TIMUR KARAÇAY - HAYDAR EŞ

CALCULUS

SEÇKIN YAYINCILIK
ANKARA

Contents

1 Karmaşık Sayılar 5

Bibliography 37

1

Karmaşık Sayılar

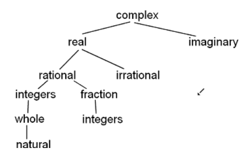

Figure 1.1: Karmaşık Sayının Düzlemsel Gösterimi

Karmaşık sayılar gerçel sayıların genişlemesiyle elde edilen daha büyük bir kümedir. Genişleme şu gereksemeden doğmuştur: $x^2 = +1$ denklemimin çözümü $+1, -1$ sayılarıdır ve $\mathbb{R}$ içindedir. Ama $x^2 = -1$ denklemimin çözümü $\mathbb{R}$ içinde yoktur. Özellikle elektromanyetik teoride bütün ikinci derece denklemlerin çözüm kümesine gerekseme doğar. O nedenle $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini bütün ikinci derece denklemlerin köklerini içerecek büyüklüğe genişletmek gereği vardır. Bu genişleme kolay yapılır.

$$x^2 = -1$$

denkleminin çözümü olarak $+i$ ve $-i$ sayıları tanımlanır.

Tanım 1.1.

$$\sqrt{-1} = +i$$

denilir. Bu bir tanımdır. $+i$ sayısına karmaşık sayıların birim öğesi denilir.

1.1 Karmaşık Sayılar

Belli türden denklemleri çözebilmek için bazı sayı kümelernin yetersiz kaldığını; bu tür denklemlere çözüm bulmak için sözkonusu sayı kümelerinin genişletilerek daha büyük sayı kümeleri elde edildiğini biliyoruz. Örneğin,

$x + 3 = 0$ gibi bir denklem doğal sayılarda çözülemeyince, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ genişletilerek tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ oluşturulmuştur.

$3x + 4 = 0$ gibi bir denklem $\mathbb{Z}$'de çözülemeyince, bu küme genişletilerek rasyonel sayılar kümesi $(\mathbb{Q})$ oluşturulmuştur.

$x^2 - 7 = 0$ gibi bir denklem $\mathbb{Q}$'da çözülemeyince, bu küme irrasyonel sayılarla genişletilerek gerçel (reel) sayılar kümesi $\mathbb{R}$ oluşturulmuştur. Gerçel (real) sayılar kümesi ile sayı ekseninin noktalarının bire bir eşlendiğini hatırlayınız.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözerken,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ve

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac > 0 &\quad \text{ise, denklemin gerçel iki kökü vardır} \\ b^2 - 4ac = 0 &\quad \text{ise, denklemin gerçel ve eşit iki kökü vardır} \\ b^2 - 4ac < 0 &\quad \text{ise, denklemin gerçel kökü yoktur} \end{aligned}$$

kurallarını anımsayınız.

Dikkat ederseniz, üçüncü olasılıkta negatif sayıların karekökü söz konusudur. Bu sayılar, $\mathbb{R}$'nin elemanı değildir.

Örneğin, $x^2 + 3 = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ içinde çözümü yoktur. Çünkü her gerçel sayının karesi pozitiftir; dolayısıyla $x^2 = -3$ denklemini sağlayan hiçbir gerçel sayı yoktur.

Öyleyse $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin genişletilerek, içinde bu tür denklemlerin de çözülebildiği daha büyük bir sayı sistemi oluşturmaya gerek vardır.

$x^2 + 1 = 0$ denklemini sağlayan $\sqrt{-1}$ sayısına *sanal (imajiner) sayı birimi* denir ve $i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1$ biçiminde gösterilir.

1.2 Gerçel ve Sanal Kısımlar

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $a + ib$ biçimindeki sayılara

karmaşık (kompleks) sayılar

denir.

Karmaşık sayıyı genellikle z ve bu sayıların oluşturduğu kümeyi $\mathbb{C}$ ile göstereceğiz.

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in R\}$$

dir. $z = a + ib$ karmaşık sayısında;

a'ya bu sayının gerçel (reel) kısmı denir ve $ge(z)$ ile gösterilir. b'ye bu sayının sanal (imajiner) kısmı denir ve $san(z)$ $[Im(z)]$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} ge(z) = a &\Rightarrow [san(z) = b \wedge z = ge(z) + i.san(z) \\ san(z) = 0 &\Rightarrow z \in \mathbb{R}\ [\mathbb{R} \subset \mathbb{C}] \\ ge(z) = 0 &\Rightarrow z = o + bi \Leftrightarrow z = bi \end{aligned}$$

Örnek 1.2.

