tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
 z + (-z) &= (a + bi) + (-a - bi) \\
 &= (a - a) + (b - b)i \\
 &= 0 + 0i \\
 &= 0 \\
 (-z) + z &= (-a - bi) + (a + bi) \\
 &= (-a + a) + (-b + b)i \\
 &= 0 + 0i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde, toplama işlemine göre, *her elemanın tersi vardır*.

**Birleşme Özeliği**

$u, v, z \in \mathbb{C}$  ve  $u = a + bi, v = c + di, z = x + yi$  olsun.

$$\begin{aligned}
 (u + v) + w &= [(a + bi) + (c + di)] + (x + yi) \\
 &= [(a + c) + (b + d)i] + (x + yi) \\
 &= [(a + c) + x] + [(b + d) + y]i \\
 &= [a + (c + x)] + [b + (d + y)]i \\
 &= a + bi + [(c + x) + (d + y)]i \\
 &= u + (v + w)
 \end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılarda toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

$(\mathbb{C}, +)$  sistemi kapalılık, etkisiz eleman, ters eleman ve birleşme özellikleri olduğu için *gruptur*.

**Değişme Özeliği**

$\forall u, v \in \mathbb{C}$  ve  $u = a + bi, v = c + di$  olsun.

$$\begin{aligned}
 u + v &= (a + bi) + (c + di) \\
 &= (a + c) + (b + d)i \\
 &= (c + a) + (d + b)i \\
 &= (c + di) + (a + bi) \\
 &= v + u
 \end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin *değişme özeliği* vardır. Sonuç olarak,

$(\mathbb{C}, +)$  sistemi *değişmeli bir gruptur*.

**7.10 Alıştırmalar**

1. Köklerinden biri  $1 - 2i$  olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.
2.  $(1 + i)^{14}$  sayısını  $a + ib$  biçiminde yazınız.
3.  $(3 - 2i) = u(1 + i)$  ise  $u$  sayısını bulunuz.

4.  $P(x) = 3x^{17} - x^8 + 2$  ise  $P(i)$ 'yi bulunuz.
5.  $z = x + yi$  ve  $z \in \mathbb{C}$  ise  $(z - \bar{z})$  ve  $(\bar{z} - z)$  karmaşık sayılarını bulunuz.
6. Aşağıdaki ifadeleri  $a + ib$  biçiminde yazınız.

$$\begin{array}{ll}
 i^{16} = ? & i^{19} = ? \\
 \sqrt{-64} + \sqrt{-5} - \sqrt{-25} = ? & \sqrt{\frac{1}{-3}} = ? \\
 5\sqrt{-121} = ? & 3\sqrt{-60} = ? \\
 \sqrt{-7.5}\sqrt{-3} = ? & \sqrt{-27}\sqrt{\frac{1}{-3}} = ? \\
 12\sqrt{5}\sqrt{\frac{4}{-5}} = ? & \frac{12\sqrt{-15}}{16\sqrt{-5}} = ? \\
 \frac{3}{15\sqrt{-1}} = ? & \frac{10}{\sqrt{-5}} = ? \\
 5\sqrt{-3} + \sqrt{-9} = ? & (i\sqrt{3})^4 = ? \\
 \frac{1}{7}\sqrt{-243} - 8\sqrt{-28} - \frac{2}{3}\sqrt{-63} = ? & 
 \end{array}$$

7. Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} - \frac{1}{i^6} & \text{b) } 4i + 6i^2 - i^3 + 2i^4 + 3i^5 \\
 \text{c) } \sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{x}{9}} - \sqrt{\frac{x}{27}} & \text{d) } \sqrt{-4x^4} - \sqrt{-9x^4} - \sqrt{100x^4}
 \end{array}$$

8. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } x^2 - 2x + 10 = 0 & \text{b) } x^2 - x + 1 = 0 & \text{c) } x^2 - x + 3 = 0 \\
 \text{d) } 2y^2 = 3y - 4 & \text{e) } \frac{t^2}{2} + \frac{3t}{5} = -\frac{3}{10} & \text{f) } 7u^2 + 5u = -1
 \end{array}$$

9.  $z_1 = 3 - m + ni$  ve  $z_2 = (m - 2n)i$  sayılarının eşit olması için  $m$  ve  $n$  kaçtır?

10. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } (17 + \frac{1}{2}i) + (17 - \frac{1}{2}i) & \text{d) } \frac{i}{2}(1 - \sqrt{9}) \\
 \text{b) } 6 + (2 - i) & \text{e) } (5 + \sqrt{-4}) + (1 - 4i) \\
 \text{c) } (3 + 2i) + i & \text{f) } (i^2 - i) + (i^4 - i^3)
 \end{array}$$

## 7.11 Çarpma

İki karmaşık sayı  $u = a + bi$  ve  $v = c + di$  olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı  $i$ 'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. İki polinomun çarpımı işlemi ile

dağılma ve birleşme özeliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
 u.v &= (a + bi).(c + di) \\
 &= a(c + di) + bi(c + di) \\
 &= ac + adi + bci + bdi^2 \quad "i^2 = -1" \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i
 \end{aligned}$$

bulunur.

Örneğin,

$u = (3 + i)$  ve  $v = 1 + 2i$  ise  $u.v$  yi bulalım:

$$u.v = (3 + i)(1 + 2i) = (3.1 - 1.2) + (3.2 + 1.1)i = 1 + 7i$$

**Teorem 7.2.** Her  $z = x + yi$  karmaşık sayısı için  $|z|^2 = z.\bar{z}$  dir.

*İspat:*

$$\begin{aligned}
 z.\bar{z} &= (x + yi)(x - yi) \\
 &= x^2 + y^2 \\
 &= (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \\
 &= |z|^2
 \end{aligned}$$

## 7.12 Çarpımın Özellikleri

### Kapalılık Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ve  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$  olsun.

$$\begin{aligned}
 z_1.z_2 &= (a + bi)(c + di) \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i
 \end{aligned}$$

olur.  $(ac - bd) \in \mathbb{R}$  ve  $(ad + bc) \in \mathbb{R}$  olduğu için iki karmaşık sayının çarpımı yine bir karmaşık sayıdır.

Karmaşık sayılar kümesi çarpma işlemine göre *kapalıdır*.

### Etkisiz (birim) Eleman Varlığı

$z_1, 1 \in \mathbb{C}$  ve  $z_1 = a + bi$ ,  $1 = 1 + 0i$  olduğu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} z_1 \times 1 &= (a + bi)(1 + 0i) \\ &= (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i \\ &= a + bi = z_1 \end{aligned}$$

bulunur. Ohalde,  $1 = 1 + 0i$  sayısı karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre *etkisiz (birim) elemandır*.

### Ters Eleman Varlığı

$z$  karmaşık sayının çarpma işlemine göre tersi  $z^{-1}$  ile gösterilsin.

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

olmalıdır. Şimdi bu eşitliği sağlayan  $z^{-1}$  sayısını belirleyeceğiz:

$z = a + bi$  ise

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} = 1 &\Leftrightarrow (a + bi) \cdot z^{-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{z} \\ &\quad \text{"Pay ve paydayı } a - bi \text{ ile çarpalım."} \\ &\Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &\Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \end{aligned}$$

bulunur.  $z^{-1} \in \mathbb{C}$  olduğu açıktır. Son eşitliği kullanarak sağlama yapabiliriz:

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= (a + bi) \cdot \left[ \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right] \\ &= \underbrace{\left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right)}_1 + \underbrace{\left( -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)}_0 i \\ z \cdot z^{-1} &= 1 + 0i \\ z \cdot z^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Sıfır hariç, karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre *her elemanın tersi* vardır.

### Birleşme Özeliği

$u, v, z \in \mathbb{C}$  ve  $u = a + bi$ ,  $v = c + di$ ,  $z = x + yi$  olsun.

$$\begin{aligned}
 (u.v).z &= [(a + bi)(c + di)].(x + yi) \\
 &= [(ac - bd) + (ad + bc)i](x + yi) \\
 &= [(ac - bd).x - (ad + bc)y] + [(ac - bd)y + (ad + bc)x]i \\
 &= (acx - bdx - ady - bcy)(acy - bdy + adx + bcx)i \\
 &= [a(cx - dy) - b(dx + cy)] + [a(cy + dx) + b(cx - dy)]i \\
 &= (a + bi)[(cx - dy) + (cy + dx)i] \\
 &= u.(v.z)
 \end{aligned}$$

bulunur.

