TIMUR KARAÇAY - HAYDAR EŞ

CALCULUS

SEÇKIN YAYINCILIK
ANKARA

Contents

1
Ön Bilgiler

Bu kitapta, matematiğin temeli olan mantık, kümeler, sayılar ve sonsuz kavramı sık sık kullanılacaktır. Ancak o kavramların anlatımı *calculus*'un içeriğinde değildir. Genellikle *Soyut Matematik* ya da *Soyut Cebir* derslerinde işlenen konulardır. O nedenle, sözü geçen kavramların çok kısa tanımlarını vererek onları kullanmaya başlayacağız. Bu konularda eksiklik duyanlar Soyut Matematik kitaplarına başvurabilirler.

1.1 Analiz Öğretimi

İki Milenyum Süren Sorunlar

[1]

[1] İki Milenyum

Türkçe'ye Genel Matematik adıyla yerleşen ve İngilizce'de *calculus* denilen matematik dersi *mantık, kümeler, sayılar, sıralama, sonsuz* ve *limit* kavramlarına dayalıdır.

Sonsuz küçük ve sonsuz büyük sayıların ortaya çıkışı beşinci işlem diye adlandırılam *limit* işlemini beraberinde getirdi. Bir zamanlar matematiği *ilkel* (elementary) ve *yüksek* (Higher) diye ikiye ayırmak moda idi. Bu ayrım çok basit bir şekilde yapılırdı. Yalnız dört işlemi içeren matematik ilkel matematik, ona beşinci işlem olarak *limit* eklendiğinde ortaya çıkan matematiğe de yüksek matematik denirdi.

Matematisel işlemlerin ve matematiksel yapıların çok büyük çoğunluğu sayılar üzerinde kuruludur. Sayılardan başka nesnelere yapılan genelleştirmelerde de sayıların özelikleri taklit edilir. Bu yöntemin ayakları yere sağlam basar. Yöntemin bize verdiği harikulade yapılar, yalnız matematik sanatında insan aklının yarattığı soyut güzellikleri ortaya koymakla kalmaz, bilimin, özellikle fiziğin gerekseme duyduğu araçları da üretir. Matematiğin bu yöndeki gelişimi insanın doğa olaylarına egemen olma savaşını kazanmasına neden oldu.

Calculus, başlangıçta *infinitesimal calculus* diye adlandırılırdı. İlgi alanları o zamanlar yeni olan *limit, fonksiyon, türev integral* ve *sonsuz seriler* idi. *Infinitesimal calculus*'un İngiliz matematikçi ve fizikçi Isaac Newton (4 Ocak 1643 - 31 Mart 1727) ve Alman matematilçi Gottfried Wilhelm Leibniz (1 Temmuz 1646 - 14 Kasım 1716) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak geliştirildiğini kabul edilir. 17.yüzyılda ortaya konan infinitesimal calculus (sonsuz küçükler ve sonsuz büyükler hesabı) doğa olaylarını açıklamakta etkin bir araç oldu.

Matemetik tarihine girmeden irrasyonel sayıların ortaya çıkışını anlatlamak eksiklik yaratır. Yine de konuya kısa bir dokunuş için şimdi kabul ettiğimiz tanımlara dayanacağız. a ve $b \neq 0$ tamsayılar olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen sayılara rasyonel, böyle yazılamayanlara da irrasyonel sayı diyoruz. Aslında irrasyonel terimi *hesaplanamayan oranlar* (immensurable ratio) adıyla ortaya çıktı. Çıkış yerlerine bakılınca insan aklının onu bağımsız olarak farklı coğrafyalarda yarattığı söylenebilir. Eski Yunan, İran, Hint, Çin uygarlıklarında hesaplanamayan oranlar hep insan aklını şu ya da bu şekilde meşgul etmiştir. Şimdi hesaplanamayan oranları kolayca ifade ediyoruz. Bir sayma sisteminde, örneğin on tabanlı sistemdeki yazılışlarında kesir basamakları sonsuza uzanıyor ve haneler tekrarlı değilse o tür sayılar irrasyonel sayıdır.