$z = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$ karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulalım:

$$z = \frac{1}{2} + i(-\frac{2}{3}) \quad \text{ise}$$
$$san(z) = -\frac{2}{3}$$

olur.

1.3 *Karmaşık sayıların Eşitliği*

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olsun.

$$a + ib = c + id \Longrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

dir.

Örnek 1.3.

$z_1 = 3x - i\frac{1}{2}$ ve $z_2 = -36 + (y+1)i$ sayılarının eşit olabilmesi için x ve y'nin ne olacağını bulalım:

$$3x + i(-\frac{1}{2}) = -36 + i(y+1)$$

$$3x = -36; \qquad y + 1 = -\frac{1}{2}$$
$$x = -12; \qquad y = -\frac{3}{2}$$

bulunur.

Örnek 1.4.

$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{y^2}i$ sayısının karmaşık sayı olabilmesi için x ve y nin ne olacağını bulalım:

Verilen sayının karmaşık sayı olabilmesi için,

$$\frac{x}{x-1}, \frac{1}{y^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \qquad x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \;\; \text{ve} \;\; x \in \mathbb{R}$$
$$y^2 \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \;\; \text{ve} \;\; y \in \mathbb{R}$$

olmalıdır.

Örnek 1.5.

$4x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$\Delta = (-2)^2 - 4.4.1 = 4 - 16 = -12 < 0$ olduğundan, denklemin karmaşık sayı olan iki kökü vardır:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2.4}$$

eşitliğinden

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{-1}.\sqrt{12}}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{8}\sqrt{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

çıkar. Benzer şekilde x_2 de hesaplanabilir ve

$$S = \{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i), \quad \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)\}$$

bulunur.

1.4 Sanal Birimin Kuvvetleri

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, i'nin kuvvetleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$i = \sqrt{-1}$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2.i = -i$
$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^5 = i^4.i = i$	$i^6 = i^4.i^2 = -1$
$i^7 = i^4.i^3 = -i$	$i^8 = i^4.i^4 = 1$	$i^9 = (i)^{4.2}.i = i$
$i^{10} = (i)^{4.2}i^2 = -i$	$i^{11} = (i)^{4.2}i^3 = -i$	$i^{12} = i^{4.3} = 1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$i^{4n+1} = i$	$i^{4n+2} = -1$	$i^{4n+3} = -i$
$i^{4n} = 1$		

Örnek 1.6.

i^{-27} sayısını hesaplayalım.

$$i^{-27} = i^{-(4\times6+3)} = \frac{1}{i^{4.6}.i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{(-i)i} = \frac{i}{1} = i$$

bulunur.

Örnek 1.7.

$$\frac{3 - i^{412}}{1 - i^{210}}$$

ifadesini sadeleştirelim:

$$\begin{aligned}\frac{3 - i^{412}}{1 - i^{210}} &= \frac{3 - i^{4\times103}}{1 - i^{4\times52}.i^2} \\ &= \frac{(3 - (1))}{1 - 1.(-1)} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

bulunur.

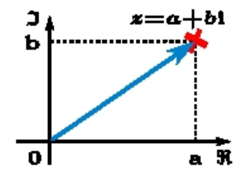

Figure 1.2: Karmaşık Sayının Düzlemsel Gösterimi

1.5 Geometrik Gösterim

Karmaşık sayılar ile analitik düzlemin noktaları bire bir eşlenebilir. Bu eşlemede, $x+yi$ sayısına (x,y) noktası karşılık getirilir.

Şekilde, $0+0i$ sayısı, $O(0,0)$ noktası ile, $x+0i$ sayıları Ox ekseni ile, bütün $0+yi$ sayıları, Oy ekseni ile eşlenir. Ox eksenine gerçel (reel) eksen, Oy eksenine *sanal (imajiner)* eksen denir.

Yukarıda belirtildiği gibi karmaşık sayılarla bire bir eşlenen düzleme, *karmaşık düzlem* diyeceğiz.

