Bölüm 16

Logaritma

Daha önce *üslü* ve *köklü* ifadeleri ve bunlarla yapılan işlemleri öğrendiniz.

Örneğin,

$$2^4 = 2.2.2.2$$
$$2^4 = 16$$

veya

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{4/4} = 2$$

buluruz. Bu örneklerdeki 2'ye **taban**, 4'e **üs (kuvvet),** 2^4e **üslü ifade** ve 16'ya üslü ifadenin **değeri** denir. Taban ve üs belli iken değeri bulma işlemine üssünü (kuvvetini) alma; değer ve üs belli iken tabanı bulma işlemine de *kök alma işlemi* demiştik.

Şimdi de taban ve değer belli iken *üssü (kuvveti) bulma* işlemini ele alacağız. Bunun için önce üstel fonksiyonu açıklayalım.

Üstel Fonksiyon

Üslü ifadelerde $p, q \in Q$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$a^p a^q = a^{p+q} \qquad (a^p)^q = a^{p.q} \qquad (a.b)^p = a^p.b^p$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad (\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p} \qquad (\frac{1}{a})^p = \frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

$$a \neq 0 \quad \text{için} \quad a^0 = 1$$

olduğunu anımsayınız.

Görüldüğü gibi pozitif bir sayının rasyonel üstlerini biliyoruz; ama irrasyonel üstlerini bilmiyoruz, yani $a^{\sqrt{3}}$ ya da a^{π} değerlerini şu ana kadar tanımlamış değiliz. Bu eksikliği gidermek için, herhangi bir $a(a \neq 1)$ pozitif gerçek sayısı için

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \qquad f(r) = a^r \tag{1}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun tanım bölgesinin $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ ye genişletilmesi gerekir. Bu genişlemenin nasıl yapıldığı konusu bu dersin kapsamı dışındadır. Ancak, sezgisel olarak apaçık olan şu özeliklerin sağlandığını söyleyebiliriz: (1) fonksiyonunun $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ ye olan doğal genişlemesi, her $a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ için

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad f(x) = a^x \tag{2}$$

biçiminde tanımlanır. Bu fonksiyon (1) fonksiyonunun sağladığı bütün özelikleri $\mathbb{R}$ üzerinde sağlar; yani $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1, b \neq 1$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özelikler vardır:

$$\begin{array}{ll} a^x.a^y = a^{x+y} & (a^x)^y = a^{xy} \\ (ab)^x = a^x b^x & \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \\ (\dfrac{a}{b})^x = \dfrac{a^x}{b^x} & (\dfrac{1}{a})^x = \dfrac{1}{a^x} = a^{-x} \end{array}$$

Genişleme fonksiyonunun geometrik yorumunu şöyle yapabiliriz: (1) fonksiyonunun grafiğinde analitik düzlemde irrasyonel apsislere karşılık gelen boşluklar vardır. (2) genişleme fonksiyonunun grafiği bu boşlukları duldurur ve ortaya sürekli düzgün bir eğri çıkar.

Bu şekilde tanımlanan (2) genişleme fonksiyonuna **üstel fonksiyon** denilir. Şimdi üstel fonksiyonun grafiğini düşünelim. $a > 1$ ise $f(x) = a^x$ fonksiyonunun değeri, x değişkeni arttıkça artar; x değişkeni azaldıkça azalır. $x = 0$ iken $a^x = a^0 = 1$ olur. Fonksiyonun değişim tablosu ve grafiği aşağıda gösterilmiştir.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$a > 1$ için $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği

Eğer $0 < a < 1$ ise, x değişkeni artarken, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun değeri azalır. Buna göre fonksiyonun değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibi olur.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	$+\infty$	1	0

$0 < a < 1$ için $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği

Örnek:

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki kurallar ile verilen fonksiyonlar birer üstel fonksiyondur. Bunların grafiklerini çizmeyi deneyiniz.

$$f x) = (\frac{1}{2})^x \qquad y = (\sqrt{7})^x \qquad h(x) = 10^x$$

Teorem: Üstel fonksiyon bire bir örten bir fonksiyondur.

İspat: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$ kuralı ile verilen üstel fonksiyon için şu özelikler sağlanır:

1. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ dir; yani fonksiyon bire birdir.

2. $\forall y \in \mathbb{R}^+$ için $y = a^x$ eşitliğini sağlayan bir tek $x \in \mathbb{R}$ sayısı vardır; yani fonksiyon örtendir.

O halde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$ fonksiyonu bire bir ve örtendir.

Logaritma Fonksiyonu

Üstel fonksiyon bire bir ve örten olduğundan, ters fonksiyonu vardır

Üstel fonksiyonunun ters fonksiyonuna **logaritma fonksiyonu** denilir.

Logaritma fonksiyonu,

$$f(x) = \log_a x \quad \text{veya} \quad y = \log_a x$$

simgelerinden birisiyle gösterilir.

Ters fonksiyon tanımına göre

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

olduğu apaçıktır.

$y = \log_a x$ fonksiyonunda $y \in \mathbb{R}$ **sayısına** $x \in \mathbb{R}^+$ **sayısının** a **tabanına göre logaritması** denir ve "y eşit a tabanına göre logaritma x" diye okunur.

Bundan sonra $\log_a x$ yazdığımızda, a'nın 1'den farklı pozitif bir gerçek sayı olduğu varsayılacaktır.

Örnekler:

1. 16'nın 2 tabanına göre logaritmasını bulalım.

$$\begin{aligned} \log_2 16 = y \quad &\Rightarrow \quad 2^y = 16 \\ &\Rightarrow \quad 2^y = 2^4 \\ &\Rightarrow \quad y = 4 \end{aligned}$$

bulunur.

2. 3 tabanına göre logaritması 4 olan sayıyı bulalım.

$$\begin{aligned} \log_3 x = 4 \quad &\Rightarrow \quad x = 3^4 \\ &\Rightarrow \quad x = 81 \end{aligned}$$

bulunur.

3. $\frac{1}{81}$ in 3 tabanına göre logaritmasını bulalım.

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{1}{81} = y \quad &\Rightarrow \quad \log_3 \frac{1}{3^4} = y \\ &\Rightarrow \quad \log_3 3^{-4} = y \\ &\Rightarrow \quad 3^{-4} = 3^y \\ &\Rightarrow \quad y = -4 \end{aligned}$$

bulunur.

4. 0,25'in hangi tabana göre logaritmasının -2 olduğunu bulalım.

$$\begin{aligned} \log_a 0,25 = -2 \quad &\Rightarrow \quad 0,25 = a^{-2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{4} = a^{-2} \\ &\Rightarrow \quad 2^{-2} = a^{-2} \\ &\Rightarrow \quad a = 2 \end{aligned}$$

bulunur.

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

Bir fonksiyon ile ters fonksiyonunun grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğunu biliyoruz. Bundan yararlanarak, $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini $y = a^x$ üstel fonksiyonunun grafiğinden kolayca elde edebiliriz.

1. Durum: $a > 1$ ise

2. Durum: $0 < a < 1$ ise

Onluk Logaritma Fonksiyonu

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna **onluk logaritma fonksiyonu** veya **bayağı logaritma fonksiyonu** denir ve kısaca, log biçiminde gösterilir; yani

$$\log_{10} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = y = \log_{10} x = \log x$$

tir. Herhangi bir karışıklığa meydan vermedikçe $\log_{10}$ yerine log kullanacağız.

Kullandığımız sayı sisteminin tabanının 10 olması, onluk logaritma fonksiyonuyla yapılan işlemleri kolaylaştırır.