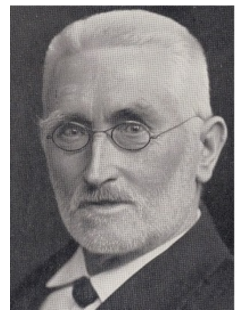
Figure 1.1: Wilhelm Richard Dedekind

İşin zor yanı şudur: aritmetiğin temeli olan dört işlemde kullandığımız yöntem, daima sayının sağdaki son basamağından başlar. Rasyonel sayılarda bunu kolayca yapıyoruz. Ama irrasyonel sayılarda, onlu açılımın sonsuz ve tekrarlanmayan hanesi var; sağda son basamağa erişilemez. Dolayısıyla, dört işlem yöntemlerimiz onlara uygulanamaz. Zaten *'hesaplanamayan oranlar* (incommensurable) sözü de bunu ifade ediyor olmalıdır.


Figure 1.2: Augustin-Louis Cauchy

Sayı ekseni üzerine rasyonel sayıları yerleştirdiğimiz zaman, irrasyonel sayılara karşılık gelen boşlukları yoketmek için geometrik yöntemler revaçta olsa bile, aritmetik yöntemlerle boşlukları yoketme çabası Fransız matematikçi Baron Augustin-Louis Cauchy (21 August 1789 - 23 May 1857), Alman matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (31 Ekim 1815 - 19 Şubat 1897), alman matematikçi Julius Wilhelm Richard Dedekind (6 Ekim 1831 - 12 Şubat 1916) ve kendi dönemlerinin ünlü öteki matematikçileri geometrik yollara dayalı yöntemleri aritmetik yöntemlere çevirmeye çalıştılar. Bu çabaların sonunda Dedekind rasyonel sayıları gerçel sayılara genişleten ve bu gün kendi adıyla anılan Dedekind Kesimini 1858 yılında buldu; ama o önemli bulguyu ancak 1872 yılında yayınladı.


Figure 1.3: Theodor Wilhelm Weierstrass

Calculus'a yeni başlayanların zor anladığı *Dedekind Kesimi* rasyonel sayı dizilerinin limiti olarak ifade edilebilir. Limit kavramı topolojik bir kavram olsa bile, calculus'a yeni başlayan öğrencilerin sezgisel olarak kolayca algılayacakları bir kavramdır. zaten calculus'un büyük çoğunluğu limit kavramını kullanıyor. O nedenle, rasyonel sayılardan irrasyonel sayılara genişleme eylemini limit sezgisine dayandırarak, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)'in dediği gibi, kavramların algılanmasını öğrencinin sezgisine dayandırmak daha etkin bir yol olacaktır.

Ne demek istediğimizi tarihi değeri olan problemlerle açıklayabiliriz. Bir zamanlar irrasyonel sayılar bilinmiyordu. M.Ö. 500 yıllarında varlığı bilinen Pisagor okulu, birim kenarlı ikizkenar üçgenin hipotenüsünün uzunluğu olan $\sqrt{2}$ sayısını görmezden geldi. *'Bir çemberin çevresinin, yarıçapının kaç katı olduğu'* sorusuna dünyanın en akıllı adamları yanıt aradı. Olmayan yerde sürdürülen bu arayış M.Ö. dönemlerden başlayıp irrasyonel sayıların ortaya çıktığı 19.yüzyıla kadar sürdü. Bu çok çok uzun bir süredir. Bu uzun sürede, örneğin, Arşimedin bulduğu yöntem soruya rasyonel sayılar içinde verilebilecek en iyi yanıtı vermekle kalmıyor, adını koymadan *limit* kavramından yararlanıyordu. Elealı Zenon (MÖ 490 - MÖ 430) *'tavşan kaplumbğaya yetişemez'* diyerek halktan haklı bir *deli* ünvanını aldı. Ama onun aldığı ünvanın onura dönüşmesi sonsuz serilerin ve ona dayalı limit kavramının ortaya çıkışına kadar iki bin yıldan fazla bir zaman dilimini aldı. 18.yüzyılın başlarında sonsuz serilerin ürünü olarak ortaya çıkan e sayısı ile milattan önceki dönemlerden gelen π sayısının transandant sayılar olduğunun ispatının yapıldığı 18.yüzyılın sonuna kadar rasyonel sayı kümesini genişletme zorunluğu görülmüyordu.