1.6 Karmaşık Sayının Eşleniği

Şekil 1.3'ü inceleyiniz. $x+yi$ ve $x-yi$ sayılarından birine diğerinin *eşleniği* denir. z karmaşık sayısının eşleniğini $\overline{z}$ biçiminde göstereceğiz.

$$\overline{z} = \overline{(x+yi)} = x + (-y)i = x - yi$$

dir. Şekil dikkatle incelendiğinde bir karmaşık sayı ile eşleniğinin, gerçel eksene (Ox eksenine) göre simetrik oldukları görülür.

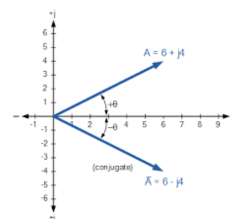

Figure 1.3: Karmaşık Eşlenik

Theorem 1.8. *Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği kendisidir.*

İspat: $z = x+yi$ karmaşık sayısını düşünelim.

$$(\overline{z})^{-} = [(x+yi)^{-}]^{-} = [x-yi]^{-} = x+yi = z$$

olur. Örneğin,

$$z = 1+2i \Rightarrow \overline{z} = 1-2i \Rightarrow \overline{(\overline{z})} = 1+2i$$

Örnek 1.9.

Aşağıda verilen karmaşık sayıların eşleniklerini bulalım.

a) $1-\frac{1}{2}i$ c) 203 e) $\sqrt{-16}+3$
b) $\sqrt{2}+i$ d) $\sqrt{-7}$ f) $7-\sqrt{-9}+\sqrt{-4}$

Çözümler:

a) $1-\frac{1}{2}i$'nin eşleniği $1+\frac{1}{2}i$'dir.

b) $\sqrt{2}+i$'nin eşleniği $\sqrt{2}-i$'dir.

c) 203'ün eşleniği 203 tür.

d) $\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$'nin eşleniği $-\sqrt{7}i$'dir.

e) $\sqrt{-16}+3 = 3+4i$'nin eşleniği $3-4i$'dir.

f) $7-\sqrt{-9}+\sqrt{-4} = 7-3i+2i = 7-i$'nin eşleniği $7+i$'dir.

1.7 Mutlak Değer (modül)

Karmaşık düzlem üzerinde $z = x + yi$ sayısına karşılık gelen nokta Z olsun. ZAO dik üçgeninde,

$$| OZ |^2 = | x |^2 + | y |^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

veya

$$| z | = | x + yi | = \sqrt{x^2 + y^2}$$

yazılır.

Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına uzaklığına bu sayının *modülü* veya *mutlak değeri* denir.

$z = x + yi$ sayısının modülü $| z |$ ile gösterilir. $| z | = \sqrt{x^2 + y^2}$ dir.
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ ve $| z | \geq 0$ dır.

Örnek 1.10.

$z = 3 - 4i$ sayısının modülünü bularak karmaşık düzlemde gösterelim:
$| z | = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
olur.

Örnek 1.11.

olduğunu gösterelim:
$z = a + bi$ olsun. $| z | = \sqrt{a^2 + b^2}$ dir.

$$| z | = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 + 0i = 0$$

ve

$$z = 0 \Rightarrow z = 0 + 0i \Rightarrow | z | = \sqrt{0^2 + 0^2} \Rightarrow | z | = 0$$

bulunur.

Örnek 1.12.

$z = -9i$ sayısının modülünü bulalım.
$|z| = | - 9i| = \sqrt{8 - 9)^2} = 9$ olur.

1.8 Toplama ve Çıkarma

İki karmaşık sayı $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı i'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. Bu nedenle,

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Yandaki şekli inceleyiniz.

Örnek 1.13.

$z_1 = 2 - 3i$ ve $z_2 = 1 + 2i$ ise $z_1 + z_2$ ve $z_1 - z_2$ toplam ve farklarını bularak karmaşık sayılar düzleminde gösterelim.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 - 3i) + (1 + 2i) \\ &= (2 + 1) + (-3 + 2)i \\ &= 3 - i \\ z_1 - z_2 &= (2 - 3i) - (1 + 2i) \\ &= (2 - 1) + (-3 - 2)i \\ &= 1 - 5i \end{aligned}$$

Yandaki şekil üzerinde, karmaşık sayıların toplam ve farkının geometrik yorumunu yapınız.