10'un tamsayı kuvvetlerinin 10 tabanına göre logaritmalarını yazalım:

$$\log 10 = y \Rightarrow 10 = 10^y \Rightarrow y = 1,$$

$$\log \frac{1}{10} = y \Rightarrow 10^{-1} = 10^y \Rightarrow y = -1,$$

$$\log 100 = y \Rightarrow 10^2 = 10^y \Rightarrow y = 2,$$

$$\log \frac{1}{100} = y \Rightarrow 10^{-2} = 10^y \Rightarrow y = -2$$

Yukarıdaki verilere ait tabloyu hazırlayalım.

x	$\cdots$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	$\cdots$
$\log x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$

$y = 10^x$ ve $y = \log x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlem üzerinde çiziniz.

e **sayısı**: Yaklaşık bir değeri 2,71828182845 olan irrasyonel sayıdır. Bilimsel hesaplarda çok kullanılır. Birbirine denk değişik yollarla tanımlanabilir. Ancak bu tanımların ayrıntısına girmeyeceğiz.

Doğal Logaritma Fonksiyonu

Tabanı e olan logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denir ve ln biçiminde gösterilir; yani $\log_e = ln$ dir.

Buna göre,

$$\log_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = y = \log_e x = \ln x$$

olur.

Logaritma Fonksiyonunun Özelikleri

Teorem: 1'den farklı $\forall a \in \mathbb{R}^+$ sayısının a tabanına göre logaritması 1'dir; yani

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad \text{için} \quad \log_a a = 1$$

olur.

İspat:

$\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $a^1 = a$ olduğunu biliyoruz. O halde, logaritma fonksiyonu tanımından,

$$a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$$

çıkar.

Örnekler:

$$\log_5 5 = 1, \quad \log 10 = 1, \quad \ln e = 1$$

olduğu kolayca bulunur.

Teorem: 1'in her tabana göre logaritması sıfırdır; yani

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad \text{için} \quad \log_a 1 = 0$$

olur.

İspat: Tabanı sıfırdan farklı ve üssü sıfır olan sayıların 1'e eşit olduğunu biliyoruz. Öyleyse, logaritma fonksiyonu tanımından,

$$a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$$

bulunur.

Teorem:

Pozitif iki gerçek sayının çarpımının herhangi bir a tabanına göre logaritması, bu sayıların a tabanına göre logaritmaları toplamına eşittir; yani

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{için} \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

olur.

İspat:

$$\log_a x = p, \quad \log_a y = q$$

olsun. Buradan şunları yazabiliriz.

$$x = a^p, \quad y = a^q$$

$$x.y = a^p a^q$$

$$x.y = a^{p+q}$$

$$\log_a(xy) = p + q$$

p ve q yerine değerlerini yazarsak,

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

bulunur.

Örnekler:

1. $\log 400 = \log 16.25 = \log 16 + \log 25$

2. $\ln 7.11 = \ln 7 + \ln 11$

3. $\log_{\sqrt{7}} 17.8 = \log_{\sqrt{7}} 17 + \log_{\sqrt{7}} 8$

4. $\log 25 + \log 40 = \log(25.40) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$

5. $\log_3(2x-1) + \log_3 5 = \log_3 25$ olduğuna göre x'in değerini bulalım.

$$\begin{aligned} \log_3(2x-1) + \log_3 5 = \log_3 25 \quad &\Rightarrow \quad \log_3[[2x-1).5] = \log_3 25 \\ &\Rightarrow \quad (2x-1)5 = 25 \\ &\Rightarrow \quad 10x - 5 = 25 \\ &\Rightarrow \quad x = 3 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem:

Her $t \in \mathbb{R}$ ve her $x \in \mathbb{R}^a$ için

$$\log_a x^t = t \log_a x$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$u = \log_a x^t$ ve $v = t \log_a x$ diyelim. Birinci eşitlik $x^t = a^u$ eşitliğine denktir. İkinci eşitlik ise

$$\frac{v}{t} = \log_a x$$

biçiminde yazılabilir ki bu da

$$x = a^{v/t} \Leftrightarrow x^t = a^v$$

demektir. Öyleyse

$$a^u = a^v$$

olmalıdır. Bunun olabilmesi için de

$$u = v,$$

yani

$$\log_a x^t = t \log_a x$$

olmalıdır.

Özel olarak $m, n, p \in \mathbb{N}$ ve $(m \neq 0)$ ise

1. $\log_a x^n = n \log_a x$
2. $\log_a \frac{1}{x^n} = \log_a x^{-n} = -n \log_a x$
3. $\log_a \sqrt[m]{x^p} = \log_a x^{\frac{p}{m}} = \frac{p}{m} \log_a x$ olduğu görülür.

Örnekler:

1. $\frac{1}{x}$'in a tabanına göre logaritmasını bulalım.

$$\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$$

olur.

2. $\log \sqrt[3]{\frac{1}{10^8}}$ nin değerini bulalım.

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{\sqrt[3]{10^8}} = \log \frac{1}{10^{8/3}} &= \log 10^{-8/3} \\ &= -\frac{8}{3} \log 10 \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem:

Pozitif iki gerçek sayının bölümünün a tabanına göre logaritması; aynı tabana göre bölünenin logaritması ile bölenin logaritmasının farkına eşittir; yani

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$\log_a x = u$ ve $\log_a y = v$ olsun.

$$
\left.\begin{array}{l} x = a^u \\ y = a^v \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{x}{y} = a^{u-v} \quad \text{"logaritma tanımından"} \\
&\Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = u - v \quad \text{"u ve v'nin değerlerini yazalım"} \\
&\Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnekler:

1.

$$
\begin{aligned}
\log_7 \sqrt{343} - \log_7 \sqrt{7} &= \log_7 \frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}} \\
&= \log_7 \sqrt{\frac{343}{7}} \\
&= \log_7 \sqrt{49} \\
&= \log_7 7 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

bulunur.

2. $f(x) = \log_5 x$ ise $f(\frac{5}{x^2}) + 2f(x)$ ifadesinin değerini bulalım.

$$
\begin{aligned}
f(\frac{5}{x^2}) + 2f(x) &= \log_5(\frac{5}{x^2}) + 2\log_5 x \\
&= \log_5 5 - \log_5 x^2 + 2\log_5 x \\
&= 1 - 2\log_5 x + 2\log_5 x \\
&= 1
\end{aligned}
$$

bulunur.

3. $\log \frac{y^2\sqrt{z^3}}{x^4}$'ü x, y ve z nin logaritmaları türünden bulalım.

$$\begin{aligned}\log \frac{y^2\sqrt{z^3}}{x^4} &= \log y^2\sqrt{z^3} - \log x^4 \\ &= \log y^2 + \log z^{3/2} - \log x^4 \\ &= 2\log y + \frac{3}{2}\log z - 4\log x\end{aligned}$$

bulunur.

4. $\frac{1}{2}\log a - \log\sqrt{a\cdot b} + \log b$ ifadesini sadeleştirelim.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log a - \log\sqrt{ab} + \log b &= \log a^{1/2} - \log a^{1/2}b^{1/2} + \log b \\ &= \log \frac{a^{1/2}}{a^{1/2}b^{1/2}} + \log b \\ &= \log \frac{1}{b^{1/2}} + \log b \\ &= \log \frac{1}{b^{1/2}}.b \\ &= \log b^{1-\frac{1}{2}} \\ &= \log\sqrt{b}\end{aligned}$$

bulunur.

Taban Değiştirme Kuralı

Teorem:

$a \neq 1, b \neq 1$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$\log_a b.\log_b c = \log_a c$$

dir.