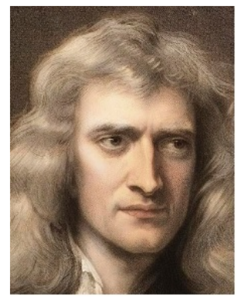

Figure 1.4: Isaac Newton

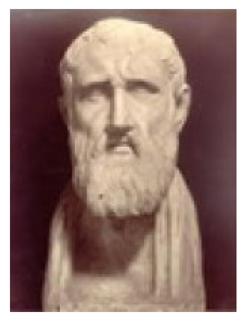

Figure 1.5: Elealı Zenon

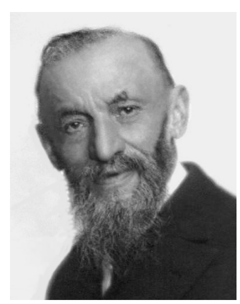

Figure 1.6: Giuseppe Peano (1858–1932)

Genel Matematik derslerinde, matematiğin iki milenyum sonunda aşabildiği iki önemli problemin yarattığı zorlukla karşılaşılır. Birincisi rasyonel sayılar kümesini gerçel sayılar kümesine genişletmektir. Burada irrasyonel sayıların tanımlanması matematiğe yeni başlayanlar için çok kolay olmayan bir sorundur. İkinci zorluk, sonludan sonsuza geçiştir. Bu iki zorluğu aşmanın yöntemlerini matematik elbette ortaya koymuştur. Ama bilimde ufuk açan bu iki konunun öğretiminde başarılı olduğumuz tartışılabilir.

Doğal Sayıları *Peano aksiyomları* ile ya da kümelerin öğelerini eşleştirerek tanımlamakta bir zorlukla karşılaşılmaz. Doğal sayıların grup genişlemesi olarak tam sayılar kümesini (halka) tanımlamak mümkündür. Tamsayılar halkasını içeren ek küçük cismin rasyonel sayılar cismi olduğunu söylemek de çok sorun yaratmaz. Aslında bu genişlemeler, isteniyorsa, aksiyomatik yöntemler yerine cebirsel yöntemlerle de yapılabilir. Sayı kümelerinin genişletilmesi konusunda ilk zorluk rasyonel sayılardan irrasyonel sayılara genişlemedir. Çoğunlukla, sayı ekseni üzerinde rasyonel olmayan noktalara karşılık gelen boşlukları irrasyonel sayıların doldurduğunu söyleyerek yaptığımız öğretim konunun gerektirdiği cebirsel işlemlerin genişlemesini içermez. Oysa, irrasyonel sayı içeren dört işlemin hiç birisini tam yapamayız. Onun yerine, irrasyonel sayıya istediğimiz kadar yakın bir rasyonel sayı alır, işlemi onunla gerçekleştiririz. Bu yaklaşımın tipik örneği irrasyonel π sayısıdır. Ortaöğretimde $\pi = 3.14$ eşitliğini kullanan öğrenci üniversitede $\pi = 3.1416$ eşitliğini kullanmaya başlar, ama eylemin gerisinde yatan büyük düşünceyi algılamayabilir. Oysa, matematik öğretimi mekanik işlemler yapmayı öğretmek yerine, matematiğin yarattığı soylu düşünceleri algılatmalıdır.

Rasyonel sayılardan irrasyonel sayılara geçiş için kullanılan farklı yöntemleri üç sınıfa ayırmak mümkün görünmektedir:

1. Dedekind Kesimi
2. Rasyonel dizilerin limitleri
3. Aksiyomatik Yöntem

Dedekind Kesimi, irrasyonel sayılar bilinmiyorken rasyonel sayılardan irrasyonel sayılara genişlemeyi sağlayan ilk yöntemdir. O nedenle başlı başına taşıdığı tarihi değerin yanında yöntemin kendi değeri de çok büyüktür: Dedekind kesimi gerçel sayılar kümesini *sıralı bir cisim* olarak kurar; rasyonel sayıları bu cisim içine gömer. Böylece rasyonel sayılarda tanımlı olan işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) işlemleri ile sıralama eylemi gerçel sayılar üzerine genişletilmiş olur. Bunun yanında analizin sık kullanığı aşağıdaki teoremleri elde eder. Bu teoremler analizin omurgasıdır.

Theorem 1.1. [2] *Gerçel sayılar tamdır.*

[2] Tamlık

Bu teorem, gerçel sayılardaki her Cauchy dizisinin gerçel sayılar kümesinde bir limite yakınsadığını söyler.

