TIMUR KARAÇAY - HAYDAR EŞ

CALCULUS

SEÇKIN YAYINCILIK
ANKARA

Contents

0.1 Kümeler

1

Bu derste, kümeyi *nesnelerin topluluğu* diye tanımlayacağız [2,3], [4,5]. Kümeyi nesneler topluluğu olarak tanımlamanın mantıkta paradokslara yol açtığı bilinir. Paradoksların yokedilmesi için, Kümeler Kuramının belitsel (axiomatic) yöntemlerle oluşturulması, 20.yüzyıl matematiğinin önemli uğraşılarından birisi olmuştur. [6,7]. Ancak, bu dersin amacını aşan o konuya girmeyeceğiz. Yapmak istediğimiz iş, Kümeler Cebirini incelemektir. Başka bir deyişle, kümeler üzerinde *bileşim, arakesit, fark ve simetrik fark* işlemlerini yapacak ve küme ailelerini inceleyeceğz. Bu basit iş için, kümeyi Georg Cantor (1845-1918)'un yaptığı gibi, *nesnelerin bir topluluğu* olarak ele almak çok kısıtlayıcı olmayacaktır. Bu yöntem, özellikle, konuya ilk başlayanlar için, belitsel yönteme göre çok daha kolay anlaşılır nitelikt edir. Bu yöntemle kurulan kümeler kuramına *sezgisel* nitelemesi verilir.

Belitsel olsun ya da olmasın, her sistemin üzerine oturduğu ilkel kavramları vardır. Bir sistemin ilkel kavramlarını, o sistem içindeki başka nesneler ya da kavramlarla belirlemek mümkün değildir. Bunlara sistemin *tanımsız terimleri* ya da *ilkel terimleri* diyoruz. Örneğin, iyi bildiğimiz Öklit Geometrisinde *nokta* kavramını kendisinden daha basit kavramlarla açıklama olanağı yoktur. O nedenle, *nokta* terimi, geometrinin tanımsız (ilkel) terimlerinden birisidir.

Genel kurala uyarak, öncelikle kümeler kuramının dayandığı tanımsız terimleri ortaya koyacağız. Bundan sonraki her yeni tanım, bu tanımsız terimlerle ifade edilir; başka bir belirsiz kavram ya da bilinmeyen nesne yapıya giremez.

Bir belitsel yapı kurulurken yapıya sağlam dayanak olacak sayıda tanımsız terim ortaya koymak gerekir. Tanımsız (ilkel) terimlerin sayısı gereğinden az ya da çok olmamalıdır. Bir belitsel sistemde, ötekiler cinsinden ifade edilebilecek kavramları, yapının tanımsız terimleri olarak almamak gerekir. Ayrıca, bir belitsel yapıdaki tanımsız terimlerin, kendilerine verilecek özeliklerinden başka özeliklere sahip olduklarını, ya da, bize alışkın olduğumuz bazı özelikleri ima ettiklerini varsaymayacağız.

Hemen belirtelim ki, kümeler cebirini incelemek için ortaya koyacağımız tanımsız terimler, kümeler kuramını eksiksiz bir belitsel yapı olarak kurmaya yetmeyecek, sistemi, içindeki paradokslardan arındıramayacaktır. Ama, asıl amacımız olan *kümeler cebirini* eksiksiz işlememize yeterli olacaktır.

1 Kümeler Cebiri

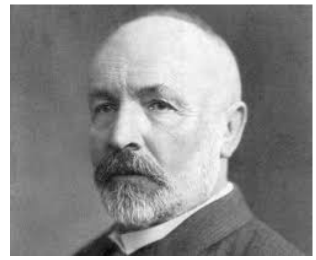

Figure 1: Georg Cantor

2 Paul R. Halmos. *Naive Set Theory*. Van Nostrand Reinhold, London, 1960

3 Halmos: Naive Set Theory

4 E. Kamke. *Theory of Sets*. Dover Pub., New York, 1950

5 Kamke: The Theory of sets

6 Paul J. Cohen. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Dover Publications, New York, 2007

7 Cohen: Set Theory and continuum Hypothesis

0.2 Kavramlar

8

8 kavramlar

Küme ve Öğe

9

Kümeyi sezgisel olarak tanımlayacağımızı söylemiştik. Küme için aşağıdaki özelikleri varsayacağız.

9 küme öğe

Tanım 0.1.

1. Küme, belirli nesnelerden oluşan bir topluluktur.
2. Kümeyi oluşturan nesnelere kümenin öğeleri denilir.
3. Kümeye ait öğeler arasında bir sıralama olması gerekmez.
4. Bir öğe, küme içinde ancak bir kez yer alabilir.

0.3 *Küme'nin Tanımsız Terimleri*

10

10 Tanımsız

Kümeler cebirini işlemek için dört *tanımsız* terime gerekseme duyacağız:
1. küme
2. öğe
3. içerilme (elemanı olma)
4. nicelik sayısı

Tanım 0.2.

x herhangi bir nesne olsun. Buna bazen *belirsiz,* bazen de *değişken* denilir. İçinde x bulunan bir $\phi(x)$ önermesi (ifadesi) tanımlı olsun. Eğer bu önerme *doğru* ise, x nesnesi ϕ önermesini *sağlıyor (doğruluyor)*, diyelim ve bunu, $\phi(x) = 1$ anlamına gelmek üzere, kısaca,

$$\phi(x)$$

simgesiyle gösterelim.

Eğer, $\phi(x)$ *yanlış* bir önerme ise, x nesnesi ϕ önermesini *sağlamıyor (doğrulamıyor)* diyelim ve bunu da, $\phi(x)$ önermesinin değili anlamına gelmek üzere,

$$\phi'(x), \qquad \sim\phi(x), \qquad \neg\phi(x) \tag{1}$$

simgelerinden birisiyle gösterelim.

$$\phi(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi'(x) = 1 \tag{2}$$

olduğu açıktır.

ϕ önermesini sağlayan bütün x nesnelerinin oluşturduğu topluluğu,

$$\{x \mid \phi(x)\} \qquad \text{ya da} \qquad \{x : \phi(x)\} \tag{3}$$

simgelerinden birisiyle gösterelim. (3) topluluğuna bir *küme*, bu topluluğu oluşturan her bir x nesnesine bu kümenin bir *öğesi (elemanı)* diyeceğiz.