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin

### birleşme özeliği

vardır.

### Değişme Özeliği

$u, v \in \mathbb{C}$  ve  $u = a + bi$ ,  $v = c + di$  olsun. Gerçel sayılarda dağılma, birleşme ve çarpma işlemine göre değişme özeliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
 u.v &= (a + bi).(c + di) \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\
 &= (ca - db) + (da + cb)i \\
 &= (c + di).(a + bi) \\
 &= v.u
 \end{aligned}$$

bulunur.

Karmaşık sayılarda çarpma işlemine göre



**değişme özeliği**

vardır.

Sonuç olarak,  $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$  sistemi çarpma işlemine kapalıdır; etkisiz elemanı vardır; her elemanın tersi vardır; birleşme ve değişme özelliklerini sağlar. Öyleyse, sistem

**değişmeli bir grup**

tur.

**Dağılma Özeliği**

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinin varlığını gösterelim:

$u, v, z \in \mathbb{C}$  ve  $u = a + bi$ ,  $v = c + di$ ,  $z = x + yi$  olsun.

$$\begin{aligned}
 u.(v + z) &= (a + bi)[(c + di) + (x + yi)] \\
 &= (a + bi)[(c + x) + (d + y)i] \\
 &= [a(c + x) - b(d + y)] + [a(d + y) + b(c + x)]i \\
 &= (ac + ax - bd - by) + (ad + ay + bc + bx)i \\
 &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ax - by) + (ay + bx)i] \\
 &= u.v + u.z
 \end{aligned}$$

bulunur. Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özeliği vardır. Benzer şekilde, sağdan dağılma özeliğinin varlığı da gösterilebilir.

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine *dağılma* özeliği vardır.

O halde  $(\mathbb{C} - 0, +, \cdot)$  sistemi bir *cisim*dir.

**Çarpma İşleminde Kısaltma Kuralı**

**Teorem 7.3.**  $u, v, w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$  ve  $uw = vw$  ise  $u = v$  dir.

*İspat:*  $u = a + bi$ ,  $v = c + di$  ve  $w = x + yi$  olsun.

$$\begin{aligned}
 uw &= (a + bi)(x + yi) \\
 &= (ax - by) + (ay + bx)i
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}vw &= (c + di)(x + yi) \\ &= (cx - dy) + (cy + dx)i\end{aligned}$$

olacaktır.  $uw = vw$  olması için

$$(ax - by) + (ay + bx)i = (cx - dy) + (cy + dx)i$$

olmalıdır. Buradan,

$$(ax - by - cx + dy) + (ay + bx - cy - dx)i = 0$$

çıkar. Sol yanın eşleniği ile çarparsak

$$(ax - by - cx + dy)^2 + (ay + bx - cy - dx)^2 = 0$$

ya da

$$[(a - c)x + (d - b)y]^2 + [(a - c)y + (b - d)x]^2 = 0$$

yazabiliriz. Bu ifadedeki bütün sayılar gerçel ve  $w = x + yi \neq 0$  olduğundan, son eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$a = c \quad \text{ve} \quad b = d$$

olmasıdır. Öyleyse,

$$u = v$$

olur.

### 7.13 Bölme

$u, v \in C$  ve  $u = a + bi$ ,  $v = c + di$ ,  $v \neq 0$  olsun.

$$\frac{u}{v} = \frac{a + bi}{c + di}$$

"Pay ve paydayı, paydanın eşleniği ile çarpalım".

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{(ac - bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i\end{aligned}$$

olur.

İki karmaşık sayının birbirine bölümünü elde etmek için paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

**Örnek:**

$$\frac{7+3i}{5-2i}$$

işlemine yapalım:

$$\begin{aligned} \frac{7+3i}{5-2i} &= \frac{(7-3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} \\ &= \frac{(35-6) + (14+15)i}{5^2+2^2} \\ &= \frac{29+29i}{29} \\ &= 1+i \end{aligned}$$

Bölme işlemi ters eleman yardımıyla şöyle tanımlayabiliriz:  $u = a + bi$  ve  $v = c + di$  ve  $v \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v} = u \cdot v^{-1}$$

dir.

