Bölüm 2

Determinantlar

Tanım 2.1. *Bir kare matrisin determinantı, o matrisi bir sayıya eşleyen fonksiyondur.*

Söz konusu fonksiyonun değerine o matrisin determinantı denilir.

A bir kare matris ise, determinantı $det(A)$ ya da $|A|$ ile gösterilir. Burada $|\ |$ simgesi mutlak değer için kullanılan simge değildir.

Determinantlar doğrusal denklem çözümlerinde çok işe yarar. Uygulamada bir çok olayın matematiksel modeli matrislerle kurulur. Matrislerin özelikleri yanında, ortaya çıkan durumların çözümlenmesi için determinantlar devreye girer.

Determinantları en genel durumuyla anlatmak belki en iyisidir, ama en pedagojik yol olduğu söylenemez. O nedenle, bbu kitapta, determinantları hiç bilmeyenlerin kolayca anlayacağı bir yöntemle anlatmayı tercih ediyoruz.

2.1 Determinatlar

1×1 **Matrislerin determinantı**

A matrisi en basit 1×1 tipinde bir matris olsun. Tek bileşeni sayı olan bu tip matrislerin determinantı, bileşen sayısıdır.

$A = [12]$

matrisi 1×1 tipinde olan bir matristir ve determinantı $|A| = 12$ olur. Benzer olarak,

$$A = (-12)$$

matrisi 1×1 tipinde olan bir matristir ve determinantı $|A| = -12$ olur.

2×2 **Matrislerinin determinantı**

A matrisi 2×2 tipinden bir matris olsun:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2×2 tipinden olan bu matrisin determinantı $|A| = (-1)(-4) - (3)(2) = -2$ biçiminde tanımlanır. Genel olarak,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gibi 2×2 tipinden olan bir matrisin deteminantı

$$|A| = ab - cd$$

olarak tanımlanır.

3×3 **Matrislerinin determinantı**

A matrisi 3×3 tipinden bir matris olsun:

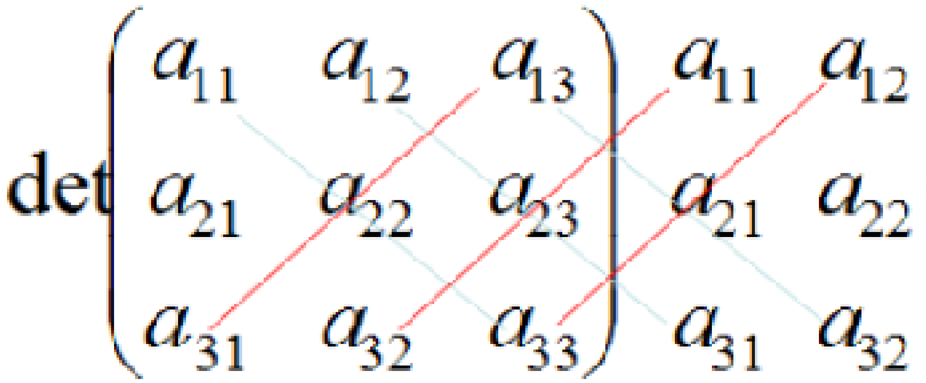
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

3×3 tipinden olan bu matrisin determinantı

$$det(A) = |A| = (1)(4)(5)(2) + 2.3.7 + 5.(-2).6 - (7.4.5 + 6.3.1 + 5.(-2).2) = -136$$

biçiminde tanımlanır. genel olarak,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Şekil 2.1: Sarrus Yöntemi

gibi 3×3 tipinden olan bir matrisin determinantı

$$\begin{aligned} det(A) &= |A| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Ancak bu tanım öncekilere göre biraz daha karmaşıktır. Bu karmaşıklığı yoketmek için daha basit bir yollar izlenebilir. izlenebilecek yollardan birisi, 3×3 tipinden matrislerin determinantını bulmaya yarayan Sarrus yöntemidir. Oldukça pratik olan bu yöntemi öğrenmek kolaydır.