Kümeleri, genellikle, $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ gibi büyük harflerle, öğelerini ise $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$ gibi küçük harflerle göstereceğiz. Ayrıca $1, 2, 3, \ldots$ gibi sayıları ya da başka simgeleri de öğe olarak gösterebiliriz.

İyi Tanımlılık [11]

Bir küme ancak içerdiği bütün öğeler kesinlikle belirli ise tanımlıdır. Matematikte öğeleri belirsiz olan küme olmaz.

Kümeyi tanımlamak için, öğeleri kesinkes belirleyen sözel tanımlar yapabiliriz. Ama, daha matematiksel bir yol, tanımlayacağımız kümenin içerdiği öğelerin sahip olduğu bütün özelikleri ve yalnızca onları ifade eden ϕ önermesini belirledikten sonra, kümeyi (3) biçiminde yazmaktır. Böyle yaptığımızda, kümenin içerdiği öğeler kesinkes belirlenmiş olur. Bazen, $\phi(x)$ yerine onu ifade eden tümceler de kullanabiliriz. Kümenin bütün öğelerinin kesinkes tanımlanmasına *kümenin iyi tanımlanması*, diyoruz.

Her küme iyi tanımlı olmalıdır.

(3) kümesini belirleyen ϕ önermesi, yalın bir önerme olabileceği gibi, bileşik bir önerme de olabilir.

[11] İyi tanımlı

0.4 *Kümelerin Gösterimi*

[12]

Kümelerin gösterimi için üç yöntem kullanırız: *Niteleme Yöntemi, Listeleme Yöntemi, Venn Diyagramı.*

[12] gösterim

Niteleme Yöntemi

Öğelerin Ortak Özeliklerini Belirleme

Kümelerin (3) biçiminde gösterilmesidir. Bu gösterimde ϕ önermesi, kümenin öğelerinin belirleyici ve ayırıcı niteliklerini belirtir. Bu nedenle, (3) gösterimine *Niteleme Yöntemi (Ortak Özelik Belirleme Yöntemi)* denilir.

Listeleme Yöntemi

[13]

Kümenin Öğelerini Parantez İçine Yazma

[13] listeleme

Bazı özel hallerde, kümenin öğelerini tek tek yazmak ya da belirli bir kurala uyar biçimde sıralamak mümkün olabilir. Kümeleri liste biçiminde gösterirken, kümenin öğelerini { } parantezi içine yazarız. Küme parantezi içine yazılan öğelerin sırası önemli değildir. Ayrıca, aynı öğe birden çok yazılmışsa, o öğe bir kez var sayılır. Bu yönteme, *Kümenin Öğelerini Listeleme*, { } parantezine de *küme parantezi* diyeceğiz.

Örnekler:

1. Öğeleri a, b, c olan kümeyi $A = \{a, b, c\}$, $A = \{b, a, c\}$, $A = \{c, b, a\}$ vb gibi yazabiliriz. Küme parantezi içine öğelerin hangi sırada yazıldığı önem taşımaz.

2. $\{a, b, c\}$ kümesi ile $\{a, a, a, b, c\}$ kümesi aynıdır; çünkü a öğesi küme parantezi içine birden çok kez girse bile ancak bir kez var olduğu kabul edilir.

3. A kümesinin öğeleri $a, b, c, d, e, \ldots$ ise, A kümesini

$$A = \{\ a, b, c, d, e, \ldots\ \} \tag{4}$$

biçiminde yazarız. Bu yazılıştan herkesin, kümenin öğelerinin alfabedeki bütün harfler olduğunu algılamasını umut ederiz. Ancak, kimileri, kümeyi böyle algılamayabileceği için, listeleme yöntemi bazen yanlış anlamalara neden olabilir.

4. *Tam sayılar* kümesinin *niteleme yöntemi* ile gösterimi,

$$\{\ x \mid x \ \ \textit{tam sayıdır}\} \tag{5}$$

biçimindedir.

5. Tam sayılar kümesini listeleme yöntemiyle gösterecek olursak,

$$\{\ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ \} \tag{6}$$

yazabiliriz. (5) gösterimdeki " *x tam sayıdır* " önermesi, kümeyi belirleyen $\phi(x)$ önermesidir. (6) gösterimine gelince, büyük parantez içinde ... ile belirtilen yerlere yalnızca tam sayıların yazılması gerektiğini anlıyoruz. Tabii, bu tür bir gösterimi kullanırken, herkesin yazılı olmayan öğelerin ne olduğunu kesinlikle anlayacağından emin olmak gerekir; değilse yanlış anlamalar doğabilir. Eğer yanlış anlam çıkacağı kuşkusu varsa, *niteleme yöntemi*'ne geçmek daha uygun olur.

[14]

6.

$$K = \{\textit{kütüphanemizdeki kitaplar}\}$$

[14] 0.1'de birinci özelik, kümenin öğelerinin kesinlikle belirli olduğu anlamına gelir. Hangi öğenin kümeye ait olduğu ya da olmadığı konusunda hiç bir kuşku olmaz.

ifadesi kümeyi kesinlikle belirler. Çünkü, kütüphanemizdeki her kitap K kümesinin bir öğesidir; kütüphanemizde olmayan hiç bir kitap K kümesine ait değildir.

7.

$$\{iyi\ kitaplar\}$$

deyimi bir küme tanımlamaz. Çünkü, *'iyi kitap'* kavramı kişiden kişiye değişir. Dolayısıyla , Tanım 0.1'in ilk özeliği sağlanmaz.

Bu örneklerde görüldügü gibi, listeleme yöntemi, bazı hallerde daha kolay algılanabilir. Ancak, kümelerin büyük çoğunluğunda, özellikle, öğe sayısı çok olan kümeler için, listeleme yöntemini kullanmak olanaksızdır. Örneğin, sınıfınızdaki bütün öğrencilerin adlarını yazarsanız, sınıftaki öğrencilerden oluşan kümenin öğelerini listelemiş olursunuz. Ama, okuldaki bütün öğrencilerin kümesini listeleme yöntemiyle ile göstermek çok zordur.