İspat:

$\log_a b = x$ ve $\log_b c = y$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} a^x = b \Rightarrow (a^x)^y = b^y \\ b^y = c \end{array}\right\} \Rightarrow a^{xy} = c \Rightarrow xy = \log_a c$$

olur. x ve y yerine değerlerini yazarsak,

$$\log_a b.\log_b c = \log_a c$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

elde edilir. Bu eşitliğe taban **değiştirme kuralı** denir.

Örnekler:

1. $\log x = \log e \ln x$ olduğunu gösterelim.

$$\log e \ln x = \log_{10} e.\log_e x$$

eşitliğinde taban değiştirme kuralı uygulanırsa

$$\log e \ln x = \log x$$

bulunur.

2. $\ln x = \log x \ln 10$ olduğunu gösterelim:

$$\ln 10.\log x = \log_e 10.\log_{10} x$$

eşitliğinde taban değiştirme kuralı uygulanırsa

$$\ln 10.\log x = \log_e x$$

$$\ln 10.\log x = \ln x$$

bulunur.

3. $\log_a b.\log_b a = 1$ olduğunu gösterelim: Taban değiştirme kuralından

$$\log_a b.\log_b a = \log_a a$$

$$\log_a b \log_b a = 1$$

bulunur.

Teorem:

$a, x \in R^{+} - \{1\}$ olmak üzere, $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ dır.

İspat:

$\log_a x = y$ ve $\log_x a = z$ olsun. Logaritma fonksiyonunun tanımından yararlanılarak

$$\left.\begin{array}{l} x = a^y \\ a = x^z \end{array}\right\} \Rightarrow x = (x^z)^y \quad \begin{array}{ll} \Rightarrow & y.z = \log_x x = 1 \\ \Rightarrow & \log_a x.\log_x a = 1 \\ \Rightarrow & \log_a x = \dfrac{1}{\log_x a} \end{array}$$

eşitliği bulunur.

Örnek:

$\log_3 x = \log_x 3$ ise x'in değerini bulalım.

$$\begin{array}{lll} \log_3 x = \log_x 3 & \Rightarrow & \log_3 x = \dfrac{1}{\log_3 x} \\ & \Rightarrow & (\log_3 x)^2 = 1 \\ & \Rightarrow & \log_3 x = \pm 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 x = 1 \Rightarrow x_1 = 3 \\ \log_3 x = -1 \Rightarrow x_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

bulunur.

Teorem:

$a \in \mathbb{R}^{+} \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{R}^{+}$ ve $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ olmak üzere,

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

dir.

İspat:

$\log_{a^m} b^n = x$ olsun. Logaritma fonksiyonu tanımından yararlanarak,

$$\begin{aligned} b^n = (a^m)^x &\Rightarrow b^n = (a^x)^m \\ &\Rightarrow b = a^{x\frac{m}{n}} \\ &\Rightarrow x\frac{m}{n} = \log_a b \\ &\Rightarrow x = \frac{n}{m}\log_a b \\ &\Rightarrow \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b \end{aligned}$$

eşitliğini buluruz.

Örnekler:

1. $\log_{2^3} 4^5$ ifadesinin değerini bulalım.

$$\begin{aligned} \log_{2^3} 4^5 = \frac{5}{3}\log_2 4 &= \frac{5}{3}\log_2 2^2 \\ &= \frac{5}{3}.2 \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

2. $\log(x+5) = \log x + \log 6$ ise x'in değerini bulalım.

$$\begin{aligned} \log(x+5) &= \log x + \log 6 \\ \log(x+5) &= \log 6x \\ x+5 &= 6x \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki eşitlikleri logaritma kullanarak yazınız.

a) $2^4 = 16$ b) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ c) $0,005 = \frac{1}{200}$

d) $81^{\frac{1}{4}} = 3$ e) $3^{-5} = \frac{1}{343}$ f) $0,25 = \frac{1}{4}$

2. Aşağıda verilen eşitlikleri üslü biçimde yazınız.

a) $\log_2 16 = 4$ b) $\log_3 27 = 3$ c) $\log_{0,5} 0,25 = 2$
d) $\log_2 32 = 5$ e) $\log_3 \frac{1}{343} = -5$ f) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

3. Aşağıda verilen ifadelerin değerini bulunuz.

a) $\log_9 27$ b) $\log_8 \frac{1}{2}$ c) $\log_a a^7$ d) $\log_a a^{\sqrt{5}}$
e) $\log_{\sqrt{5}} 125$ f) $\log_a a^5$ g) $\log_3 3^{\sqrt{3}}$ h) $\log_a 1$
i) $\log_{\sqrt{2}} 32$ j) $\log^3 27$ k) $\sqrt{\log_3 9}$ l) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{1}$

4. Aşağıdaki ifadelerde x'i bulunuz.

a) $\log_3 x = 7$ b) $\log_5 x = 2$ c) $\log_{\frac{4}{9}} x = -\frac{2}{3}$

5. $\log_7[\log_3(\ln x)] = 0$ ise x'i bulunuz.

6. $f(x) = \log(x^2+16) - \log(x-4)$'ün tanımlı olması için x kaç olmalıdır?

7. $\log_5 a = 8$ olduğuna göre $x = \sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$'nın değeri nedir?

8. $6^{2\log_6 x} + 7^{\log_7 2x} - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

9. $a, b, c \in R^+$ olmak üzere aşağıda verilen ifadeleri a, b ve c'nin logaritmaları türünden hesaplayınız.

a) $\log \frac{a\sqrt[5]{c}}{b^2}$ b) $\log \frac{\sqrt{a}\sqrt[5]{b^2}}{c}$ c) $\log \frac{ab^2\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{abc}}$

10. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

a) $\log 9 + \log 5 + \log 16$ b) $\frac{1}{2}\log 4 + 3\log\sqrt[3]{7} - \log 10$

11. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt{y} = \log_x y$ olduğunu gösteriniz.

12. $f(x) = e^{2x} + 3$ ise $f^{-1}(x)$'i bulunuz.

LOGARİTMA FONKSİYONUNUN DEĞİŞİMİ

Logaritma fonksiyonunun grafiğini üstel fonksiyon yardımıyla çizmiştik. şimdi bu fonksiyonun ne zaman artan ve ne zaman azalan olduğunu araştıralım.

Teorem:

$a > 1$ için $f(x) = \log_a x$ artan bir fonksiyondur.

İspat:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{için}, \quad x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

önermesinin doğru olduğunu göstermek, teoremi ispatlamak için yeterlidir. $\log_a x_1 = u$ ve $\log_a x_2 = v$ olsun.

$$\log_a x_1 = u \Rightarrow x_1 = a^u$$

$$\log_a x_2 = v \Rightarrow x_2 = a^v$$

dir. Diğer taraftan, $a > 1$ olduğundan

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 > & x_2 & \Rightarrow & a^u > & a^v & \Rightarrow & u & > & v \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & \Rightarrow & \log_a x_1 & > & \log_a x_2 \end{array}$$

bulunur.

Teorem:

$0 < a < 1$ için $f(x) = \log_a x$ azalan bir fonksiyondur.

İspat:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{için}, \quad x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

önermesinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\log_a x_1 = u \quad \text{ve} \quad \log_a x_2 = v \quad \text{olsun.}$$

$$\log_a x_1 = u \Rightarrow x_1 = a^u$$

$$\log_a x_2 = v \Rightarrow x_2 = a^v$$

dir. Diğer taraftan $0 < a < 1$ olduğundan

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 > & x_2 & \Rightarrow & a^u > & a^v & \Rightarrow & u & < & v \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & \Rightarrow & \log_a x_1 & < & \log_a x_2 \end{array}$$

bulunur.