1.9 Toplama Çıkarmanın özelikleri

Kapalılık Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ olsun

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

bulunur. $a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + c), (b + d) \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$(z_1 + z_2) \in \mathbb{C}$$

olur. O halde, karmaşık sayılar kümesi toplama işlemine göre *kapalıdır.*

Etkisiz (birim) Eleman Varlığı

$z_1, 0 \in \mathbb{C}$, $z_1 = a + bi$ ve $0 = 0 + 0i$ olsun.

$$\begin{aligned}
z_1 + 0 &= a + bi + 0 + 0i; \\
&= (a+0) + (b+0)i \\
&= a + bi \\
&= z_1 \\
0 + z_1 &= 0 + 0i + a + bi \\
&= (0+a) + (0+b)i \\
&= a + bi \\
&= z_1
\end{aligned}$$

olur. O halde, sıfır, karmaşık sayılarda toplama işlemine göre *etkisiz (birim) eleman*dır.

Ters Eleman Varlığı

$z \in \mathbb{C}$ ve $z = a + bi$ ise $-z = -a - bi$ diye tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
z + (-z) &= (a+bi) + (-a-bi) \\
&= (a-a) + (b-b)i \\
&= 0 + 0i \\
&= 0 \\
(-z) + (z) &= (-a-bi) + (a+bi) \\
&= (-a+a) + (-b+b)i \\
&= 0 + 0i \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde, toplama işlemine göre, *her elemanın tersi* vardır.

Birleşme Özeliği

$z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, $z_3 = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= [(a+bi) + (c+di)] + (x+yi) \\
&= [(a+c) + (b+d)i] + (x+yi) \\
&= [(a+c) + x] + [(b+d) + y]i \\
&= [a + (c+x)] + [b + (d+y)[i \\
&= a + bi + [(c+x) + (d+y)i] \\
&= z_1 + (z_2 + z_3)
\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılarda toplama işleminin *b*irleşme özeliği vardır.

$(\mathbb{C}, +)$ sistemi kapalılık, etkisiz eleman, ters eleman ve birleşme özelikleri olduğu için *grup*tur.

Değişme Özeliği

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 + a + bi$, $z_2 = c + di$ olsun.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a+bi) + (c+di) \\ &= (a+c) + (b+d)i \\ &= (c+a) + (d+b)i \\ &= (c+di) + (a+bi) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin *değişme özeliği* vardır. Sonuç olarak,

$(\mathbb{C}, +)$ sistemi *değişmeli bir grup*tur.

1.10 Alıştırmalar

1. Köklerinden biri $1 - 2i$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

2. $2i^6 + \left(\frac{1}{(-i)^3}\right) + 6i^{-5} - 2i$ sayısını $a + ib$ şeklinde yazınız.

3. $\frac{5}{i^2} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}}$ sayısını bulunuz.

4. $(1+i)^{14}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

5. $(3 - 2i) = u(1+i)$ ise u sayısını bulunuz.

6. $P(x) = 3x^{17} - x^8 + 2$ ise $P(i)$'yi bulunuz.

7. $z = x + yi$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise $(z - \overline{z})$ ve $(\overline{z} - z)$ karmaşık sayılarını bulunuz.

8. Aşağıdaki ifadeleri $a + ib$ biçiminde yazınız.

$$\begin{aligned} i^{16} &= ? \\ \sqrt{-64}+\sqrt{-5}-\sqrt{-25} &= ? \\ 5\sqrt{-121} &= ? \\ \sqrt{-7}.5\sqrt{-3} &= ? \\ 12\sqrt{5}\sqrt{-\frac{4}{5}} &= ? \\ \frac{3}{15\sqrt{-1}} &= ? \\ 5\sqrt{-3}+\sqrt{-9} &= ? \\ \frac{1}{7}\sqrt{-243}-8\sqrt{-28}-\frac{2}{3}\sqrt{-63} &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^{19} &= ? \\ \sqrt{-\frac{1}{3}} &= ? \\ 3\sqrt{-60} &= ? \\ \sqrt{-27}\sqrt{-\frac{1}{3}} &= ? \\ \frac{12\sqrt{-15}}{16\sqrt{-5}} &= ? \\ \frac{10}{\sqrt{-5}} &= ? \\ (i\sqrt{3})^4 &= ? \end{aligned}$$

9. Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.
   a) $\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}-\frac{1}{i^6}$ b) $4i+6i^2-i^3+2i^4+3i^5$
   c) $\sqrt{-\frac{x}{3}}+\sqrt{-\frac{x}{9}}-\sqrt{-\frac{x}{27}}$ d) $\sqrt{-4x^4}-\sqrt{-9x^4}-\sqrt{100x^4}$

10. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
    a) $x^2-2x+10=0$ b) $x^2-x+1=0$ c) $x^2-x+3=0$
    d) $2y^2=3y-4$ e) $\frac{t^2}{2}+\frac{3t}{5}=-\frac{3}{10}$ f) $7u^2+5u=-1$

11. $z_1=3-m+ni$ ve $z_2=(m-2n)i$ sayılarının eşit olması için m ve n kaçtır?