Venn Diyagramı

15

15 Venn

Kümeleri Şekille Gösterme

İngiliz matematikçi John Venn(134-1923) kümesel işlemlerin kolay algılanmasını sağlamak için kümeleri düzlemsel şekillerle gösterdi. Kümeleri istediğimiz şekillerle gösterebiliriz. Ama, duyu organlarımız iki boyutlu şekilleri; yani düzlemsel şekilleri daha kolay algılar. Bu gösterimde, genellikle, daire ve elips kullanılır. Tabii, Venn diyagramı her kümeyi gösterebilen bir yöntem değildir.

0.5 Temel Kavramlar

Varlık Beliti

16

16 $\exists$

Belitsel Kümeler kuramında, kümelerin *varlığı* ve *eşitliği* gibi temel kavramlar birer belit olarak kabul edilir. Örneğin, ϕ bir önerme ise, (3) kümesinin varlığı, bir belit (aksiyom) olarak varsayılır. Ama biz, kümelerin varlığını ve şimdiye dek ele aldığımız özeliklerini sezgisel olarak varsayıyoruz.

İçerme-İçerilme

17

17 $\in$

Bir a öğesinin A kümesine ait olmasını,

$$a \in A \quad \text{ya da} \quad A \ni a \tag{7}$$

simgelerinden birisiyle gösterecek ve

- *"a öğesi (elemanı) A kümesine aittir."*
- *"a öğesi A kümesinin öğesidir."*
- *"A kümesi a öğesini içerir."*
- *"a öğesi A kümesince içerilir."*

ifadelerinden birisiyle söyleyeceğiz.

İçerilme tanımı gereğince, (3) verildiğinde $a \in A$ olması için, a öğesinin ϕ önermesini sağlaması gerekli ve yeterli koşuldur; yani $\phi(a)$ önermesi *doğru* olmalıdır. Öyleyse,

$$a \in A \quad \Longrightarrow \quad \phi(a) \tag{8}$$

yazılabilir. b öğesinin A kümesine ait olmadığını

$$b \notin A \quad \text{ya da} \quad A \not\ni b \tag{9}$$

simgelerinden birisiyle gösterecek ve

- *"b öğesi (elemanı) A kümesine ait değildir."*
- *"b öğesi A kümesinin öğesi değildir."*
- *"A kümesi b öğesini içermez."*

diye söyleyeceğiz. Aşağıdaki denklikler vardır.

$$a \in A \equiv A \ni a \tag{10}$$
$$a \notin A \equiv A \not\ni a \tag{11}$$

Kapsama

[18]

[18] $\subset$

Tanım 0.3. *A kümesinin her öğesi B kümesine ait ise,* "A kümesi, B kümesi tarafından kapsanır" *ya da* "B kümesi A kümesini kapsıyor," *denilir ve $A \subset B$ simgesiyle gösterilir.*

[19]

$\subset$ simgesine *kapsama bağıntısı* denilir. $A \subset B$ ile $B \supset A$ eş anlamlıdır. Kapsamayı simgesel olarak şöyle gösterebiliriz:

[19] $A \subset B$ ise A kümesi B kümesinin bir *altkümesidir* ya da B kümesi A kümesinin bir *üstkümesidir*, denilir.

$$A \subset B \Longrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{12}$$

Evrensel Küme

Evrensel teriminin anlamından hareketle, *evrensel küme* terimini, *"her şeyi içeren küme"* olarak algılayabiliriz. Buradan,

"Bütün kümelerin kümesi"

kavramına geçilebilir. Oysa, bu kavram *Kümeler Kuramı*'nda paradoks yaratıyor. 20.yüzyılın büyük matematikçilerini uğraştıran bu konuyu sonraki bölümlerde ele alacağız.

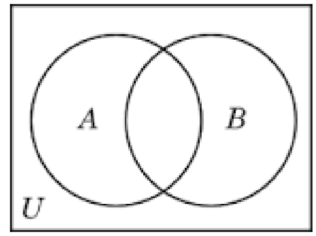

Figure 2: Evrensel Küme

Kümeler cebirini incelemek için *bütün kümelerin kümesi*'ni düşünmemiz gerekmiyor.

Matematikte, öğeleri kesinlikle belirli olan kümeler üzerinde çalışırız. Bunlar, çoğunlukla, *doğal sayılar, tam sayılar, gerçel sayılar, karmaşık sayılar* gibi sayı kümeleri, analizde kullandığımız *fonksiyon uzayları* ya da cebirde kullandığımız *grup, halka,cisim* gibi cebirsel yapılardır. Tabii, bunlar dışında soyut kümeleri de ele alırız. Ama her durumda, kümenin kesinlikle belirli olduğu varsayılır.

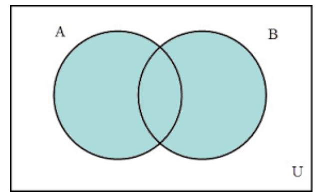

Figure 3: Birleim

Evrensel küme kavramını, her şeyi içine alan küme olarak düşünmek yerine, belli bir işi yaparken o iş için gerekli olan bütün kümeleri kapsayan (gerekli bütün öğeleri içeren) bir küme olarak ele almak işimizi kolaylaştıracaktır. Örneğin, {1,3,5,7,9,11} kümesiyle uğraşırken, evrensel küme olarak {tek sayılar} kümesi fazlasıyla yeterlidir. İstenirse, evrensel küme olarak, tam sayılar kümesi ya da gerçel sayılar kümesi de seçilebilir. Ama evrensel kümeye, sayılarla birlikte, söz gelimi, *böcekler* kümesini de katmanın gereği ve yararı yoktur.