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

$y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonları birbirinin tersi olduğundan grafikleri de $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.
A) $a > 1$ için $y = a^x$ üstel fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için, tanımlı, artan ve $y \in \mathbb{R}^+$ dir.

$y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafiğini aynı analitik düzlemde çizelim. Yandaki grafiği dikkatle inceleyecek olursak, 1'den büyük sayıların logaritmaları pozitiftir.

$$a > 1 \quad \text{ve} \quad x > 1 \quad \text{için} \quad \log_a x > 0$$

1'in her tabana göre logaritması sıfırdır.

$$a > 1 \quad \text{için} \quad \log_a 1 = 0$$

0 ile 1 arasındaki sayıların logaritması negatiftir.

$$a > 1 \quad \text{ve} \quad 0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$$

a tabanına göre a'nın logaritması 1'dir.

$$x = a \quad \text{için} \quad \log_a a = 1$$

x sıfıra doğru küçülürken $\log_a x$ sınırsız olarak küçülür. Yani, Oy ekseni $\log_a x$' fonksiyonunun grafiğinin asimptotudur.

Logaritma fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan $\forall z \in \mathbb{R}^+$ için $y = \log_a z$ olacak biçimde bir tek $y \in \mathbb{R}$ vardır. Yani, $\log_a x$ in grafiği $y = z$ doğrusunu yalnız bir noktada keser.

B) $0 < a < 1$ için $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Yandaki grafiği dikkatle inceleyecek olursak, 0 ile 1 arasındaki sayıların logaritmaları pozitiftir.

$$0 < a < 1 \quad \text{ve} \quad 0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$$

1'in her tabana göre logaritması sıfırdır.

$$0 < a < 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$$

1'den büyük sayıların logaritmaları negatiftir.

$$0 < a < 1 \quad \text{ve} \quad x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$$

a tabanına göre, a'nın logaritması 1'dir.

$$0 < a < 1 \quad \text{için} \quad \log_a a = 1$$

x sıfıra doğru küçülürken $\log_a x$ sınırsız olarak büyür. Yani, Oy ekseni $\log_a x$ fonksiyonunun grafiğinin asimptotudur.

Logaritma fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan $\forall z \in \mathbb{R}^+$ için $y = \log_a z$ olacak biçimde bir tek $y \in \mathbb{R}$ vardır. Yani, $y = z$ doğrusu $\log_a x$ fonksiyonunu yalnız bir noktada keser.

ALIŞTIRMALAR

1. $y = \log_3 x$ fonksiyonunun grafiğini analitik düzlemde çiziniz. Grafikten yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplandırınız.
a) Hangi sayıların logaritması pozitiftir.
b) Hangi sayıların logaritması sıfırdır.
c) Hangi sayıların logaritması negatiftir.
d) Hangi sayıların logaritması 1'dir.

2. $y = \log_{1/2} x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Grafikten yararlanarak 1.sorunun a, b, c ve d şıklarındaki soruları bu fonksiyon için cevaplayınız.

3. Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = \log_3(x-2)$ b) $y = \log_{1/2}(x-2)$

4. Grafiği aşağıdaki şekilde verilen fonksiyonu yazınız.

5. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdadır. $f(9)$'un değerini bulunuz.

6. $[0,\pi]$ aralığında $y = \log(\cos x)$'in tanım kümesini bulunuz.

7. $y = \log(x-5)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

ONLUK LOGARİTMA

Onluk logaritmalar bazı hesaplamaları yapmakta kolaylık sağladığı için 1'den 10.000'e kadar olan gerçek sayılara ait logaritma cetvelleri hazırlanmıştır. Bu cetvellerin bazıları kesir kısmını 4, bazıları 5 ve bazıları da 7 basamağa kadar vermektedir.

Cetvellerdeki logaritmalar ileri matematiksel yöntemlerde yapılan hesaplamalar sonucu elde edilmiş yaklaşık değerlerdir.

Bu bölümde, sayıların logaritmalarını bulmak için logaritma tablosunun nasıl kullanılacağını öğreneceğiz.

$$p \in \mathbb{R} \text{ için } \log 10^p = p.\log 10 = p.1 = p$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikten yararlanarak aşağıdaki sonuçları çıkarırız.
1. 10'un tamsayı kuvvetlerinin logaritması tamsayıdır.

Örnek:

$$\log 10^2 = 2, \qquad \log 10^3 = 3, \cdots$$

$$\log 10^{-2} = -2, \qquad \log 10^{-3} = -3, \cdots$$

Bu örnekleri çoğaltarak aşağıdaki tabloyu düzenleyelim:

x	$\cdots$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	$\cdots$
$\log x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$

2. 10'nun rasyonal bir kuvvetinin logaritması rasyonel sayıdır. Neden?

Örnek:

$$\log \sqrt[5]{1000} = \log \sqrt[5]{10^3} = \log 10^{3/5} = \frac{3}{5}$$

tir.

3. 10'un irrasyonel bir kuvvetinin logaritması irrasyonel bir sayıdır. Neden?

Örnek:

$$\log 10^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

dir. Her a sayısı

$$a = 10^k(s), \quad 1 \le s < 10, k \in \mathbf{Z}$$

biçiminde yazılabilir. Buna a sayısının bilimsel (üstel) yazılışı denilir.

Bu yazılışı kullanarak

$$\begin{aligned} \log a &= \log 10^k + \log s \\ &= k + \log s \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte k sayısına $\log a$'nın karakteristiği (giz değeri), $\log s$ sayısına da mantisi (onlu parçası) denilir.

Örnek:

$a = 649,2$ sayısının üstel yazılışı

$$649,2 = 10^2 \times 6,492$$

biçimindedir. Dolayısıyla, logaritma cetvelinden

$$\begin{aligned} \log(649,2) &= \log 10^2 + \log(6,492) \\ &= 2 + 0,81231 \end{aligned}$$

yazılabilir. Demek ki, $\log(649,2)$ sayısının karakteristiği 2, mantisi 0,81231 dir.

Teorem: Her a gerçek sayısının logaritmasının mantisi 1'den küçük pozitif bir sayıdır.

$$a = 10^k(s), \quad 1 \le s < 10, k \in \mathbf{Z}$$

biçiminde idi. log fonksiyonu artan bir fonksiyon; $\log 1 = 0$ ve $\log 10 = 1$ olduğundan

$$0 \le \log s < 1$$

olacağı açıktır.

Bir sayının logaritmasının karakteristiği bir tam sayıdır. 1'den küçük sayıların logaritmalarının karakteristikleri pozitif olmayan birer tam sayı; 1'den büyük sayılarınki ise birer doğal sayıdır.

1'den büyük sayıların logaritmaları

Onluk logaritma fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan;
a) Bir basamaklı sayıların logaritmaları 0 ile 1 arasındadır ve karakteristikleri 0'dır.

Bir basamaklı her x sayısının üstel biçimin $x = 10^0(x)$ tir. Dolayısıyla,

$$1 \leq x < 10 \Rightarrow 0 \leq \log x < 1$$

olur.

Örnek:

$$\log 2 = \log 10^0(2) = 0 + 30103$$

olur.

b) İki basamaklı sayıların logaritmaları 1 ile 2 arasındadır ve karakteristikleri 1'dir.

İki basamaklı her x sayısının üstel biçimi $x = 10^1(s)$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} 10 \leq x < 100 \quad &\Rightarrow \quad \log 10 \leq \log x < \log 10^2 \\ &\Rightarrow \quad 1 \leq \log 10^1(s) < 2 \\ &\Rightarrow \quad 1 \leq 1 + \log s < 2 \end{aligned}$$

dir.