İki karmaşık sayının birbirine bölümü; bölenin tersi ile bölünenin çarpımına eşittir.

**Teorem 7.4.**  $u, v \in \mathbb{C}$  ise, aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\begin{aligned} |uv| &= |u| \cdot |v| \\ \left| \frac{u}{v} \right| &= \frac{|u|}{|v|} \quad (v \neq 0) \\ |u+v| &\leq |u| + |v| \\ |u| - |v| &\leq |u+v| \end{aligned}$$

Bu teoremin ispatı öğrenciye bırakılmıştır.

### 7.14 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeleri  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $a + ib$  biçiminde yazınız.

a)  $(3 + 4i)(4i - 3)$

b)  $(6i - 1)(1 + 6i)$

c)  $(1 + \sqrt{-7})^2$

d)  $(3 - 5i)^2$

e)  $(-2 + 5i)(4 + 3i)$

f)  $(5 - 2i)(3 + 4i)$

g)  $(\sqrt{-9} - 3)(2 - \sqrt{-1})$

h)  $(\sqrt{-25} + 2)(\sqrt{-16} - 2)$

2. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

a)  $\frac{4 + i}{2 - 3i}$

d)  $\frac{1 - \sqrt{-7}}{i}$

g)  $\frac{i}{1 + i}$

b)  $\frac{3 + i}{5i}$

e)  $\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{-3}}$

h)  $\frac{i^5 + 1}{i^5}$

c)  $\frac{2 - i}{7}$

f)  $\frac{5 - \sqrt{-7}}{\sqrt{-7}}$

i)  $\frac{i^3 - 1}{i^3}$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a)  $x^2 - 2ix - 4 = 0$

b)  $ix^2 + 5x - 4i = 0$

4.  $z = 2 - i$  ise  $z^{-1} - i$  bulunuz.

5.  $z = 1 - i$  ise  $z^2 \cdot z^{-1}$  ifadesini bulunuz.

6.  $|z^2| = |z|^2$  olduğunu gösteriniz.

## 7.15 Geometrik Yorumlar

### Toplama İşleminin Geometrik Yorumu

Karmaşık iki sayı  $z_1 = a + bi$  ve  $z_2 = c + di$  olsun.  $z_1$  ve  $z_2$  sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntülerine, sırayla,  $A$  ve  $B$  diyelim.

Yandaki şekilde görüldüğü gibi  $OACB$  paralel kenarını çizelim. Şekilde taralı olan,

$$\triangle ODB \cong \triangle AEC \quad (\text{A.K.A. eşlik kuralı})$$

dir. Bu üçgenlerin eşliğinden yararlanarak  $C$  noktasının koordinatları  $(a + c, b + d)$  olur. Yani  $C$  noktası,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

Şekli dikkatle inceleyecek olursak aşağıdaki sonucu çıkarırız.

*İki karmaşık sayının mutlak değerleri toplamı, bu sayıların toplamının mutlak değerinden küçük olamaz.*

Bunun sembolle ifadesi şöyledir:

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

**Çıkarma İşleminin Geometrik Yorumu**

Yandaki şekli inceleyiniz.  $z_1 = a + ib$ ,  $z_2 = c + id$  olsun.  $z_1, z_2$  ve  $-z_2$  sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntülerine, sırasıyla,  $A, B$  ve  $P$  diyelim. Toplama işlemine benzer şekilde hareket edilerek,  $R$  noktasının koordinatları,  $(a - c, b - d)$  bulunur. Yani  $R$  noktası,

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$$

sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür. Şekilden de kolayca görüleceği gibi, şu sonucu yazabiliriz:

*İki karmaşık sayının mutlak değerlerinin farkı, farklarının mutlak değerinden büyük olamaz.*

Bunun sembolle ifadesi şöyledir:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

**7.16 İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık**

$z_1 = x_1 + iy_1$  ve  $z_2 = x_2 + iy_2$  iki karmaşık sayı olsun. Bu sayılar arasındaki uzaklık, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri arasındaki uzaklık olarak tanımlanır. Dolayısıyla,

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ 'in görüntüsü } A(x_1, y_1)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \text{ 'in görüntüsü } B(x_2, y_2)$$

ise

$$|z_1 - z_2| = |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

olur. Tabii,

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

olduğunu görmek kolaydır.