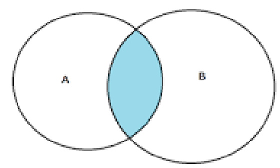

Figure 4: Arakesit

Evrensel küme belirli bir tek küme değildir. Her iş için gerekli olan bütün öğeleri içeren (mümkünse bilinen) en küçük küme olarak alınması amaca uygun olur. Tabii, burada *bilinen* ve *en küçük küme* kavramları, kişiye göre değişebilir Örneğin, yukarıdaki {1,3,5,7,9,11} kümesiyle uğraşırken, kimisi tek sayıları, kimisi bütün doğal sayıları evrensel küme olarak alabilir. Üstelik, istersek 20 den küçük doğal sıylar kümesi de evrensel küme olabilir. Bu durumda, küme üzerinde yapılacak işlemlerin sonuçlarının 20 yi aşmayacağının bilinmesi gerekir. Evrensel kümenlerin farklı seçilmesi, kümeler cebirinde bir sorun yaratmayacaktır.

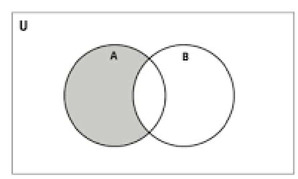

Figure 5: Fark

Bir iş için kullanacağımız evrensel kümeyi sözel olarak tanımlayabiliriz. Örneğin, *tek sayılar* deyimi kümeyi kesinlikle belirler. Herkesin aynı kavramda anlaşmasını sağlamak için evrensel küme seçimini önermelerle yapmak yetecektir. Belli bir işte gerekli bütün x öğelerini belirleyen bir U önermesi düşünelim. Anımsanacağı gibi, $U(x)$ simgesi, x öğesinin U önermesini sağladığı anlamına geliyordu. Başka bir deyişle, $U(x)$ önermesinin doğruluk değeri 1 dir (doğru). Bu koşulu sağlayan bütün x öğelerinin oluşturduğu kümeye U nin belirlediği evrensel küme diyeceğiz. Bu kümeyi U ile gösterelim.

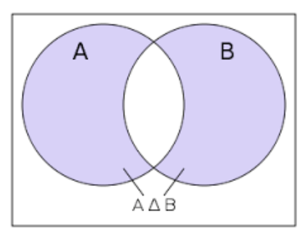

Figure 6: Simetrik Fark

$$U = \{x \mid U(x)\} \tag{13}$$

Genellikle, bir işte bir tek evrensel küme kullanırız. Başkasıyla karışması tehlikesi yoksa, gösterimleri basitleştirmek için, işlemlerimizde U önermesini hiç kullanmayız. Örneğin, U yerine E yazarız.

Daha önemlisi, altkümeleri kullanırken de bunu yaparız. Örneğin, doğal sayılar kümesini evrensel küme olarak almışsak, T tek sayılar altkümesini belirlemek için

$$T = \{k \mid k \in \mathbb{N} \wedge \ (k \text{ tek sayıdır})\}$$

gösterimini kullanmak yerine,

$$T = \{k \mid (k \text{ tek sayıdır})\}$$

yalın biçimini kullanacağız. Bunu matematiksel simgelerle ifade edelim. U nın belirlediği evrensel küme içinde bir ϕ önermesini sağlayan x öğelerinin oluşturduğu A altkümesini

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid U(x) \wedge \phi(x)\} \\ &= \{x \mid (x \in U) \wedge \phi(x)\} \end{aligned}$$

biçimlerinden birisi ile göstermek yerine

$$A = \{x \mid \phi(x)\} \tag{14}$$

yalın biçiminde göstereceğiz.

Evrensel küme için bir tanım yapmak gerekirse şöyle diyebiliriz:

Tanım 0.4. *Belli bir iş için, o anda ele alınma olasılığı olan bütün öğeleri (nesneleri) içeren kümeye evrensel küme denilir.*

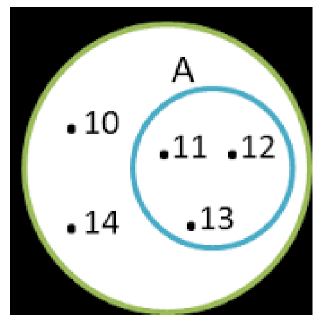

Figure 7: Evrensel Küme : U

Örneğin, $\{1,3,5,7\}$ kümesi ile işlem yaparken, evrensel küme olarak *tek sayılar* kümesini, *doğal sayılar* kümesini ya da *tam sayılar* kümesini almak mümkündür. Evrensel kümeyi belirleyen genel bir kural yoktur. İşleme giren öğelerin hepsini kapsayan en küçük kümeyi evrensel küme olarak seçmek uygundur. Aslında, kümeler cebiri ile ilgili işlemlerin çoğunda evrensel kümenin kim olduğu önemli bir fark yaratmayacaktır. Ele alınan kümeler soyut ise; yani öğeleri belirtilmiyor ise, o anda söz konusu olabilecek bütün öğeleri kapsayan kümeye evrensel küme deriz. Bu anlaşma, kümeler cebirinde bir sorun yaratmayacaktır.

Evrensel kümeyi, çoğunlukla E simgesiyle göstereceğiz.

Örnekler:

1. Doğal sayılarla çalışırken, bütün doğal sayıların kümesini evrensel küme olarak seçmek yeterlidir.

2. Doğru üzerindeki noktalarla çalışırken, doğru kümesini evrensel küme olarak seçmek yeterlidir.

3. Bir ülkede demografik çözümlemeler yaparken, o ülkenin nüfusunu evrensel küme olarak seçmek yeterlidir.

Tümleyen Küme

Evrensel bir küme seçilince, o anda ele alınan bütün kümeler, evrensel kümenin altkümeleri sayılacağı için, evrensel küme sözkonusu kümelerin hepsini kapsayacak büyüklükte seçilmelidir. $U = E$ evrensel kümesinin bir altkümesi A olsun. $A \subset E$ kümesi

$$A = \{ x \mid \phi(x) \} \tag{15}$$

biçiminde tanımlansın.

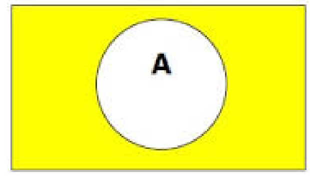

Figure 8: Tümleyen Küme : A'

Tanım 0.5. *A kümesine ait olmayan ama E evrensel kümesine ait öğelerin oluşturduğu kümeye A nın (E ye göre) tümleyeni denilir ve*

$$E \setminus A, \quad E - A, \quad A', \quad \sim A, \quad A^c \tag{16}$$

simgelerinden birisiyle gösterilir.