12. Aşağıdaki işlemleri yapınız.
    a) $(17+\frac{1}{2}i)+(17-\frac{1}{2}i)$ d) $\frac{i}{2}(1-\sqrt{9})$
    b) $6+(2-i)$ e) $(5+\sqrt{-4})+(1-4i)$
    c) $(3+2i)+i$ f) $(i^2-i)+(i^4-i^3)$

1.11 *Çarpma*

İki karmaşık sayı $z_1 = a+bi$ ve $z_2 = c+di$ olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı i'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. İki polinomun çarpımı işlemi ile dağılma ve birleşme özeliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi).(c+di) \\ &= a(c+di)+bi(c+di) \\ &= ac+adi+bci+bdi^2 \qquad "i^2=-1" \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

bulunur.

Örneğin,

$z_1 = (3+i)$ ve $z_2 = 1+2i$ ise $z_1.z_2$ yi bulalım:
vspace*5.0cm

$$z_1.z_2 = (3+i)(1+2i) = (3.1-1.2)+(3.2+1.1)i = 1+7i$$

Theorem 1.14. *Her $z = x+yi$ karmaşık sayısı için $\mid z \mid^2 = z.\bar{z}$ dir.*

İspat:

$$\begin{aligned} z.\bar{z} &= (x+yi)(x-yi) \\ &= x^2+y^2 \\ &= (\sqrt{x^2+y^2})^2 \\ &= \mid z \mid^2 \end{aligned}$$

1.12 *Çarpımın Özelikleri*

Kapalılık Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ olsun.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

olur. $(ac-bd) \in \mathbb{R}$ ve $(ad+bc) \in \mathbb{R}$ olduğu için iki karmaşık sayının çarpımı yine bir karmaşık sayıdır.

Karmaşık sayılar kümesi çarpma işlemine göre *kapalıdır.*

Etkisiz (birim) Eleman Varlığı

$z_1, 1 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a+bi$, $1 = 1+0i$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} z_1.1 &= (a+bi)(1+0i) \\ &= (a.1-b.0)+(a0+b.1)i \\ &= a+bi = z_1 \end{aligned}$$

bulunur. Ohalde, $1 = 1+0i$ sayisi karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre *etkisiz (birim) eleman*dır.

Ters Eleman Varlığı

z karmaşık sayının çarpma işlemine göre tersi z^{-1} ile gösterilsin.

$$z.z^{-1} = 1$$

olmalıdır. Şimdi bu eşitliği sağlayan z^{-1} sayısını belirleyeceğiz:

$z = a + bi$ ise

$$\begin{aligned} z.z^{-1} = 1 &\implies (a+bi).z^{-1} = 1 \\ &\implies z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{z} \\ & \text{"Pay ve paydayı } a - bi \text{ ile çarpalım."} \\ &\implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &\implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \end{aligned}$$

bulunur. $z^{-1} \in \mathbb{C}$ olduğu açıktır. Son eşitliği kullanarak sağlama yapabiliriz:

$$\begin{aligned} z.z^{-1} &= (a+bi).[\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i] \\ &= \underbrace{(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2})}_{1} + \underbrace{(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2})}_{0} i \\ z.z^{-1} &= 1 + 0i \\ z.z^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Sıfır hariç, karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre *her elemanın tersi* vardır.

Birleşme Özeliği

$z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned} (z_1.z_2).z &= [(a+bi)(c+di)].(x+yi) \\ &= [(ac-bd) + (ad+bc)i](x+yi) \\ &= [(ac-bd).x - (ad+bc)y] + [(ac-bd)y + (ad+bc)x]i \\ &= (acx - bdx - ady - bcy)(acy - bdy + adx + bcx)i \\ &= [a(cx-dy) - b(dx+cy)] + [a(cy+dx) + b(cx-dy)]i \\ &= (a+bi)[(cx-dy) + (cy+dx)i] \\ &= z_1.(z_2.z) \end{aligned}$$

bulunur.