Theorem 1.2. [3] *Rasyonel sayılar gerçel sayılar kümesinde yoğundur.*

[3] Yoğunluk

Bu teorem, herhangi iki gerçel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı olduğunu söyler. Başka türlü söylersek, her gerçel sayıya yakınsayan rasyonal diziler vardır. Bu özelik irrasyonel sayılarla yaklaşık değerli işlem yapmamızı sağlar. Günlük yaşamda olduğu kadar bilimin ve tekniğin esas aracıdır.

Theorem 1.3. *Gerçel sayıların boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin en küçük üst sınırı (supremum) vardır.*

Bu teoremde geçen sayıların negatiflerini alırsak;

Theorem 1.4. [4] *Gerçel sayıların boş olmayan ve alttan sınırlı her alt kümesimin en büyük alt sınırı (infimum) vardır.*

[4] infimum, supremum

teoremini elde ederiz.

Yoğunluk topolojik bir özeliktir, ama ardışım (succession) cebirsel bir özeliktir. Bu teoremlerin hepsi analiz derslerinde kanıtlanır. Bu kitapta, teoremlerin kanıtları yapılana kadar, onların geçerliğini varsayacağız. Bu var saymayı birer aksiyom olarak algılamayacak; yalnızca bize gerekli önbilgiler olarak sayacağız.

Theorem 1.5. [5] *(Arşimet Özeliği) Her gerçel sayıdan daha büyük olan bir doğal sayı vardır; yani her $x \in \mathbb{R}$ sayısına karşılık $x < n$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.*

[5] Arşimet Özeliği

Theorem 1.6. [6] *İrrasyonel sayılar gerçel sayılar kümesinde yoğundur.*

[6] İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu

Bu teorem, herhangi iki gerçel sayı arasında sonsuz tane irrasyonel sayı olduğunu söyler; Teorem 1.2'in irrasyonel sayılar için ifade edilmiş şeklidir.

Sayı kümelerini

1. $\mathbb{N}$: Doğal sayılar
2. $\mathbb{Z}$: Tam sayılar
3. $\mathbb{Q}$: Rasyonel saylar
4. $\mathbb{R}$: Gerçel sayılar
5. $\mathbb{C}$: Kompleks sayılar

diye sınıflandırırız. Bu kümeler arasında $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ kapsaması vardır[7] . İlk üçü üzerindeki işlemleri (fonksiyonları) yalın aritmetik yöntemleriyle yaparız. Ama onları $\mathbb{R}$ kümesine genişletirken, genellikle, şeylerin üstündeki örtüyü kaldırıp, ileride anlaşılacak bazı konuları şimdiden öğrencinin sezgisine dayandırmak daha doğru olabilir. Brouwer'in önerdiği gibi, zaten matematiğin bir çok konusunu öğretirken öğrencinin sezgisine dayanırız. Bunu apaçık yapmakta ne sakınca olabilir.

[7] $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Gerçel sayılar bir gruptur deriz, ama $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ yi toplama işlemiyle karşılaşınca, $2\sqrt{2}$ nesne sayma yanıtını vererek konuyu elimizdeki şalla örteriz. Burada $\sqrt{2}$ nin irrasyonel sayının adı olan bir resim olduğunu söylemez, bu iki sayının toplamını nasıl yaptığımızı anlatmayız. Yaptığımız iş

$$5 + 5 = 2 \text{ tane } 5$$

gibidir. Oysa $5 + 5 = 10$ işlemine benzer bir işlem yapmalıyız. Öğrencilerin çoğu, irrasyonel sayılarla tam işlem yapılamayacağının, irrasyonel sayı içeren her işlemin aslında rasyonel sayılara dönüş yapan ve ancak yaklaşık değer veren bir işlem olduğunun bilincine varamaz. Bu öğrenciler, yaptığımız hilenin farkına varmaz. Bu örnekler çoğaltılabilir.

Gerçel sayılar rasyonel dizilerin limitleridir. O zaman limiti yeni bir nesne olarak kabul edip, gerçel sayıları bu nesnelerinin denklik sınıfları olarak tanımlamak doğru ve sezgisel anlatılması mümkün olan bir yoldur. Denklik sınıflarını zaten kümeler kuramında işliyoruz. Aynı limite giden diziler aynı gerçel sayıyı tanımlayacaklarına göre, onların denklik sınıflarını gerçel sayı kümesi olarak anlatmak olduğu kadar pedagojik olacaktır.