Evrensel kümeyi belirtmek gerektiğinde ilk iki simgeyi kullanmak daha uygundur.

(15) ile verilen A kümesinin A^c tümleyenini simgesel olarak

$$A^c = \{ x \mid \phi'(x) \} \tag{17}$$

biçiminde yazabiliriz.

Doğal olarak, evrensel küme değişirse, tümleyen küme de değişecektir. Ama, böyle oluşu, aynı evrensel kümeye ait kümeler üzerinde yapılacak işlemlerde bir sorun yaratmayacaktır.

Küme ve tümleyeni tanımlarından, E evrensel kümesini

$$E = \{x \mid \phi(x) \vee \phi'(x)\} \tag{18}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu yalın gösterimlerde kullanmadığımız $U(x)$ önermesinin sağlandığını gizil biçimde kabul ediyoruz.

Theorem 0.6. *E evrensel küme ise, her $x \in E$ ve $A \subset E$ kümesi için aşağıdaki özelikler geçerlidir.*

$$x \in A \Longrightarrow x \notin A' \tag{19}$$

$$x \in A' \Longrightarrow x \notin A \tag{20}$$

Kanıt: Tümleyen küme tanımından çıkar.

Lemma 0.7. *Her A kümesi için $(A')' = A$ eşitliği sağlanır.*

Kanıt:

$$x \in A \Longrightarrow x \notin A' \Longrightarrow x \in (A')'$$

Boş Küme

20

[20] $\emptyset$

Tanım 0.8. *Hiçbir öğesi varolmayan kümeye,* boşküme *diyecek ve bunu* $\emptyset$ *simgesiyle ya da içi boş* $\{\ \}$ *parantezi ile göstereceğiz.*

Boşkümenin, kümeler cebirinde oynadığı rolü, sıfırın sayılarda oynadığı role benzetebiliriz. Tabii, sıfırın boşküme olmadığını söylemek gerekmez.

Örnek 0.9.

Hiçbir insan 200 yıl yaşamadığına göre,

$$\emptyset = \{\ \textit{İkiyüz yaşını geçmiş ressamlar}\}$$

olur.

Theorem 0.10. *Her küme boşkümeyi kapsar.*

KANIT: A herhangi bir küme olsun.

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \tag{21}$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için olmayana ergi yöntemini ($\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\phi$) kullanabiliriz. boşkümenin hiç bir öğesi olmadığından, A kümesine ait olmayan hiç bir öğenin boşkümeye de ait olamayacağı apaçıktır. O halde,

$$x \notin A \Rightarrow x \notin \emptyset \tag{22}$$

yazılabilir.

Theorem 0.11. *Evrensel kümenin tümleyeni boşkümedir. Boşkümenin tümleyeni evrensel kümedir.*

KANIT: $E' = \emptyset$ ve $\emptyset' = E$ olduğunu göstermeliyiz. Tümleyen küme tanımında, A yerine E konulursa

$$E' = \{x |\ x \in E \wedge x \notin E\}$$

olur. Sağdaki küme parantezi içindeki önerme hepyanlış bir önermedir. O halde, önermeyi sağlayan hiçbir x öğesi yoktur. Öyleyse, E' tümleyeninin hiçbir öğesi yoktur. $E' = \emptyset$ olur.

Teoremin ikinci kısmı da benzer olarak kanıtlanabilir.

$$\emptyset' = \{x |\ x \in E \wedge x \notin \emptyset\}$$

Sağdaki küme parantezi içindeki önerme hepdoğru bir önermedir; evrensel kümeye ait her x öğesi önermeyi sağlar. Öyleyse, $\emptyset'$ tümleyeni evrensel kümedir; yani $E = \emptyset'$ olur.

Tek Öğeli Küme

Tanım 0.12. *Yalnızca bir tek a öğesine sahip kümeyi* $\{a\}$ *ile gösterecek ve adına* tek öğeli küme *diyeceğiz.*

[21]

[21] a bir öğedir, {a} ise bir kümedir. Dolayısıyla bu ikisi birbirlerinden farklıdır ve $a \in \{a\}$ olur.

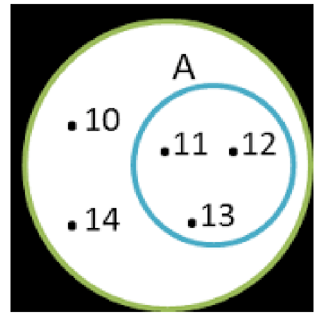

Figure 9: Altküme: $B \subset A \subset U$

Altküme ve Üstküme

Tanım 0.13. *A kümesi B kümesi tarafından kapsanıyorsa "A kümesi B kümesinin bir* altkümesi *dir," ya da "B kümesi A kümesinin bir* üstkümesi*'dir," denir ve*

$$A \subset B, \text{ ya da } B \supset A \tag{23}$$

simgelerinden birisi ile gösterilir.

Eşit Kümeler

Tanım 0.14. *A kümesi B kümesinin altkümesi ve B kümesi de A kümesinin altkümesi ise, "A ile B kümeleri birbirlerine* eşittir,*" denilir ve bu durum,* $A = B$ *simgesiyle gösterilir.*

$$A = B \Longrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A) \tag{24}$$

Has Altküme

$A \subset B \Longrightarrow$ *A kümesi, B nin bir altkümesidir,* olması, A kümesinin B ye eşit olamayacağı anlamına gelmez. Örneğin, her küme kendi kendisinin bir altkümesidir $A \subset A$. Neden?

Bazen, altkümenin üstkümeye eşit olmadığını vurgulamak gerekir:

Tanım 0.15. *A kümesi, B kümesi tarafından kapsanıyorsa ve A ile B eşit değilseler, A kümesi B kümesinin bir* has altkümesi*'dir, denilir.*

Bu durumu simgesel olarak,

$$(A \subset B) \wedge (A \neq B) \tag{25}$$

biçiminde göstereceğiz.[22].