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin

birleşme özeliği

vardır.

Değişme Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ olsun. Gerçel sayılarda dağılma, birleşme ve çarpma işlemine göre değişme özeliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi).(c+di) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\ &= (ca-db)+(da+cb)i \\ &= (c+di).(a+bi) \\ &= z_2.z_1 \end{aligned}$$

bulunur.

Karmaşık sayılarda çarpma işlemine göre

değişme özeliği

vardır.

Sonuç olarak, $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ sistemi çarpma işlemine kapalıdır; etkisiz elemanı vardır; her elemanın tersi vardır; birleşme ve değişme özeliklerini sağlar. Öyleyse, sistem

değişmeli bir grup

tur.

Dağılma Özeliği

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinin varlığını gösterelim:

$z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned} z_1.(z_2+z) &= (a+bi)[(c+di)+(x+yi)] \\ &= (a+bi)[(c+x)+(d+y)i] \\ &= [a(c+x)-b(d+y)]+[a(d+y)+b(c+x)]i \\ &= (ac+ax-bd-by)+(ad+ay+bc+bx)i \\ &= [(ac-bd)+(ad+bc)i]+[(ax-by)+(ay+bx)i] \\ &= z_1.z_2+z_1.z \end{aligned}$$

bulunur. Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özeliği vardır. Benzer şekilde, sağdan dağılma özeliğinin varlığı da gösterilebilir.

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine *d*ağılma özeliği vardır.

O halde $(\mathbb{C} - 0, +, \cdot)$ sistemi bir *cisim*dir.

Çarpma İşleminde Kısaltma Kuralı

Theorem 1.15. *$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_3 \neq 0$ ve $uw = vw$ ise $z_1 = z_2$ dir.*

İspat: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ ve $z_3 = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned} uw &= (a+bi)(x+yi) \\ &= (ax-by)+(ay+bx)i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} vw &= (c+di)(x+yi) \\ &= (cx-dy)+(cy+dx)i \end{aligned}$$

olacaktır. $uw = vw$ olması için

$$(ax-by)+(ay+bx)i = (cx-dy)+(cy+dx)i$$

olmalıdır. Buradan,

$$(ax-by-cx+dy)+(ay+bx-cy-dx)i = 0$$

çıkar. Sol yanın eşleniği ile çarparsak

$$(ax-by-cx+dy)^2+(ay+bx-cy-dx)^2 = 0$$

ya da

$$[(a-c)x+(d-b)y]^2+[(a-c)y+(b-d)x]^2 = 0$$

yazabiliriz. Bu ifadedeki bütün sayılar gerçel ve $z_3 = x + yi \neq 0$ olduğundan, son eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$a = c \quad \text{ve} \quad b = d$$

olmasıdır. Öyleyse,

$$z_1 = z_2$$

olur.

1.13 Bölme

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_2 \neq 0$ olsun.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$

"Pay ve paydayı, paydanın eşleniği ile çarpalım".

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(ac-bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac-bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}$$

olur.

İki karmaşık sayının birbirine bölümünü elde etmek için paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

Örnek:

$$\frac{7+3i}{5-2i}$$

işlemini yapalım:

$$\begin{aligned}\frac{7+3i}{5-2i} &= \frac{(7-3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} \\ &= \frac{(35-6)+(14+15)i}{5^2+2^2} \\ &= \frac{29+29i}{29} \\ &= 1+i\end{aligned}$$

Bölme işlemini ters eleman yardımıyla şöyle tanımlayabiliriz:
$z_1 = a+bi$ ve $z_2 = c+di$ ve $z_2 \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

dir.

İki karmaşık sayının birbirine bölümü; bölenin tersi ile bölünenin çarpımına eşittir.

Theorem 1.16. *$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ise, aşağıdaki bağıntılar vardır.*

$$\begin{aligned}|\, uv \,| &= |\, z_1 \,| \,.\, |\, z_2 \,| \\ |\, \frac{z_1}{z_2} \,| &= \frac{|\, z_1 \,|}{|\, z_2 \,|} \quad (z_2 \neq 0) \\ |\, z_1 + z_2 \,| &\leq |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,| \\ |\, z_1 \,| - |\, z_2 \,| &\leq |\, z_1 + z_2 \,|\end{aligned}$$

Bu teoremin ispatı öğrenciye bırakılmıştır.