1.2 *Mantık ve Matematik*

Okuma Parçası

Tarih Öncesi Çağlarda, insanın mukayese yoluyla akıl yürüttüğünü söyleyebiliriz. Hemen her olguda olduğu gibi, doğru düşünme kurallarının ortaya çıkması da tarih içinde bir gelişim, bir evrim geçirmiştir. Buna bir başlangıç noktası seçilemez. Ancak, antik çağdan günümüze gelen kalıtlarda, mantık ile uğraşan düşünürlerin varolduğu görülmektedir. Bunlar arasında, mantık biliminin oluşmasında en etkili olanı *Aristo (M.Ö.384-322)*'dur. M.Ö. 600-300 yıllarında ortaya çıkan usavurma kurallarını Aristo sistemleştirdi. *Organon (alet)* adlı eserinde *ondört usavurma kuralı (syllogism)* verdi. Bu kurallar, bu günkü biçimsel mantığın temelidir ve 2000 yılı aşkın bir zaman dilimi içinde insanoğlunun düşünme ve doğruyu bulma eylemini etkisi altında tutmuştur. *Organon*, insanlığa bırakılmış en büyük miraslardan birisidir.

Figure 1.7: Aristoteles (MÖ 384-322)

Aristo'nun ortaya koyduğu kuralların oluşturduğu sisteme *Klasik Mantık, Aristo Mantığı* ya da *iki-değerli mantık* denilir. Klasik Mantık, 19.yüzyıla kadar egemenliğini sürdürmüştür.

Mantık önermelerle uğraşır. Her önerme bir *vargı, bir bildirim, bir bilgi*'dir. Buna bazı kaynaklar *yargı (hüküm)* der. Bir vargı ya *doğru* ya da *yanlış'* tır. Buna *önermenin doğruluk değeri* diyoruz. İki-değerli mantığın temeli budur. Bir önerme, hem doğru, hem de yanlış olamayacağı gibi; biraz doğru, biraz yanlış da olamaz. Bir şey ya güzeldir, ya da çirkin; ya iyidir, ya da kötü; ya aktır ya da kara vb. Bu kesinliktir.

Aristo Mantığı konuşma diline bağlıdır. Dolayısıyla, kullandığımız dil, çevre koşullarımız, bilgilerimiz, inançlarımız, duygularımız, vb. önermenin doğruluk değerine etki edebilir. Başka bir deyişle, bazı önermelerin doğruluk değerleri evrensel bir değer alamaz. Örneğin,

"Bu gün hava soğuktur."

önermesinin doğru ya da yanlış yorumlanması, kutuptaki bir insanla, ekvatordaki bir insana göre değişebilir.

Figure 1.8: Augustus De Morgan

İngiliz matematikçileri *Augustus De Morgan (1806-1871)* ve *George Boole (1815-1865)*, matematiksel yöntemleri mantığa uygulayarak, klasik mantığın çevreye bağımlılıktan doğan kusurlarını ortadan kaldırdılar. *Matematiksel Mantık* adı verilen bu sistem dile, kültüre, duygulara, çevre koşullarına bağlı değildir. Soyut bir matematiksel yapıdır. Dolayısıyla evrenseldir; yani aynı varsayımlar altında yapılan *usa vurma (akıl yürütme)* her zaman ve her yerde aynı sonuca ulaşır.

Bu sisteme, *Boole Cebiri, Boole Mantığı, Simgesel Mantık, Önermeler Cebiri, Matematiksel Mantık,...* gibi adlar verilir.

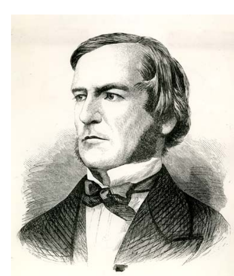

Figure 1.9: George Boole

İki-değerli Matematiksel Mantık, bu günkü uygarlığımızın temelidir. O olmadan, matematik olmaz. Matematik ise, çağımız biliminin, tekniğinin, teknolojisinin dayanağıdır. Başka türlü söylersek, insanoğlunun ürettiği bilgi'nin asıl aleti mantıktır. Bunun için, insanın bilgiyi nasıl ürettiğine kısaca bir göz atalım.

Terim [8] Bir bilim, sanat, meslek dalıyla ya da bir konu ile ilgili özel ve belirli bir kavramı olan kelime ya da deyim.