[22] **Uyarı:** Bazı kaynaklarda $A \subset B$ yerine $A \subseteq B$ simgesi ve $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$ yerine de $A \subset B$ simgesi kullanılır. Tabii, bir kavramın hangi simgeyle gösterildiği, o kavrama etkimez; ama hangi kavram için hangi simgenin kullanıldığını daima bilmek ve tutarlı biçimde kullanmak gerekir. Bu derste, yalınlığı sağlamak için, $A \subset B$ simgesini $A \subseteq B$ anlamında kullanacağız

Kuvvet Kümesi

[23]

[23] kuvvet kümesi

Kümeler cebirinde bir kümenin bütün altkümelerinden oluşan aile önemli bir araç olarak kullanılır.

Tanım 0.16. *Boş olmayan bir kümenin kuvvet kümesi, onun bütün altkümelerinden oluşan kümedir.*

Bir A kümesinin kuvvet kümesi $\mathscr{P}(A)$ simgesiyle gösterilir.

Öğeleri kümeler olan bir topluluğun kendisi de bir kümedir. Ancak, onlara *kümeler ailesi* diyeceğiz. Böylece, öğeleri kümeler olan kümeyi algılamak daha kolaylaşacaktır.

Aşağıdaki önermenin kanıtı ileride görülecek bazı bilgilere dayanır.

Theorem 0.17. *n öğeli bir kümenin bütün altkümelerinin sayısı 2^n dir.*

Nicelik Sayısı

Bazen, bir kümede kaç öğe olduğunu bilmemiz gerekir. Bir kümenin öğelerini sayabiliyorsak, sayma eylemi sonunda eriştiğimiz sayı, o kümenin nicelik sayısıdır. Ama, kümelerin çoğunun öğelerini sayamayız. Böyle olsa bile, her kümenin öğelerinin miktarını belirten bir kavramın (sayının) olması gerektiğini sezebiliyoruz. Bu nedenle, şu beliti varsayacağız.

Aksiyom 0.18. *[Nicelik Sayılarının varlığı] Her kümenin bir ve yalnız bir nicelik sayısı vardır. Sayılabilen kümeler için, nicelik sayısı, kümenin öğelerinin sayısıdır.*

Bir A kümesinin nicelik sayısı

$$\bar{\bar{A}}, \quad \natural(A), \quad n(A), \quad \mathrm{card}(A), \quad |A| \tag{26}$$

simgelerinden birisiyle gösterilir.

0.6 *Sonlu ve Sonsuz Kümeler*

Tanım 0.19. *Nicelik sayısı bir doğal sayıya eşit olan kümeler sonludur. Sonlu olmayan kümeler de sonsuzdur.*

Sonlu kümelerin öğelerini sayarak bitirebiliriz, ama sonsuz kümelerin öğelerini sayarak bitiremeyiz[24].

[24] Bu kısa bilgi bize yetecektir. Ama sonlu ve sonsuz kümelerin ayrıntısı için Soyut Matematik kitaplarına bakılabilir.

Örnekler:

1. Alfabemizdeki harflerden oluşan $\{a, b, c, \ldots, y, z\}$ kümesi sonludur.
2. 1000 den küçük çift tam sayılar kümesi sonludur.
3. Bir çuval pirinçten oluşan küme sonludur.
4. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Doğal Sayılar Kümesi sonsuzdur.
5. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Tamsayılar Kümesi sonsuzdur.
6. $\mathbb{R}$ = Gerçel Sayılar Kümesi sonsuzdur.
7. Düzlemdeki noktalar kümesi sonsuzdur.

0.7 Alıştırmalar

1. A, kümesinin evrensel kümesi E ise, aşağıdaki bağıntıların sağlandığını gösteriniz.

$$
\begin{aligned}
&a. \quad A = E \setminus A' \\
&a. \quad A' = E \setminus A \\
&c. \quad (A')' = A \\
&d. \quad E' = \emptyset \\
&e. \quad \emptyset' = E
\end{aligned}
$$

2. Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir küme tanımlar?

   (a) Alfabemizdeki bütün harfler.

   (b) Bütün insanlar.

   (c) $3x = 9$ denklemini sağlayan gerçel sayılar.

   (d) İyi futbolcular.

   (e) Depreme dayanıklı evler.

   (f) Tek sayılar.

   (g) Büyük sayılar.

   (h) Ünlü yazarlar.

   (i) İyi kitaplar.

3. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ile $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

   (a) $6 \in A$

   (b) $13 \in B$

   (c) $13 \notin B$

   (d) $A \in \mathbb{N}$

   (e) $A \supset \mathbb{N}$

   (f) $A \subset \mathbb{N}$

   (g) $A \subset B$

   (h) $A \supset B$

   (i) $A \in B$

   (j) $A \in B$

0.8 Küme İşlemleri

25

[25] Kümesel İşlemler

Bileşim [26]

Ya A kümesine ya B kümesine ya da hem A ya hem de B ye ait olan bütün öğelerden oluşan kümeye, *A ile B nin bileşimi,* denilir ve $A \cup B$ simgesiyle gösterilir; yani,

$$A \cup B \;=\; \{\; x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \;\} \tag{27}$$

dir. Bileşimin Venn çizeneği Şekil 10'deki gibidir.

[26] Bileşim

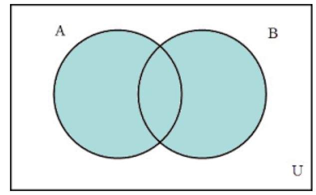

Figure 10: Bileşim : $A \cup B$

Arakesit [27]

Hem A kümesine hem de B kümesi ne ait olan bütün öğelerden oluşan kümeye, *A ile B nin arakesiti* ya da *kesişimi* denilir ve $A \cap B$ simgesiyle gösterilir. yani,

$$A \cap B = \{\; x \mid x \in A \wedge x \in B\} \tag{28}$$

dir. Arakesitin Venn çizeneği Şekil 11'deki gibidir.