Örnek:

$$\begin{aligned} \log 18 = \log 10^1(1,8) \quad &= \quad 1 + \log(1,8) \\ &= \quad 1 + 0,25527 \end{aligned}$$

dir.
c) Üç basamaklı sayıların logaritmaları 2 ile 3 arasındadır karakteristikleri 2'dir.

Üç basamaklı her x sayısının üstel biçimi $x = 10^2(s)$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} 100 \leq x < 1000 \quad &\Rightarrow \quad \log 10^2 \leq \log x < \log 10^3 \\ &\Rightarrow \quad 2 \leq \log 10^2(s) < 3 \\ &\Rightarrow \quad 2 \leq 2 + \log s < 3 \end{aligned}$$

olur.

Örnek:

$$\log 200 = \log 10^2(2) = 2 + 0,30103$$

d) Dört basamaklı sayıların logaritması 3 ile 4 arasında ve tam kısmı 3'tür.

$$1000 \leq x < 10.000 \Rightarrow 3 \leq \log x < 4$$

Örnek:

$$\log 1000 = 3$$

tür.

Yukarıdaki örnekler dikkatle incelenirse şu sonuç görülür: 1'den büyük bir gerçek sayının logaritmasının tam kısmı, bu sayının tam kısmındaki basamak sayısının bir eksiğine eşit olan tamsayıdır.

Örnekler:

1. Aşağıdaki sayıların logaritmalarının tam kısımlarını bulalım.

$$1,7234 \rightarrow \log 1,7234 = 0,\cdots \qquad 172,34 \rightarrow \log 172,34 = 2,\cdots$$

$$17,234 \rightarrow \log 17,234 = 1,\cdots \qquad 1723,4 \rightarrow \log 1723,4 = 3,\cdots$$

2. $\log 6570 = 3,81757$ olduğuna göre bu sayının onda, yüzde ve binde birinin (657; 65,7 ve 6,57'nin) logaritmalarını hesaplayalım.

$\log 6570 = 3,81757$ olduğuna göre,

$$\log \frac{6570}{10} = \log 6570 - \log 10 = 3,81757 - 1 = 2,81757$$

$$\log \frac{6570}{10^2} = \log 6570 - \log 10^2 = 3,81757 - 2 = 1,81757$$

$$\log \frac{6570}{10^3} = \log 6570 - \log 10^3 = 3,81757 - 3 = 0,81757$$

bulunur. Yukarıda örneklerde logaritmaların kesir kısımlarının aynı olduğunu görünüz. Logaritması alınan sayılarda ise rakamlar ve sıralanışı aynı, sadece virgülün yeri değişiyor. Yani sayıların her biri diğerlerinin 10,100 veya 1000 katı ya da 10'da 100'de veya 1000'de biridir.

Teorem:

Farklı iki sayının yazılışında rakamlar ve sıralanışı aynı fakat virgülün yeri farklı ise bu sayıların logaritmalarının farkı bir tamsayıdır.

İspat:

Farklı iki sayı x ile y ve m pozitif tamsayı olmak üzere,

$$x = 10^m y$$

olsun.

$$\begin{aligned}
x = 10^m y \quad &\Rightarrow \quad \log x = \log 10^m y \\
&\Rightarrow \quad \log x = \log 10^m + \log y \\
&\Rightarrow \quad \log x = m \log 10 + \log y \\
&\Rightarrow \quad \log x - \log y = m \log 10 \\
&\Rightarrow \quad \log x - \log y = m
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek:

657 ve 6,57 sayılarının logaritmaları farkını bulalım.

$$\log 657 - \log 6,57 = 2,81757 - 0,81757$$

$$\log 657 - \log 6,57 = 2$$

bulunur.

1'den Küçük Pozitif Sayıların Logaritmaları

Eğer düzenleme yapılmasaydı,

$$\log 0,657 = \log \frac{657}{1000} = \log 657 - \log 10^3 = 2,81757 - 3$$

$$\log 0,657 = -0,18243$$

olacaktı. Ancak yapılan düzenlemeyle,

$$\log 0,657 = -1 + 0,81757 = \bar{1},81757$$

biçiminde yazılır. Dikkat ederseniz -1'in önündeki "-" işareti 1'in üzerine alınarak $\bar{1}$ biçimine çevrilmiştir. $\bar{1},81757$ yazılışında "-" işareti tam kısma aittir. Kesir kısmı daima pozitiftir.

Bu yazılışlarda logaritmanın tam ve kesir kısımları ayrı ayrı adlandırılır.

Örnekler:

1. $\log 657$ve $\log 0,657$ sayılarının karakteristiklerini ve mantislerini bulalım:

$$\begin{aligned}\log 657 &= 2,81757 = \underbrace{2}_{Karakteristik} + \underbrace{0,81757}_{Mantis} \\ \log 0,657 &= \bar{1},81757 = \overbrace{-1} + \overbrace{0,81757}\end{aligned}$$

2. $\log 6,57 = 0,81757$ olduğuna göre aşağıdaki sayıların logaritmalarını bulalım:

   a) $0,657$ b) $0,0657$ c) $0,00657$

   Çözümler:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log 0,657 & = \log \frac{6,57}{10} & = \log 6,57 - \log 10 \\ & = 0,81757 - 1 & = \bar{1},81757 \\ \text{b) } \log 0,0657 & = \log \frac{6,57}{10^2} & = \log 6,57 - \log 10^2 \\ & = 0,81757 - 2 & = \bar{2},81757 \\ \text{c) } \log 0,00657 & = \log \frac{6,57}{10^3} & = \log 6,57 - \log 10^3 \\ & = 0,81757 - 3 & = \bar{3},81757 \end{array}$$

   bulunur.

Yukarıda logaritması alınan sayılarda, ondalık virgülünün sağındaki sıfırların sayısıyla, logaritmaların karekteristikleri arasındaki ilişkiyi bulmaya çalışınız.

0 ile 1 arasındaki bir sayının logaritmasının karekteristiği, bu sayının ondalık virgülünün sağında, sıfırdan farklı ilk rakama kadar olan sıfırların sayısından bir fazlasının negatif işaretlisidir.

Örnek:

Aşağıda verilen, birden küçük pozitif sayıların logaritmalarının karekteristiklerini bulalım:

a) 0,0040 b) 0,05100 c) 0,00051 d) 0,10001

a. $\log \underbrace{0,00}_{3\ tane}40 = \bar{3},\ldots$ ve karekteristiği -3,

b. $\log \underbrace{0,0}_{2\ tane}5100 = \bar{2},\ldots$ ve karekteristiği -2,

c. $\log \underbrace{0,000}_{4\ tane}51 = \bar{4},\ldots$ ve karekteristiği -4,

d. $\log \underbrace{0,}_{1\ tane}10001 = \bar{1},\ldots$ ve karekteristiği -1 olur.

LOGARİTMA CETVELLERİNİN KULLANILMASI

Pozitif bir gerçek sayının logaritması, karekteristik ve mantis olmak üzere iki kısımdan oluşuyordu. Bir sayı verildiğinde logaritmasının tam kısmını; yani karekteristiğini kolayca bulabiliriz. Ancak kesir kısmını yani mantisini kolayca hesaplayıp yazamayız. Bunun için düzenlenmiş logaritma cetvellerinden yararlanırız.

Bir sonraki sayfadaki logaritma cetvelini inceleyiniz. Bu logaritma cetvelinin mantisleri (kesir kısmı) 5 basamaklıdır. Cetvellerde mantis kısmı için virgül kullanılmaz ve karekteristikler verilmez. Bunları doğru olarak belirlemek kullanıcıya düşer.