**Örnek 7.11.**

$z_1 = 1 + i$  ve  $z_2 = 1 - i$  sayıları arasındaki uzaklığı bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 1 + i \text{ nin görüntüsü } A(1, 1) \\ z_2 = 1 - i \text{ nin görüntüsü } B(1, -1) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{(1-1)^2 + (1+1)^2} = 2$$

bulunur.

### Örnek 7.12.

$\{z : |z - 1 + i| = 2, z \in \mathbb{C}\}$  kümesini karmaşık düzlemde gösterelim:

$z = x + iy$  olsun.

$$|z - 1 + i| = 2$$

$$\Rightarrow |x + iy - 1 + i| = 2$$

$$\Rightarrow |(x-1) + i(y+1)| = 2$$

$$\Rightarrow |\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}| = 2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

bulunur. O halde, verilen denklemi sağlayan karmaşık sayılar, merkezi  $(1, -1)$  ve yarıçapı 2 olan çember üzerindeki karmaşık sayılardır. Şekli inceleyiniz.

### Örnek 7.13.

$$\{z : |z - 1 + i| \leq 2, z \in \mathbb{C}\}$$

kümesini karmaşık düzlemde gösterelim.

$$|z - 1 + i| \leq 0 \Rightarrow |z - (1 - i)| \leq 2$$

$(1 - i)$  sayısının görüntüsü  $M(1, -1)$  olduğundan  $z$  sayılarının kümesi  $M$  merkezli  $r = 2$  yarıçaplı dairedir. Yukarıda sağdaki şekle bakınız.

## 7.17 Kutupsal Göstrim

Sıfırdan farklı bir karmaşık sayı  $z = a + ib$  olsun. Bu sayının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsünü orijine birleştiren doğru parçasına  $r$  ve  $r$  nin  $Ox$  eksenini ile oluşturduğu açının ölçüsüne  $\theta$  diyelim. Şekildeki dik üçgenden,

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \sin \theta &= \frac{b}{|z|} \quad \text{veya} \quad b = |z| \sin \theta \\ \cos \theta &= \frac{a}{|z|} \quad \text{veya} \quad a = |z| \cos \theta \end{aligned}$$

yazılır.  $a$  ve  $b$  yerine değerleri konularak,

$$z = a + ib = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

veya

$$|z| = r \quad \text{yazılırsa} \quad z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

elde edilir. Bu biçimdeki gösterime, karmaşık sayıların

### **kutupsal (veya trigonometrik) gösterimi**

denir.

Sıfırdan farklı  $z = a + ib$  karmaşık sayısı için,

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

eşitliklerini sağlayan  $\theta$  gerçel sayısına  $z$  nin



**argümenti**

denir ve  $arg(z) = \theta$  veya  $arg(a + ib) = \theta$  biçiminde gösterilir.  $0 \leq \theta < 2\pi$  ise  $\theta$  ya karmaşık sayının

**esas argümenti**

denir.

Mutlak değeri ve argümenti verilen bir karmaşık sayı kolayca bulunur.

Karmaşık sayının mutlak değer ve argümentine bu sayının

**kutupsal koordinatları**

denir ve  $(|z|, \theta)$  veya  $(r, \theta)$  biçiminde gösterilir.

Karmaşık sayı,  $\theta$  argümenti radyan cinsinden ve  $k \in Z$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} z = a + ib &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] \end{aligned}$$

biçiminde de yazılabileceğini unutmayınız.

$$|z| = r \quad \text{ve} \quad (\cos\theta + i\sin\theta) = cis\theta$$

gösterimini kullanırsak,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta$$

kısaltmasını yazabiliriz.

**Örnek 7.14.**

$z = 1 + i\sqrt{3}$  sayısının argüment ve esas argümentini bulalım.

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

bulunur. Mutlak değer yardımıyla,

$$z = 2\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

yazılır.