[27] Kesişim

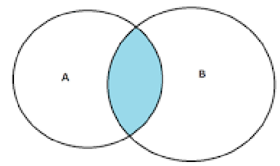

Figure 11: Arakesit : $A \cap B$

Ayrık Kümeler A ile B kümelerinin arakesiti boş ise; yani,

$$A \cap B \;=\; \emptyset \tag{29}$$

ise, *A kümesi ile B kümesi birbirlerinden ayrıktırlar (kesişmiyorlar),* denilir.

Hiçbir ortak öğesi olmayan iki küme ayrıktır.

Kesişen Kümeler A ile B kümelerinin arakesiti boş değilse ; yani,

$$A \cap B \;\neq\; \emptyset \tag{30}$$

ise, A ile B kümeleri *ayrık değildir (kesişiyorlar),* denilir. Kesişen iki kümenin en az bir tane ortak öğesi vardır.

paragraphFark[28]

A kümesinin öğelerinden B kümesine de ait olanları attıktan sonra, geriye kalan öğelerin oluşturduğu kümeye, A ile B nin farkı diyecek ve bunu $A \setminus B$ ya da $A - B$ simgelerinden birisiyle göstereceğiz; yani,

$$A - B = A \setminus B = \{\; x \mid x \in A \wedge x \notin B \;\} \tag{31}$$

dir. Fark kümesinin Venn çizeneği Şekil 12'deki gibidir.

$(A \setminus B) \neq (B \setminus A)$ olduğu apaçıktır.

[28] Fark

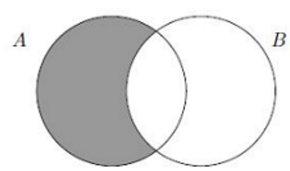

Figure 12: Fark : $B \setminus A \equiv B - A$:

Simetrik Fark A ile B nin bileşim kümesinden, arakesitlerinin çıkarılmasıyla elde edilen kümeye, A ile B kümelerinin *simetrik farkı* diyecek ve bunu $A \triangle B$ simgesiyle göstereceğiz; yani,

$$A \triangle B = \{(A \cup B) \setminus (A \cap B)\} \tag{32}$$

dir.

$$(A \triangle B) = (B \triangle A)$$

olduğu hemen görülür. Simetrik Fark kümesinin Venn çizeneği Şekil 13'deki gibidir. [29]

[29] Simetrik Fark

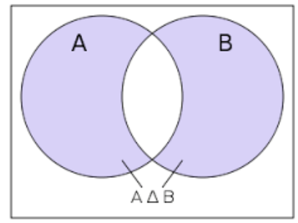

Figure 13: Simetrik Fark : $A \triangle B$

0.9 *Kümeler Cebiri*

Bu kesimde *bileşim, arakesit, fark, simetrik fark* ve *tümleme* işlemleriyle ilgili başlıca özelikleri çıkaracağız.

Theorem 0.20.

(i) Her küme, o kümeyi belirleyen önermenin belirlediği evrensel küme tarafından kapsanır.

(ii) Bir küme ile onun tamlayan kümesinin bileşimi, evrensel kümelerine eşittir.

Kanıt: $A = \{ x \mid \phi(x) \}$ herhangi bir küme ise

$$E = \{ x \mid \phi(x) \vee \phi'(x) \} \tag{33}$$

olur. A kümesinin evrensel kümesi E ise aşağıdaki bağıntıları göstermeliyiz.

$$(i) \quad A \subset E$$
$$(ii) \quad E = A \cup A'$$

(i):

$$a \in A \Rightarrow \phi(a) \Rightarrow a \in E$$

(ii):

$$\begin{aligned} a \in E &\Longrightarrow [\phi(a) \vee \phi'(a)] \\ &\Longrightarrow [(a \in A) \vee (a \in A')] \\ &\Longrightarrow a \in A \cup A' \end{aligned}$$

olduğundan,

$$E \subset (A \cup A') \qquad \text{ve} \qquad E \supset (A \cup A')$$

bağıntıları vardır. Bu isteneni verir.

Önceden söylediğimiz gibi, evrensel küme, ele aldığımız kümeyi belirleyen Φ önermesine bağlı olarak değişmektedir. İşlemlerde kolaylığı sağlamak için, ele alacağımız bütün kümeleri kapsayacak kadar büyük; ama yalnız onları kapsayacak kadar küçük bir evrensel kümenin seçildiğini varsayacağız. Tabii, buradaki *"büyük"* ve *"küçük"* kavramları kişiye göre değişir.

Ancak, önceden söylediğimiz gibi, farklı evrensel kümelerin seçilmesi, kümelerle yapacağımız işlemlerin özeliklerini değiştirmeyecektir.

Buna göre, E evrensel kümesinin belli bir ϕ açık önermesini sağlayan öğelerinden oluşan A altkümesi

$$A = \{\ a \mid a \in E \wedge \phi(a)\} = \{\ a \mid \Phi(a) \wedge \phi(a)\} \tag{34}$$

dir. Buradaki ϕ önermesinin, genellikle, E yi belirleyen Φ önermesinden farklı olabileceğine dikkat edilmelidir. Zaten Φ önermesiyle pek ilgilenmeyeceğiz. Ele alacağımız bütün kümeler E ye ait olacağından, yukarıdaki ifadeyi daha kısa olarak,

$$A = \{\ a \mid \phi(a)\ \} \tag{35}$$

biçiminde yazabiliriz.

0.10 *Alıştırmalar*

30

30 Alıştırmalar

1. $U = \{\text{alfabemiz}\}$, $A = \{a, a, a, b, b, a, c\}$, $B = \{c, b, a, c\}$, $C = \{c, b, a\}$ kümeleri veriliyor. $A; B; C$ kümeleri arasındaki ilişki nedir?