Sarrus Yöntemi

3×3 tipinden A matrisinin sağ yanına birinci ve ikinci kolon bileşenlerini Şekilde görüldüğü gibi ekleyelim. Sonra $a_{11}a_{22}a_{33}$ asal köşegeni ile onun üstünde ve ona paralel çizgilerle gösterilen öğelerin çarpımlarının toplamını yazalım. Benzer olarak, $(a_{31}a_{22}a_{13}$ yedek köşegeni ile onun altında ve ona paralel çizgilerle gösterilen öğelerin çarpımlarının toplamını yazalım. Sonra birinci toplamdan ikinciyi çıkaralım. Çıkan sayı, verilen matrisin deterinantıdır (bkz. Şekil 2.1).

Sarrus yönetimi 3×3 tipinden matrislerin determinantlarını bulurken pratik kolaylık sağlar. Ama daha büyük boyutlu matrislere uygulanamaz. O nedenle, her tipten matrislere uygulanabilecek genel bir yönteme gereksinim vardır.

2.2 Başka Yöntemler

Yüksek Boyutlu Matrislerin Determinantlarının Hesaplanması

Yukarıda söylenen metotlar 2 ve 3 boyutlu matrisler içindir. Matrisin boyutu artınca o yöntemler işe yaramaz. Hangi boyutta olursa olsun, bir matrisin determinantını hesaplanak için *Laplace yöntemi* geçerli genel bir yöntemdir.

İşlemleri kısaltmak için *Gauss yoketme metodu* da oldukça pratik genel bir yöntemdir. Bu yöntemleri aşağıdaki örneklerle inceleyeceğiz.

Laplace Yöntemi

Minör

$n \times n$ tipinden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \ldots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinin herhangi bir a_{ij} bileşeninin *minör*ü şöyle tanımlanır:

i-inci satır le j-inci kolon atılır. Geri kalan matrisin determinantı a_{ij} bileşenine karşılık gelen *minör*'dür. Buna göre, yukardaki A matrisinin a_{ij} bileşenine karşılık gelen minör

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \square & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \square & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ \square & \square & \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \square & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

biçimindeki matrisin determinantıdır. Onu

$$min(a_{ij}) = M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \square & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \square & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ \square & \square & \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \square & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

biçiminde gösterelim. Tabii, minörü yazarken, yukarıda bileşenleri $\square$ ile gösterilen i-inci satır ile j-inci kolonun silineceğini unutmayacağız.

örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin ikinci satırındaki bileşenlerin minörlerini bulalım. Önce A matrisini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisi gibi gibi düğünürsek, bu matrisin ikinci satırındaki bileşenlerine göre minörleri şöyle bulunur:

$a_{21} = 3$ bileşeninin minörü, a_{21} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 1. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu determinantın değeri

$$= 2.4 - 3.3 = 8 - 9 = -1$$

olur. Benzer olarak, $a_{22} = 1$ bileşenini minörü, a_{22} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 2. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu determinantın değeri

$$= 6.4 - 3.10 = 24 - 30 = -6$$

olur. Son olarak, $a_{23} = 1$ bileşeninin minörü, a_{23} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 3. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$min(a_{13}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Bu determinantın değeri

$$= 6.3 - 2.10 = 18 - 20 = -2$$

olur.

$$min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bun determinantın değeri

$$= 3.3 - 1.10 = 9 - 10 = -1$$

olur.

2.3 Determinantların Özelikleri

Determinantların pratikte çok işe yarayan özelikleri vardır. Bunları genel durum için ispat etmek yerine, yalnızca 2×2 tipi matrisleri çin göstermekle yetineceğiz.

Teorem 2.1. *Bir matrisin determinantı devriğinin determinatına eşittir.*

İspat

2×2 tipi A matrisi ve A^T devrişi (transpose) şöyledir.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ d & d \end{pmatrix}$$

dir. Buradan determinantlar arasında

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = |A^T|$$

eşitişi kurulabilir.