Cetvelden iki türlü yararlanırız:

Verilen Bir Sayının Logaritmasının Bulunması

Önce verilen sayının, ondalık virgülünü de dikkate alarak, logaritmasının karekteristiğini, yukarıda anlatılan yöntemle bulup yazdıktan sonra sağına bir virgül koyarız. Sonra virgülü dikkate almadan, sayıyı cetvelin *S* sütunundan bulup karşılığı olan mantisi virgülün sağına yazarız. Kitabımızdaki cetvelde sayının üç basamağı *S* sütununda; varsa 4'üncü basamak öteki sütunlardan birisindedir.

Örnekler:

1. $\log 6789$ sayısını bulalım.

   Logaritması alınan sayının tam kısmı 4 basamaklı olduğundan logaritmanın karekteristiği 3'tür.

   $$\log 6789 = 3,\dots$$

   Şimdi logaritmanın mantisini cetvelden okuyalım. 678'i *S* sütunundan bulup buna karşılık gelen 0 sütunundan 5 basamaklı mantisin ilk iki basamağı olan 83 'ü okuruz. Sonra 6789 un son basamağındaki 9'u kendi sütunundan bulup, 678 in bulunduğu satır ile 9 un bulunduğu sütununun kesim noktasında yer alan mantisin son üç basamağı olan 181 i okuruz: Aranan logaritma

   $$\log 6789 = 3,83181$$

   olacaktır.

Şekil 16.1: Logaritma cetvelinden örnek bir sayfa

2. $\log 69,98$'i bulalım.

   Sayının tam kısmı 2 basamaklı olduğundan,

   $$\log 69,98 = 1,\ldots$$

   olur. 6998 sayısının mantisini cetvelden okursak 84497 olduğunu görürüz. O halde,

   $$\log 69,98 = 1,84497$$

   bulunur.

3. $\log 0,0068$'i bulalım.

   Sayıda virgülün sağında sıfırdan farklı ilk rakama kadar olan sıfır sayısı 2 olduğundan, logaritmanın karekteristiği -3'tür. Mantise gelince, S sütununda 68 olmadığı için 680'in mantisini (68'in mantisi ile aynıdır) okuruz. Bu da 83251'dir.

   Karekteristik ve mantisi yerine yazarak,

   $$\log 0,0068 = \overline{3},83251$$

   bulunur.

Logaritma Cetvelinde Olmayan Sayıların Logaritmaları

Küçük aralıklarda logaritma eğrisine, eğrinin iki ucunu birleştiren doğru parçası ile yaklaşabiliriz. Bu yaklaşıma doğrusal yaklaşım denilir ve teknik hesaplamalarda çok kullanılır.

$[a,b]$ aralığındaki logaritma eğrisi şekilde görüldüğü gibi olsun. AB doğru parçasını çizelim. $a < c < b$ olmak üzere a ve b sayılarının logaritma cetvelinde yer aldığını; ama c sayısının cetvelde olmadığını varsayalım. Apsisi a,b,c olan noktalardan $Ox-$eksenine çıkılan dikmeler eğriyi, sırasıyla, A,B,C noktalarında kesiyor olsun. Ayrıca C den geçen dikme AB doğrusunu D noktasında, AH doğrusunu da E noktasında kessin.

Bulmak istediğimiz $\log c$ sayısının gerçek değeri C noktasının ordinatına eşittir. Bu değer tabloda olmadığı zaman, onun yerine D noktasının ordinatını yaklaşık değer olarak koyacağız. $[a,b]$ aralığı çok küçük olduğunda, bu yaklaşımı yapmakla yapılan hata çok küçük olacaktır.

Şimdi $x = \mid DE \mid$ uzunluğunu hesaplayalım. AED ve AHB dik üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{c-a}{x} = \frac{b-a}{\log b - \log a}$$

orantısı yazılabilir. Buradan x bilinmeyeni çözülürse

$$x = (\log b - \log a)\frac{c-a}{b-a}$$

bulunur. Öyleyse,

$$\log c \simeq \log a + x$$

yaklaşım formülünü elde ederiz.

Örnek:

$\log 67614$ sayısını bulalım:

Cetvelde bu sayı mevcut değildir. O halde cetvelde varolan ve bu sayıdan ilk küçük ve ilk büyük olan iki sayıyı saptayıp; logaritmalarını okumalıyız. Birler basamağı 0 olan 67610 ve 67620 sayıları istediğimiz iki sayıdır. Bunların logaritmalarını cetvelden yazıp uygun orantıyı kurarsak, istenen logaritmanın yaklaşık değerini bulabiliriz.

$$\left.\begin{array}{l}\log 67610 = 4,83001 \\ \log 67620 = 4,83008\end{array}\right\} \Rightarrow F = 0,00007$$

bulunur.

"001" sayısının üstündeki yıldız, mantisin ilk iki basamağının, tabloda bir sonraki değere eşit olduğunu gösterir; yani tablodaki 82 değil, 83 sayısı alınacaktır.

Logaritma fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan

$$\log 67610 < \log 67614 < \log 67620$$

eşitsizliği vardır. $\log 67614$ ile $\log 67610$ arasındaki fark 0,00007'nin $\frac{4}{10}$'u kadar olacağından,

$$0,00007 \times \frac{4}{10} = 0,000028$$

$$\log 67614 = 4,83001 + 0,000028$$

$$\log 67614 = 4,830038$$

bulunur.

Bu tür örneklerde fark hesaplarını yapmaktan kurtulmanın bir yolu vardır. Logaritma tablolarında, her sayfaya, o sayfadaki sayılar ve mantisler arasında oluşabilecek farkları gösteren cetvelcikler yerleştirilmiştir. Bu cetvelcikler yardımıyla, orantı için gerekli değerler pratik olarak hesaplanır.

Örnek: $\log 0,66123$ değerini hesaplayalım:

66123 sayısı cetvelde yoktur. Bunun bir alt ve bir üstündeki sayılar 66120 ve 66130 dur.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0,66120 = \overline{1},82033\\ \log 0,66130 = \overline{1},82040\end{array}\right\} \Rightarrow F = 0,00007$$

dir. 3 sayısının karşılığı olan mantis (F) cetvelciğinde 2,1'dir. Sayılar arasındaki gerçek farkın 3 değil, 0,00003 olduğu düşünülürse, buna karşılık gelen mantisin de 0,000021 olacağı ortaya çıkar. Dolayısıyla,

$$\begin{array}{rcl}\log 66120 & = & \overline{1},82033\\ 0,00003\text{fark} & \longrightarrow & 0,000021\end{array}$$

$$\log 66123 = \overline{1},820351$$

bulunur.

Logaritması Verilen Bir Sayının Bulunması

$\log x = y$ ise x sayısına y sayısının *antilogaritması* denilir. Başka bir deyişle, antilogaritma, logaritma fonksiyonunun ters fonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$y = \log x \Longleftrightarrow x = 10^y$$

eşitliğinden yararlanabiliriz. Antilogaritmayı bulmak demek, y logaritması biliniyorken, x sayısını bulmak demektir. Bu iş için gene logaritma cetvelinden yararlanacağız.

Verilen bir logaritmanın antilogaritmasını bulmak için, önce sayının tamsayı kısmının kaç basamaktan oluştuğu saptanır. Bu saptama, logaritmanın bilinen kurallarından kolayca yapılır. Sonra, varsa, verilen mantis cetvelden bulunur. Onun karşısına gelen sayı seçilir ve ondalık virgülünün yeri işaretlenir. Eğer verilen logaritma cetvelde yoksa, mantisin bir küçüğü ile bir büyüğü seçilir; doğrusal yaklaşımla istenen antilogaritma bulunur. Verilen karekteristik dikkate alınarak antilogaritmanın ondalık virgülünün yeri belirlenir.