2. A , B ve C kümelerinin evrensel kümesi E ise aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz.

   (a) $A \cup E = E$

   (b) $A \cap E = A$ $A \cup \emptyset = A$ *(boşküme bileşim işleminin birimidir)*

   (c) $A \cap \emptyset = \emptyset$ *(boşküme, arakesit işleminin yutanıdır)*

   (d) $A \cup A = A$ *(Bileşimde Eşgüçlülük Kuralı)*

   (e) $A \cap A = A$ *(Arakesitte Eşgüçlülük Kuralı)*

3. $U = \{\text{doğal sayılar}\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ve $B = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

   (a) $A \subset U$

   (b) $B \subset A$

   (c) $\emptyset \subset U$

   (d) $A \in U$

   (e) $A \subset B\}$

4. A , B ve C kümelerinin evrensel kümesi E ise aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz.

   (a) $A \cup B = B \cup A$ *(Bileşim İşleminin Yer Değiştirebilirliği)*

(b) $A \cap B = B \cap A$ *(Arakesitin Yer Değiştirebilirliği)*

(c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Bileşimin Birleşebilirliği)*

(d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Arakesitin Birleşebilirliği)*

(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Arakesit Üzerine Dağılma)*

(f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Bileşim Üzerine Dağılma)*

5. A ile B kümeleri için aşağıdaki bağıntıların sağlandığını gösteriniz.

1. $A = B \quad \Rightarrow \quad B = A$
2. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \quad \Rightarrow \quad (A \subset C)$
2. $(A = B) \wedge (B = C) \quad \Rightarrow \quad (A = C)$
4. $(A = B) \quad \Longrightarrow [(a \in A) \Longrightarrow (a \in B)]$
5. $a \in A \quad \Longrightarrow \quad a \notin A'$
6. $a \in A' \quad \Longrightarrow \quad a \notin A$
7. $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad A \cup B = B$
8. $A \subset Bv \Longrightarrow \quad A \cap B = A$

6. A ile B kümeleri için aşağıdaki bağıntıların sağlandığını gösteriniz.

a. $A \subset (A \cup B)$
b. $B \subset (A \cup B)$
c. $(A \cap B) \subset A$
d. $(A \cap B) \subset B$
e. $(A \cap A') = \emptyset$

7. A, B, C kümeleri için aşağıdaki bağıntıların sağlandığını gösteriniz.

a. $A = A$
e. $A \setminus B \neq B \setminus A$

8. A, B, C kümeleri için aşağıdaki bağıntıların sağlandığını gösteriniz.

1.$A \cup E = E$ (E, Bileşimin Birim Öğesidir)
2.$A \cap E = A$ (E, Arakesitin Birim Öğesidir)
8.$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (De Morgan Kuralı)
9.$(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan Kuralı)
10.$(A \subset B) \Rightarrow A' \supset B'$

9. A, B, C kümeleri için aşağıdaki bağıntıların sağlandığını gösteriniz.

1.	$A \subset E$	$\Rightarrow$	$A \cup E = E$
2.	$A \subset E$	$\Rightarrow$	$A \cap E = A$
3.	$x \in A$	$\Longrightarrow$	$x \notin A' \Longrightarrow x \in E \setminus A'$
4.	$x \in A'$	$\Longrightarrow$	$x \notin A \Longrightarrow x \in E \setminus A$
5.	$x \in (A')'$	$\Longrightarrow$	$x \notin A' \Longrightarrow x \in A$
6.	$x \in E'$	$\Longrightarrow$	$x \notin E \Longrightarrow \neg U(x) \Rightarrow x \in \emptyset$
7.	$x \in \emptyset'$	$\Longrightarrow$	$x \notin \emptyset \Longrightarrow U(x) \Longrightarrow x \in E$

10. X, Y kümeleri için aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

   (a) $(X \cap Y) \setminus C = (X \setminus C) \cap (Y \setminus C)$
   (b) $(X \cup Y) \setminus C = (X \setminus C) \cup (Y \setminus C)$
   (c) $(X \setminus Y) \cap C = (X \cap Y) \setminus (X \cap C) = (X \setminus C) \cup Y$
   (d) $X \triangle Y = X' \triangle Y' = X \cup Y) \cap (X' \cup Y') = (Y \setminus X) \cup (X \setminus Y)$
   (e) $X \cup Y = (X \triangle Y) \triangle (X \cap B)$

11. Aşağıdakilerden hangisi bir küme tanımlar?

   (a) Zeki öğrenciler.
   (b) $5x - 3 = 0$ eşitliğini sağlayan gerçel sayılar.
   (c) $4x - 7 = 0$ eşitliğini sağlayan tamsayılar.
   (d) Bütün yazarlar.
   (e) Klavyedeki bütün harfler ve rakamlar (alfasayısal karekterler)

12. $N = \{\text{doğal sayılar}\}$, $A = \{12, 14, 16, 18, 20\}$ ve $B = \{11, 13, 16, 17, 18\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

   (a) $12 \in A$
   (b) $9 \in B$
   (c) $12 \notin B$
   (d) $A \in N$
   (e) $A = \{\text{çift sayılar}\}$

13. Hangisi doğru, hangisi yanlış?

   (a) $\emptyset = \{\emptyset\}$
   (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   (c) $\emptyset = \{0\}$
   (d) $x \in \{x\}$

14. Aşağıda küme simgesiyle yazılan kümeleri liste halinde yazınız (kümeyi belirleyecek bir kaç öğe yeterlidir)

(a) Asya ülkelerinin başkentleri.

(b) Avrupanın en büyük kentleri.

(c) $\{x|x^2 = 81\}$

(d) Sınıftaki öğrenciler.

15. $A = \{a, a, a, b, b, a, c\}$, $B = \{c, b, a, c\}$, $C = \{c, b, a\}$ kümeleri veriliyor. $A; B; C$ kümeleri arasındaki ilişki nedir?

16. $E = \{\text{alfabemiz}\}$, $A = \{b, d, f, h\}$ ve $B = \{a, c, f, g, h\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

(a) $A \subset E$

(b) $B \subset A$

(c) $\emptyset \subset E$

(d) $A \in E$

(e) $A \not\subset B\}$

17. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{3, 5\}$, $D = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $E = \{c, d, h\}$ kümelerinin Venn diyagramlarını çiziniz. Aralarındaki ilişkiyi diyagram üzerinde açıklayınız.

Bibliography

[1] Paul J. Cohen. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Dover Publications, New York, 2007.

[2] Paul R. Halmos. *Naive Set Theory*. Van Nostrand Reinhold, London, 1960.

[3] E. Kamke. *Theory of Sets*. Dover Pub., New York, 1950.