Teorem 2.2. *Üçgensel bir matrisin determinantı asal köşegen üzerindeki bileşenlerinin çarpımına eşittir*

İspat

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - b.0 = ad = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & d \end{vmatrix} = |A^T|$$

Teorem 2.3. *Matrisin iki satırı kendi aralarında yer değiştirirse determinantları ters işaretli olur. Aynı özelik kolonlar için de geçerlidir.*

İspat

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - b.c = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

ve

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - b.c = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

olur.

Teorem 2.4. *Matrisin bir satırı bir λ sayısı ile çarpılırsa, determinantı da o sayı ile çarpılmış olur.*

İspat

$$\lambda|A| = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda b.c = \lambda(ad - bc) = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}$$

olur.

Teorem 2.5. *Matrisin bir satırı bir λ sayısı ile çarpılıp başkaş bir satıra eklenirse, determinantı değişmez. Aynı özelik kolonlar için de vardır.*

İspat

$$|A| = \begin{vmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = ad-b.c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+\lambda b & b \\ c+\lambda d & d \end{vmatrix} = ad-b.c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+\lambda a \\ c & d+\lambda c \end{vmatrix}$$

olur.

Teorem 2.6. *İki matrisin çarpımının determinantı determinantlarının çarpımına eşittir.*

İspat

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ve \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

matrislri verilsin.

$$|AB| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+cg & cf+dh \end{vmatrix} = (ad-b.c)(eh-fg) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

olur.

2.4 Uygulamalar

Önerme 2.1. *Bir paralelkenarın alanı, kendisini oluşturan vektörlerden oluşan matrisin determinantına eşittir.*

İspat

Köğeleri $(0,0,(a,b),(a+c,b+d)ve(c,d)$ olan paralelkenar için, sözkonusu matris

Önerme 2.2. *Bir paralelyüzün hacmı, kendisini oluşturan vektörlerden oluşan matrisin determinantına eşittir.*

İspat

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinatını Sarrus yöntemiyle ya da Laplace yöntemiyle hesaplayabiliriz:

Sarrus Yöntemiyle Hesap:

$$\begin{aligned} det(A) &= (-2.1.-1)+(-3.-1.0)+(2.3.2) \\ &= -(-3.1.2)-(-2.3.0)-(2.-1.-1) \\ &= 2+0+12-(-6)-0 \\ &= 18 \end{aligned}$$

olur.

Laplace Yöntemiyle Hesap:

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{1+2}.2.det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}.1.det\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-2).((-1).(-1)-2.3+1.((-2).(-1)-2.(-3)) \\ &= (-2)(-5)+8 \\ &= 18 \end{aligned}$$

olur.

Gauss Yöntemiyle Hesap:

Gauss yöntemiyle determinant hesaplarken, matrisin bir satırına başka bir satırın bir sayısal katının eklenmesiyle determinantın değişmedişi gerçeğine dayalıdır. Tabii, aynı özelişin kolonlar içnde geçerli olduğunu biliyoruz. Boyutları 3 ya da daha çok olan matrislerde Gauss yoketme yöntemi diye adlandırılan bu yöntem işlemleri kolaylağtırır. Uygun katsayılar seçilerek, matris üçgensel biçeme sokulabilir. Bu bağarılamadığında, bir satır ya da kolondaki bileşenlerin bazıları 0 yapılabilir.

Bunu yukarıdaki örnek üzerinde gösterelim. Matrisin ikinci kolonu birinci kolona eklenirse,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. A ile A_1 matrislerinin determinantları aynıdır. A_1 matrisini birinci kolona göre açarsak

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{3+1}.2.det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2.(2.3 - 1.(-3)) \\ &= 18 \end{aligned}$$

olur.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinatını Gauss yoketme yöntemiyle bulalım. işlemleri açıklamak için matrisin i-inci satırını S_i ile j-inci kolonunu K_j ile gösrerelim. Buna göre birinci satırın iki katını alıp ikinci satıra ekleme eylemini $(S_2+2S_1) \longrightarrow (S_2)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $(S_3+S_1) \longrightarrow (S_3)$ işlemlerini yapalım:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -(1)(3)(-5) = 15$$