[8] Terim

Örneğin, küp, basamak, hane, daire, pay, ... gibi sözcüklerin matematikteki anlamları, konuşma dilindeki anlamlarından farklıdır.

İşlem, çokgen, çarpma, nokta, düzlem, açı, sonsuz,... gibi sözcükler birer matematik terimidirler.

Tanım: [9] Bir varlığa, bir şeye özgü niteliklerin belirtilmesi, bir sözcüğü belirleyen anlam.

[9] Tanım

Tanımlamak: [10] Bir kavramı bütün öğeleri ile eksiksiz anlatmak, özel ve değişmez niteliklerini sayarak bir şeyi tanıtmak. Tarif etmek.

[10] Tanımlama

Tanım, tanımlanan terimi (varlığı) kesinkes belirler ve öteki terimlerden ayırır. Bu nedenle, bir tanım şu özeliklere sahip olmalıdır:

1. Tanımlanan terime bir ad verilmelidir[11].
2. İfadede bilinmeyen kavram ya da terim kullanılmamalıdır.
3. Tanımlanan terim, ait olduğu en küçük kümeye yerleştirilmelidir.
4. Tanımlanan terimi, ait olduğu kümedeki öteki varlıklardan ayırt edecek bütün nitelikler söylenmelidir.
5. Gereksiz hiç bir bilgi verilmemelidir.

[11] Ad

Örnekler[12]

[12] Örnek

Aşağıdaki tanımları dikkatle okuyunuz. Hangilerinin tanım olabileceğini nedenleriyle söyleyiniz.

1. Kesişmeyen iki doğru paraleldir.
2. Paralel doğrular, aynı düzlemde olan ve kesişmeyen doğrulardır.
3. İki doğrunun paralel olması için gerekli ve yeterli koşul aynı düzlemde olmaları ve kesişmemeleridir.

Bu tanımlardan birincisi, aykırı doğruları da paralel saydığı için, ayırdedici niteliği yoktur. İkincisi *aynı düzlemde olma* koşulunu koyduğu için, uzayda paralel olan doğruları dışlamaktadır. Bu durumda, yalnızca, üçüncü tanım geçerlidir.

1.3 Tanımlı ve Tanımsız Terimler

[13]

[13] Tanımlı, tanımsız

Bir terimi tanımlarken, daha önceden tanımlanmış başka terim ve kavramları kullanarak, o terimin bütün niteliklerini ve yalnızca onları ortaya koyarız. Böyle terimlere *tanımlı terimler* denilir.

Ancak, her terimi tanımlarken, kendisinden önceki terimlere başvurmayı sürdürürsek, bir başlangıç noktasına ulaşmalıyız. Başka bir deyişle, tanımları, başka kavramlara dayanmayan terimlerin olması gerekir. Bu terimlere *ilkel terimler* ya da *tanımsız terimler* denilir. Bu terimler, kendilerinden daha basit terimler ya da kavramlarla açıklanamazlar. Ama, onları, sezgilerimizle kolayca algılarız. Örneğin, *nokta, doğru, düzlem, üzerinde, düz, yüzey, eşdeğerli, . . .* matematiğin **tanımsız** terimlerindendir. öte yandan, *üçgen, işlem, rasyonel sayı, karekök, bölüm, . . .* gibi terimler ise, tanımlı terimlerdir.

Teorem: Kanıtlanabilen bilimsel önerme. Mantıksal usavurma ile kanıtlanan önermenin ya da özeliğin bildirimi.

"Teorem" terimi yerine "Önerme", "Lemma" gibi terimler de kullanılır.

Örnek:

Eşaçılı bir üçgen eşkenardır.

belit (aksiyom): Kendisinden daha basit terim ve kavramlarla ifade edilemediği için varlığı kabul edilen önerme.

Belit yerine *aksiyom* ya da *postülat* da denilir.

Örnek:

İki nokta bir doğru belirler.

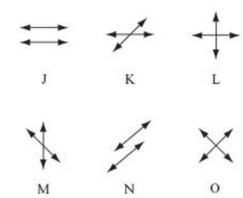

Figure 1.10: İki noktdan bir doğru geçer

Uyarı 1.7. *Bazı kaynaklarda bizim eşanlamlı saydığımız terimler arasında küçük anlam farklılıkları gözetilir. Bu kitapta, o tür ayrımları önemsiz sayacak ve eşanlamlı terimler arasında ayrım yapmayacağız.*

Bibliography