Karmaşık sayının kutupsal biçimi düşünülerek,  $k \in Z$  için,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\end{aligned}$$

bulunur.  $\theta$  için eşitliği sağlayan en küçük pozitif gerçel sayı  $\frac{\pi}{3}$  olduğundan,  $z$  sayısının esas argümenti  $\frac{\pi}{3}$  radyandır.

$z$  sayısını kutupsal biçimde yazalım:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 2cis60^\circ$$

veya  $k \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right] = 2cis\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

ya da

$$z = 2[\cos(60^\circ + k360^\circ) + i\sin(60^\circ + k360^\circ)] = 2cis(60^\circ + k360^\circ)$$

olur.

$z$ 'nin esas argümentinin,  $OAB$  üçgeni yardımıyla bulunabileceğini görünüz.

### Örnek 7.15.

Kutupsal koordinatları  $(4, 225^\circ)$  olan karmaşık sayıyı bulalım:

$$\begin{aligned}z &= 4cis225^\circ \\ &= 4(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) \\ &= 4[(-\cos 45^\circ) + i(-\sin 45^\circ)] \\ &= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \\ &= -2\sqrt{2}(1 + i)\end{aligned}$$

## 7.18 Kutupsal Çarpma ve Bölme

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$  ve  $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$  karmaşık sayılarının çarpımını ve bölümünü bulalım.

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\
&= r_1 \cdot r_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\
&= r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\
z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \bar{z}_2 = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitliklerden,

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

ve

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

sonuçlarını çıkarırız.

**Örnek 7.16.**

$z_1 = 2(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$ ,  $z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$  olmak üzere  $z_1 \cdot z_2$  yi bulalım:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 3 \operatorname{cis}(70^\circ + 50^\circ) \\
&= 6(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \\
&= 6(-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\
&= 6\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -3 + 3\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

**Örnek 7.17.**

$\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$  ve  $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$  ise  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$  yi bulalım:

$$\begin{aligned}
\arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

**Çarpma İşleminin Geometrik Yorumu**

$$z_1 = a + ib = r_1 \text{cis} \theta_1$$

ve

$$z_2 = c + id = r_2 \text{cis} \theta_2$$

olsun.  $z_1$  ile  $z_2$  sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri sırasıyla  $A$  ve  $B$  olsun.  $Ox$  eksenini üzerinde  $|OC| = 1$  birim uzunluk olacak şekilde  $C$  noktası alalım.  $m(\hat{C}) = m(\hat{B})$  ve  $m(\widehat{COA}) = m(\widehat{BOD})$  olacak şekilde açılar çizip  $\triangle AOC$  ne benzer  $\triangle DOB$  elde edelim.

$$\begin{aligned} \triangle AOC \sim \triangle DOB &\Rightarrow \frac{|OD|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OC|} \\ &\Rightarrow \frac{|OD|}{|z_1|} = \frac{|z_2|}{1} \\ &\Rightarrow |OD| = |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan  $\widehat{COA} = \theta_1$ ,  $\widehat{COB} = \theta_2$  ve  $\widehat{COD} = \theta_1 + \theta_2$  olduğundan  $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$  çarpımı, karmaşık düzlemde  $D$  noktası ile temsil edilir. Yani  $D$  noktası,  $z_1 \cdot z_2$  sayısının, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

**Bölme İşleminin Geometrik Yorumu**

$z_1 \neq 0$  olmak üzere iki karmaşık sayı

$$z_1 = a + ib = r_1 \text{cis} \theta_1$$

ve

$$z_2 = c + id = r_2 \text{cis} \theta_2$$

olsun.  $z_1$  ve  $z_2$  sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri sırasıyla  $A$  ve  $B$  olsun.  $|OC| = 1$  birim uzunluk olmak üzere  $\triangle AOC$  ne benzer  $\triangle BOD$  çizelim.

$$\begin{aligned} \triangle AOC &\sim \triangle BOD \Rightarrow \\ \frac{|DO|}{|CO|} &= \frac{|BO|}{|AO|} \Rightarrow |DO| = \frac{|z_2|}{|z_1|} \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan

$$\widehat{COD} = \theta_2 - \theta_1, \quad \frac{|z_2|}{|z_1|} = |OD| = \frac{r_2}{r_1}$$

olduğu açıktır. O halde,

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} \text{cis}(\theta_2 - \theta_1)$$

bölümü, karmaşık düzlemde  $D$  noktası ile temsil edilir. Yani  $D$  noktası  $\frac{z_2}{z_1}$  sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

#### KARMAŞIK SAYILARIN KUVVETLERİ

$z = r \text{cis} \theta$  olsun.