Örnekler:

1. $\log x = 4,81994$ ise x'i bulalım.

   Verilen logaritmanın karakteristiği 4 olduğuna göre x'in tam kısmının basamak sayısı 5'tir.

   Şimdi, verilen logaritmanın mantisinin ilk iki basamağı olan 81 i cetvelden bulalım. Onu bulduktan sonra, mantisin son üç basamağı olan 994 ü arayalım. Verilen mantis cetvelde aynen vardır.Cetvelde buna karşılık gelen sayı aranan antilogaritmadır. Bu sayının, soldan sağa doğru ilk dört basamağı 6606'dır. Halbuki, verilen karekteristiğe göre antilogaritmanın tam kısmı 5 basamaklı olmalıdır. Ohalde, bu sayının sonuna bir 0 ilave ederek,

   $$\log x = 4,81994 \Rightarrow x = 66060$$

   yazabiliriz.

2. $\log x = \overline{2},84308$ ise x sayısını bulalım:

   Cetvelde 84305 mantisinin karşılığı olan sayı 6967 dir.

   Verilen logaritmanın karekteristiği $\overline{2}$ olduğundan, antilogaritmada ondalık virgülün sağında bir tane 0 varolacaktır; yani

   $$\log x = \overline{2},84308 \Rightarrow x = 0,06967$$

   dir.

3. $\log x = 2,84308$ ise x'i bulalım:

   Verilen logaritmanın mantisi cetvelde yoktur. Verilen mantise en yakın iki mantis 84305 ve 84311 ile bunlara karşılık gelen ve karekteristiği 2 olan sayılar sırasıyla 696,7 ve 696,8'dir.

   $$\left.\begin{array}{l}\log 696,7 = 2,84305\\ \log 696,8 = 2,84311\end{array}\right\} \Rightarrow F = 0,00006$$

   den

   $$\left.\begin{array}{l}\log 696,7 = 2,84305\\ \log x = 2,84308\end{array}\right\} \Rightarrow F = 0,00003$$

   yazılabilir.

Mantis 0,00006 fark ettiğinde logaritma $0,1$ fark ederse
mantis 0,00003 fark ettiğinde logaritma $0,1 \times \frac{3}{6}$ fark eder.

O halde,

$$\begin{aligned} x &= 696,7 + 0,1 \times \frac{3}{6} \\ x &= 696,7 + 0,05 \\ x &= 696,75 \end{aligned}$$

bulunur.

KOLOGARİTMA

$x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\frac{1}{x}$ gerçek sayısının logaritmasına x'in kologaritması denir ve $co \log x$ biçiminde gösterilir.

Teorem: $\forall x \in R^+$ için $\mathrm{co}\log x = -\log x$ tir.

İspat: Tanıma göre,

$$\begin{aligned} \mathrm{co}\log x &= \log \frac{1}{x} = \log 1 - \log x = 0 - \log x \\ \mathrm{co}\log x &= -\log x \end{aligned}$$

olur.

Örnek:

$\log x = 3,81352$ ise $\mathrm{co}\log x$'i hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \mathrm{co}\log x = -\log x &= -3,81358 \\ &= -3 + (-0,81358) \\ &= -3 + (-1 + 1) + (-0,81358) \\ &= -4 + 0,18642 \\ &= \overline{4},18642 \end{aligned}$$

Onluk Logaritma ile ilgili Uygulamalar

Logaritma kullanılarak çarpma, bölme, üs ya da kök alma işlemlerini içeren ağır hesaplar kolayca yapılabilir.

Örnekler:

1. $\log x = 2.83251, \log y = 0,82930$ olduğuna göre logaritma cetveli yardımıyla x, y ve $x.y$ sayılarını bulalım.

   Logaritma cetvelinden,

   $$\log x = 2,83251 \Rightarrow x = 680$$

   $$\log y = 0,82930 \Rightarrow y = 6,75$$

   bulunur. Çarpımın logaritması, çarpanların logaritması toplamı olduğundan,

   $$\log x.y = \log x + \log y = 2,83251 + 0,82930 = 3,66181$$

   bulunur. Herhangi bir logaritma cetvelinden mantisi 66181 olan sayı hesaplanabilir ve

   $$\log x.y = 3,66181 \Rightarrow x.y = 4590$$

   bulunur.

2. $x = \frac{651,2}{69,8}$ sayısını hesaplayalım.

   $x = \frac{651,2}{69,8}$ eşitliğinin her iki tarafının logaritmasını alalım:

   $$\begin{aligned} \log x = \log \frac{651,2}{69,8} \quad \Rightarrow \quad & \log x = \log 651,2 - \log 69,8 \\ & \Rightarrow \log x = 2,81371 - 1,84386 \\ & \Rightarrow \log x = 0,96985 \end{aligned}$$

   Logaritması 0,96985 olan sayı cetvelden,

   $$x = 9,3292$$

   olarak bulunur.

3. $\sqrt[5]{6,81}$ sayısını hesaplayalım:

$x = \sqrt[5]{6,81}$ eşitliğinin her iki tarafının logaritmasını alırsak,

$$\begin{aligned}
\log x &= \log \sqrt[5]{6,81} \\
\log x &= \log(6,81)^{1/5} \\
\log x &= \frac{1}{5}\log(6,81) \\
\log x &= \frac{1}{5}(0,83315) \\
\log x &= 0,16663
\end{aligned}$$

bulunur. Logaritması 0,16663 olan sayıyının

$$x = 1,4678$$

olduğu, herhangi bir logaritma cetvelinden kolayca görülür.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki sayıların logaritmalarının karekteristiklerini bulunuz.
   a) 0,00105 b) 0,10303
   c) 12,01032 d) 120,10010
2. $\log x = 3,81291$ ve $\log y = \overline{2},81291$ olduğuna göre,
   a) $10^m < x < 10^{m+1}$ eşitsizliğini sağlayan m sayısını,
   b) $10^n < y < 10^{n+1}$ eşitsizliğini sağlayan n sayısını,
   c) x'in y'nin kaç katı olduğunu bulunuz.
3. Logaritma cetvelinde aynen bulunmayan,
   a) 65125 sayısının logaritmasını,
   b) Logaritması 0,83062 olan sayıyı

   bulunuz.
4. Aşağıda verilen eşitliklerdeki bilinmeyenleri bulunuz.
   a) $\log x = 2,82995$ b) $\log y = 1,84036$
   c) $\log u = 0,82079$ d) $\log v = 0,08221$
5. Aşağıda verilen kologaritmaları bulunuz.
   a) $\operatorname{colog} 6,812$ b) $\operatorname{colog} 0,661$

6. Alanı $147cm^2$ olan dairenin yarıçap uzunluğunu logaritma yardımıyla bulunuz.

7. $\log_2 3 = x, \log_3 5 = y$ ve $\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}} 3 = z$ olduğuna göre x, y ve z'yi büyüklük sırasına koyunuz.

8. $\log_{\sqrt[3]{3}} a$ ve $a = \frac{1}{\sqrt[5]{27}}$ ise a'yi bulalım.

9. $\log\frac{1}{2} = x$ ve $\log 3 = y$ ise $\log\frac{27}{4}$'ü x ve y cinsinden bulunuz.

10. $\sqrt[3]{(\log_{1/2} 4)^2 + \log_{\sqrt{3}} 9}$ ifadesi neye eşittir?