2.5 Ters Matris

Her gerçel $a \neq 0$ sayısı için $\frac{a}{a} = aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ eşitlişini sağlayan bir a^{-1} sayısının varlığını biliyoruz. Öyleyse aklımıza ğu soru takılmlıdır: Acaba her A matrisi için

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \tag{2.1}$$

eşitlişini sağlayan bir A^{-1} matrisi var mıdır? Bu özeliğin gene ancak bazı kısıtlar altında var olduğunu göreceğiz.

Teorem 2.7. *Tersinebilir (invertible) matrisin determinantı, tersinin çarpımsal tersine eşittir.*

İspat

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

olduğunu bir örnekle göstereceğiz.

3×3 tipi matrislerin tersini bulmak için Gauss yoketme yöntemini kullananan pratik bir yöntemi bir örnek üzerinde göstereceğiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

matrisinin tersini bulmak için, A matrisinin sağına birim matrisi aşağıda görüldüğü gibi ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Şimdi bu görüntüde soldaki A matrisini bir üçgen matris haline getirmek için Gauss yoketme yöntemini kullanacağız. (2.3) matrisine $S_2 - S_1$ işlemini sonra $S_3 - S_1$ işlemlerini uygulayalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

olur. Şimdi (2.4) matrisinde $S_1 - 3S_3$ işlemini yaparsak, matris

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

biçimini alır. Son olarak, soldaki A matrisini birim matrise dönüştürmek için (2.5) imatrisine $S_1 - 3S_3$ işlemini uygulayalım:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

(2.6) matrisinin sağında oluşan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

matrisi aradığımız ters matristir. Gerçekten bunun aradığımız ters matris olduğunu görmek için $A^{-1}A$ çarpımını yapmak yetecektir:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Matrislerin çarpım kuralını uygulayarak,

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7.1 - 3.1 - 3.1 & 7.3 - 3.4 - 3.3 & 7.3 - 3.3 - 3.4 \\ -1.1 + 1.1 + 0.1 & -1.3 + 1.4 + 0.3 & -1.3 + 1.3 + 0.4 \\ -1.1 + 0.1 + 1.1 & -1.3 + 0.4 + 1.3 & -1.3 + 0.3 + 1.4 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

olur ki buradan

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

çıkar.

Yüksek boyutlu matrislerin terslerini bulmak için daha genel olan Laplace yöntemini kısaca açıklayalım.bilmek için minör ve kofaktör kavramlarına gerekseme vardır.

Eşçarpan (cofactor)

A matsisinin a_{ij} bileşeninin minörü M_{ij} olmak üzere

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det M_{ij}$$

sayısına a_{ij} bileşeninin *esçarpanı* denilir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

matrisinin bileşenleri için eşçarpanları bulalım:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 0 = 15 \Rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 15 \tag{2.12}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 5 = -8 \Rightarrow A_{13} = (-1)^{1+2} M_{12} = +8 \tag{2.13}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 25 = -25 \Rightarrow A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -25 \tag{2.14}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 0 = 9 \Rightarrow A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -9 \tag{2.15}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14 \Rightarrow A_{22} = (-1)^{2+2} M_{21} = -14 \tag{2.16}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15 \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} M_{21} = 15 \tag{2.17}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 = -17 \Rightarrow A_{31} = (-1)^{3+2} M_{31} = -17 \quad (2.18)$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \Rightarrow A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -6 \quad (2.19)$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13 \Rightarrow A_{31} = (-1)^{3+3} M_{31} = 13 \quad (2.20)$$

Buna göre eşçarpan matris

$$cof A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & -25 \\ -9 & -14 & 15 \\ -17 & -6 & 13 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

olur.