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z = r \text{cis} \theta \cdot r \text{cis} \theta; & z^3 &= z^2 \cdot z = r^2 \text{cis} 2\theta \cdot r \text{cis} \theta \\ z^2 &= r^2 \text{cis}(\theta + \theta) & z^3 &= r^3 \text{cis}(2\theta + \theta) \\ z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) & z^3 &= r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde devam edilerek  $n \in \mathbb{N}^+$  için,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

elde edilir.

**Teorem 7.5.**  $\forall n \in \mathbb{N}^+$  için,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

*dır. Bu eşitliğe De Moivre eşitliği denir.*

**Örnek 7.18.**

$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{75}$  karmaşık sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{75} &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{75} \\ &= \cos \frac{75\pi}{3} + i \sin \frac{75\pi}{3} \\ &= \cos 25\pi + i \sin 25\pi \\ &= \cos(\pi + 12.2\pi) + i \sin(\pi + 12.2\pi) \\ &= -1 + i0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 7.19.**

$(1 + i)^{18}$  sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$$|1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} (1 + i)^{18} &= (\sqrt{2})^{18} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{18} = 2^9 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^{18} \\ &= 2^9 (\cos \frac{18\pi}{4} + i \sin \frac{18\pi}{4}) \\ &= 2^9 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

bulunur.

## 7.19 Karmaşık sayıların Kökleri

$u = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  sayısının  $n$ -inci ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) kuvvetten köklerini  $\sqrt[n]{u}$  ile göstereceğiz. Bu kökler

$$z = \sqrt[n]{u} \Leftrightarrow z^n = u$$

bağıntısını sağlayan  $z$  sayılarıdır.

Örneğin, karesi -2 olan bir gerçel sayı olmadığını biliyoruz; ama karesi -2 olan karmaşık sayıları bulabiliriz:

$$(\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

$$(-\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

O halde,  $\sqrt{2}i$  ve  $-\sqrt{2}i$  sayıları -2'nin kareköküdür.

Bu örnekteki gibi özel çözüm her zaman mümkün değildir. Karmaşık sayıların köklerini bulmak için, De Moivre teoremini kullanacağız

### Teorem 7.6.

$$u = r \operatorname{cis}\theta \quad \text{ve} \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad \text{için}$$

$$z^n = u$$

denklemini sağlayan  $z$  sayıları şunlardır:

$$r^{1/n} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

### İspat:

$z^n = u$  denkleminde  $u = r \operatorname{cis}\theta$  değerini yerine koyup De Moivre teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned} z^n &= r \operatorname{cis}\theta \\ z &= [r \operatorname{cis}\theta]^{1/n} \\ z &= r^{1/n} \operatorname{cis}\left[\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right] \\ z &= \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

bulunur.

$z^n = u$  denklemini sağlayan  $z$  sayılarına  $u$  sayısının  $n$ -inci kuvvetten kökü denir. Köklerin modülleri eşit ve  $\sqrt[n]{r}$  dir. Argümentleri ise birbirlerinden farklı olup

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \frac{\theta + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$

dir. Görüldüğü gibi, verilen bir  $u$  karmaşık sayısının  $n$ -inci kuvvetten  $n$  tane kökü vardır. Bu kökler karmaşık düzlemde, merkezi orijinde olan  $\sqrt[n]{|u|}$  yarıçaplı çember üzerinde eşit aralıklarla sıralanır.

**Örnek 7.20.**

$u$  sayısını kutupsal biçimde yazalım.  $k \in Z$  olmak üzere

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ u &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ u &= 2cis\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

olur. Kareköklere  $z$  diyelim.  $k$  bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned} z^2 &= u \\ z^2 &= 2cis\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \\ z &= 2^{1/2}cis\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right] \\ z &= \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) \end{aligned}$$

$k = 0$  için

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}cis\frac{\pi}{6} \\ z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$k = 1$  için

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$



bulunur.