11. $log1300 = 3,11394$ ise $\log\sqrt[3]{169}$'u bulunuz.

12. $\log_5(\ln x) = \log_{\frac{1}{15}} e^2$ eşitliğini sağlayan x'i e cinsinden bulunuz.

13. $\frac{\log a}{\log_{0,0001} a}$ ifadesinin değerini bulunuz.

14. $f(x) = \log_2 x$ ve $g(x) = 8^x$ için $(f \circ g^{-1})(x) = 3$ ise x'i bulunuz.

15. $f(x) = \log_2(x+1)$ ve $g(x) = 2^x$ için $(g \circ f^{-1})(2)$'yi bulunuz.

16. $\log_{\sqrt[3]{0,5}} a = \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} . \log_{\frac{1}{8}} y . \log_{\sqrt{y}} 0,5$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÜSLÜ DENKLEMLER

$2x+1=0, x^2+2x+1=0\ldots$ gibi eşitliklere denklem denildiğini biliyoruz.

$2^{x+1}=1, 3^{x^2-x}=9,\ldots$ da olduğu gibi üssünde bilinmeyen eşitlikler için ne söyleyebiliriz?

İçinde bilinmeyenin üs olarak bulunduğu denklemlere **üslü denklemler** ve denklemleri doğrulayan (sağlayan) gerçek sayıların kümesine de bu denklemin **çözüm kümesi** denilir.

Örnekler:

1. $2^{x+1}=2$ denklemini çözelim:

$$\begin{aligned} 2^{x+1}=1 \quad &\Rightarrow \quad 2^{x+1}=2^0 \\ &\quad\quad \text{"üstel fonksiyonlar bire bir olduğundan"} \\ &\Rightarrow \quad x+1=0 \\ &\Rightarrow \quad x=-1 \\ &\Rightarrow \quad Ç=\{-1\} \end{aligned}$$

bulunur.

2. $3^{x^2-x}=9$ denklemini çözelim.

$$\begin{aligned} 3^{x^2-x}=8 \quad &\Rightarrow \quad 3^{x^2-x}=3^2 \\ &\Rightarrow \quad x^2-x=2 \\ &\Rightarrow \quad x^2-x-2=0 \\ &\Rightarrow \quad (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x_1=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x_2=2 \end{cases} \end{aligned}$$

$Ç=\{-1,2\}$

bulunur.

3. $e^{x-1}=1$ denklemini çözelim.

$$\begin{aligned} e^{x-1}=1 \quad &\Rightarrow \quad \ln e^{x-1}=\ln 1 \\ &\quad\quad \text{"eşitliğin iki yanının doğal logaritmasını alalım".} \\ &\Rightarrow \quad (x-1)\ln e=\ln 1 \\ &\Rightarrow \quad x-1=0 \\ &\Rightarrow \quad x=1 \\ &\quad\quad Ç=\{1\} \end{aligned}$$

bulunur.

4. $-4+3e^{-x}+e^{x}=\frac{-1}{e^{x}}$ denklemini çözelim.
$-4+3e^{-x}+e^{x}=\frac{-1}{e^{x}}$
Denkleminin her iki yanını e^{x} ile çarparsak,

$$
\begin{aligned}
-4+3e^{-x}+e^{x}=\frac{-1}{e^{x}} \quad &\Rightarrow \quad -4.e^{x}+3e^{-x}.e^{x}+e^{x}.e^{x}=\frac{-1}{e^{x}}.e^{x}\\
&\Rightarrow \quad -4e^{x}+3+e^{2x}=-1\\
&\Rightarrow \quad t^{2}-4t+4=0 \qquad "e^{x}=t"\\
&\Rightarrow \quad (t-2)^{2}=0\\
&\Rightarrow \quad t=2\\
&\Rightarrow \quad e^{x}=2\\
& \quad \text{"iki tarafın doğal logaritmasını alalım".}\\
&\Rightarrow \quad x\ln e=\ln 2\\
&\Rightarrow \quad x=\ln 2=0,30103\\
&\Rightarrow \quad Ç=\{\ln 2\} \quad \text{veya} \quad Ç=\{0,30103\}
\end{aligned}
$$

5. $(\frac{1}{5^{x}})^{x}=\frac{1}{625}$ denklemini çözelim:

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{5^{x}})^{x}=\frac{1}{625} \quad &\Rightarrow \quad (5^{-x})^{x}=5^{-4}\\
&\Rightarrow \quad 5^{-x^{2}}=5^{-4}\\
&\Rightarrow \quad x^{2}=4\\
&\Rightarrow \quad x=\pm 2\\
& \quad Ç=\{-2,+2\}
\end{aligned}
$$

bulunur.

LOGARİTMALI DENKLEMLER

Bir denklemin içinde bilinmeyenin logaritması varsa bu tür denklemlere logaritmalı denklem ve denklemi doğrulayan gerçek sayıların kümesine de denklemin çözüm kümesi denir.

Örnekler:

1. $\log_8 x = \frac{1}{3}$ denklemini aşağıdaki iki yolla çözebiliriz:

$$\begin{aligned}
\log_8 x = \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad \log_8 x = \frac{\log x}{\log 8} = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \quad \log x = \frac{1}{3}\log 8 \\
&\Rightarrow \quad \log x = \log 8^{1/3} \\
&= \quad x = \sqrt[3]{8} = 2 \\
& \qquad Ç = \{2\}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\log_8 x &= \frac{1}{3} \\
x &= 8^{1/3} \\
x &= \sqrt[3]{2^3} \\
x &= 2 \\
Ç &= \{2\}
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki yoldan da aynı sonuca ulaşılmaktadır.

2. $\log(x-1) + \log(x-2) = \log 2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}
\log(x-1) + \log(x-2) = \log 2 \quad &\Rightarrow \quad \log(x-1)(x-2) = \log 2 \\
&\Rightarrow \quad (x-1)(x-2) = 2 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 - 2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \\
&\Rightarrow \quad x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

olur. $x = 0$ denklemde logaritması alınan sayıları negatif yapacağından kök olamaz. O halde

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow Ç = \{3\}$$

elde edilir.

3. $\log_3(x^2 - 1) = \log_3(x-1) + 1$ denklemini çözelim.

$$
\begin{aligned}
\log_3(x^2-1) = \log_3(x-1)+1 \quad &\Rightarrow \quad \log_3(x^2-1)-\log_3(x-1) = 1\\
&\Rightarrow \quad \log_3 \frac{x^2-1}{x-1} = 1\\
&\Rightarrow \quad \log_3 \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 1\\
&\Rightarrow \quad \log_3(x+1) = 1\\
&\Rightarrow \quad \log_3(x+1) = \log_3 3\\
&\Rightarrow \quad x+1 = 3\\
&\Rightarrow \quad x = 2\\
&\qquad\;\; \text{Ç} = \{2\}
\end{aligned}
$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen denklemleri çözünüz.

   a) $2^{x^2-1} = 8$ b) $27^x = \sqrt{3}$
   c) $e^x + e^{-x} = 1$ d) $\log_5 x + \log_{25} 9 = 1$
   e) $\log x^2 - \log x = 1$ f) $\log_3 x + \log_3(x-8) = 2$

2. $\log_3 x.y = 4$

   $\log_3 \frac{x}{y} = 2$ ise x ve y'yi bulunuz.

3. $5^x - 4 = \frac{-3}{5^x}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

4. $\log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$ denklemini çözünüz.

5. Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninin alanı $\log_3 2x$ olabilmesi için x ne olmalıdır?

6. $(64)^x - 3.4^x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.