2.6 Ekli Matris

Adjoint Matrix

A matrisinnin her bir a_{ij} bileşeni yerine a_{ij} bileşeninin eşçarpanı (cofactor) konularak elde edilen matrise A matrisisnin eklenmişi (adjoint) denilir ve $adj A$ simgesiyle gösterilir. Buna göre

$$(adj A)_{ij} = A_{ij} \quad (2.22)$$

olur. Bu gösterimler altında

$$A.(adj A)_{ij} = B \quad (2.23)$$

diyelim. Çarpma kuralı

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (adj A)_{kj} \quad (2.24)$$

bağıntısını verişr. Burada (2.22) kullanılırsa,

$$(adj A)_{kj} = A_{jk} \quad (2.25)$$

çıkar. Bu ise () gereğince

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}|A| \qquad i = j \tag{2.26}$$

$$= 0 \qquad i \neq j \tag{2.27}$$

olmasını gerektirir. O halde B matrisi bütün bileşenleri $|A|$ olan köşegen bir matristir. Öyleyse

$$A.(adjA)_{ij} = B = |A|.I \tag{2.28}$$

eşitliği yazılabilir.

2.7 Matrisin Tersi

A matrisi için

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \tag{2.29}$$

koşulunu sağlayan A^{-1} matrisi A matrisinin tersidir. (2.29) eşitliğinin sol yanının olabilmesi için A nın satır sayısı I birim matrisinin satır sayısına eşit olmalıdır. Sağ yanının olabilmesi için I birim matrisinin satır sayısı A^{-1} ters matrisinin satır sayısına eşit olmalıdır. Soldaki çarpımların olabilmesi için A matrisinin kolon sayısı ile A^{-1} ters matrisinin satır sayısı eşit olmalıdır. Soldaki çarpımların olabilmesi için A^{-1} ters matrisinin kolon sayısı ile A matrisinin satır sayısı eşit olmalıdır. Bütün bunlardan A ile A^{-1} ters matrisinin aynı tipten karesel matris olmaları gerektiği çıkar.

Matrisleri lineer cebirde

$$AX = B \tag{2.30}$$

biçemindeki denklemleri çözmek için kullanırız. A matrisinin A^{-1} ters matrisi varsa, (2.30) denkleminin çözümü

$$AX = B \tag{2.31}$$

biçemine döner. Dolayısıyla, karesel matrislerin tersini bulma eylemi önem kazanır. Aşağıda ters matris bulmak için en genel kuramsal yöntemi vereceğiz. Hemen belirtelim ki, bu genel kural pratikte en iyi yöntem değildir. Örneğin,

17×17 tipinden bir matrisin tersini bulmak için yapılacak çarpma işlemlerinin sayısı

$$n! + (n-1)!n^2 = (n+1)! = 18! \tag{2.32}$$

tanedir. Saniyede 10^{-6} çarpma işlemi yapabilen hızlı bir bilgisayarın söylenen bütün çarpımları bitirebilmesi için 6.4×10^{15} saniye gereklidir. Bu ise 200 yıldan daha uzun bir zaman demektir.

O nedenle, matrisin tersini bulurken, biraz sonra anlatacağımız genel yöntem yerine *Gauss-Jordan* yoketme yöntemi daha pratiktir.

Teorem 2.8. *$AX = B$ doğrusal denkleminin $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ çözüm kümesi,*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad , \ldots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, \tag{2.33}$$

dır.

Örnek 2.1.

Aşağıdaki üç düzlemin kesişim noktasını bulunuz.

$$x + y + 2z = 1 \tag{2.34}$$

$$3x + 6y - z = 0 \tag{2.35}$$

$$x - y - 4z = 3 \tag{2.36}$$

Çözüm: İstenen kesişim noktası bu üç doğrusal denklemin çözümüdür. Sistemin katsayılarından oluşan katsayılar determinantı,

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 32$$

dir. Buradan

$$x = \frac{1}{-32} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-64}{-32} = 2$$

$$y = \frac{1}{-32} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{32}{-32} = -1$$

$$z = \frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{0}{-32} = 0$$

bulunur. Öyleyse aranan kesişim noktası üç boyutlu uzayda $P(2,-1,0)$ noktasıdır.