**Örnek 7.21.**

$z^3 - i = 0$  denkleminin köklerini bulalım.  $k = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere

$$\begin{aligned} z^3 = i &\Rightarrow z^3 = cis\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ &\Rightarrow z = cis\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] \\ &\Rightarrow z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

$k = 0$  için,

$$\begin{aligned} z_1 &= \left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right] \\ z_1 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ z_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$k = 1$  için,

$$\begin{aligned} z_2 &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ z_2 &= \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right) \\ z_2 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ z_2 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$k = 2$  için,

$$\begin{aligned} z_3 &= \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ z_3 &= \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ z_3 &= (0 - i) \\ z_3 &= -i \end{aligned}$$

bulunur.

Köklerin görüntülerinin ağırlık merkezi orijinde olan düzgün çokgenin köşeleri olduğunu grafikten görünüz.

### Örnek 7.22.

$u = 8 + 6i$  sayısının kareköklerini bulunuz.

Bu sayıyı kutupsal biçimde yazmak için trigonometrik cetvelde değerler bulmak zorunda kalacağız. Bundan sakınmak amacıyla, kutupsal koordinatları kullanmadan, karekökleri tanıma uyacak biçimde bulmaya çalışalım:

$z = x + iy$  ve  $z^2 = u$  olsun.

$$\begin{aligned} z^2 &= (x + iy)^2 = 8 + 6i \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi = 8 + 6i \\ &\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Elde edilen sistemi çözelim:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 8 &\Rightarrow x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \\ &\Rightarrow x^4 - 9 - 8x^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 9) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \quad \text{olamaz} \\ &\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 & \text{için } y_1 = 1 \\ x_2 = -3 & \text{için } y_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Ohalde  $z_1 = 3 + i$  ve  $z_2 = -3 - i$  olacaktır.

## 7.20 Alıştırmalar

1.

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2(2 - i)$$

sayısının mutlak değerini bulunuz.

2.  $u = |u - 1| + 2i$  eşitliğini doğrulayan  $u$  karmaşık sayısını bulunuz.

3.  $|z - 1| - |z + 2i| = 0$  eşitliğini doğrulayan  $z$  karmaşık sayılarının görüntülerini bulunuz.

4.  $u = 1 + 2i$  ve  $v = 3 - i$  sayıları arasındaki uzaklığı bulunuz.

5.  $\{z : |z - i| \leq 3, z \in \mathbb{C}\}$  kümesini karmaşık sayılar dzleminde belirtiniz.

6.  $\{z : |z + 1 - 2i| \leq |z + 4|, z \in \mathbb{C}\}$ 'ni karmaşık sayılar dzleminde belirtiniz.

7.  $z = 1 - \sqrt{3}i$  sayısını kutupsal biimde yazınız.

8.  $z_1 = 4(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)$  ve  $z_2 = 2(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)$  ise  $z_1 / z_2$  sayısını  $a + ib$  biiminde yazınız.

9.  $\arg[z - 1 + i] = 60^\circ$  eşitliğini sağlayan  $z$  karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri kümesini gösteriniz.

10.  $A = \frac{(cis \frac{\pi}{6})^4 (cis \frac{\pi}{2})^3}{(cis \frac{\pi}{4})^5}$  sayısını  $a + ib$  biçiminde yazınız.

11.  $z = (1 - i)^{64}$  sayısını  $a + ib$  biçiminde yazınız.

12. Aşağıdaki şekilde görüntüleri verilen  $z_1$  ve  $z_2$ 'nin çarpımı olan sayıyı bulunuz.

13.  $z = +i$  sayısının kareköklerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.
14. Kutupsal koordinatları  $(2, 135^\circ)$  olan karmaşık sayıyı  $a + ib$  biçiminde yazınız.
15.  $4 \cdot (1 + \sqrt{3})i$  sayısının küpköklerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.
16.  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  birer fonksiyon ve

$$f : z \rightarrow z + 1; \quad g : z \rightarrow \bar{z}$$

ise  $(g \circ f)(i)$ 'yi bulunuz.