1.14 *Alıştırmalar*

1. Aşağıdaki ifadeleri $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a+ib$ biçiminde yazınız.
   a) $(3+4i)(4i-3)$

   b) $(6i-1)(1+6i)$

   c) $(1+\sqrt{-7})^2$

d) $(3-5i)^2$

e) $(-2+5i)(4+3i)$

f) $(5-2i)(3+4i)$

g) $\sqrt{-9}-3)(2-\sqrt{-1})$

h) $(\sqrt{-25}+2)(\sqrt{-16}-2)$

2. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

(a) $\frac{4+i}{2-3i}$

(b) $\frac{3+i}{5i}$

(c) $\frac{1-\sqrt{-7}}{i}$

(d) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{-3}}$

(e) $\frac{5-\sqrt{-7}}{\sqrt{-7}}$

(f) $\frac{i}{1+i}$

(g) $\frac{i^5+1}{i^5}$

(h) $\frac{i^3-1}{i^3}$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
a) $x^2-2ix-4=0$ b) $ix^2+5x-4i=0$

4. $z=2-i$ ise $z^{-1}-i$ bulunuz.

5. $z=1-i$ ise $z^2\cdot z^{-1}$ ifadesini bulunuz.

6. $\mid z^2 \mid = \mid z \mid^2$ olduğunu gösteriniz.

7. $z=2-3i$ ise z^{-1}'i bulunuz.

8. $(2+3i)\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$ sayısını $a+ib$ şeklinde yazınız.

9. $z=\left(\frac{i}{3-i}\right)\left(\frac{1}{2+3i}\right)$ sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.

10. $|z|=|\overline{z}|$ olduğunu gösteriniz.

1.15 Geometrik Yorumlar

Toplama İşleminin Geometrik Yorumu

Karmaşık iki sayı $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun. z_1 ve z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntülerine, sırayla, A ve B diyelim.

Yandaki şekilde görüldüğü gibi $OACB$ paralel kenarını çizelim. Şekilde taralı olan,

$$O\overset{\Delta}{D}B \cong A\overset{\Delta}{E}C \quad \text{(A.K.A. eşlik kuralı)}$$

dir. Bu üçgenlerin eşliğinden yararlanarak $\mathbb{C}$ noktasının koordinatları $(a + c, b + d)$ olur. Yani C noktası,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

Şekli dikkatle inceleyecek olursak aşağıdaki sonucu çıkarırız.

İki karmaşık sayının mutlak değerleri toplamı, bu sayıların toplamının mutlak değerinden küçük olamaz.

Üçgen eşitsizliği diye bilinen bu gösterimin sembolle ifadesi şöyledir:

$$| z_1 | + | z_2 | \geq | z_1 + z_2 |$$

Çıkarma İşleminin Geometrik Yorumu

Yandaki şekli inceleyiniz. $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ olsun. z_1, z_2 ve $-z_2$ sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntülerine, sırasıyla, A, B ve P diyelim. Toplama işlemine benzer şekilde hareket edilerek, R noktasının koordinatları, $(a - c, b - d)$ bulunur. Yani R noktası,

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$$

sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür. Şekilden de kolayca görüleceği gibi, şu sonucu yazabiliriz:

İki karmaşık sayının mutlak değerlerinin farkı, farklarının mutlak değerinden büyük olamaz.

Bunun sembolle ifadesi şöyledir:

$$| z_1 | - | z_2 | \leq | z_1 - z_2 |$$

1.16 İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık

$z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ iki karmaşık sayı olsun. Bu sayılar arasındaki uzaklık, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri arasındaki uzaklık olarak tanımlanır. Dolayısıyla,

$z_1 = x_1 + iy_1$'in görüntüsü $A(x_1, y_1)$
$z_2 = x_2 + iy_2$'in görüntüsü $B(x_2, y_2)$
ise

$$| z_1 - z_2 | = | AB | = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

olur. Tabii,

$$| z_1 - z_2 | = | z_2 - z_1 |$$

olduğunu görmek kolaydır.

Ayrıca z_1, z_2, z_3, z herhangi karmaşık sayılar olmak üzere aşağıdaki özelikler sağlanır:

1. $|z_1^{+} z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$
3. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$
4. $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$
5. $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
7. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

Örnek 1.17.

$z_1 = 1 + i$ ve $z_2 = 1 - i$ sayıları arasındaki uzaklığı bulalım.

$$\left.\begin{array}{lll} z_1 = 1 + i'nin & \text{görüntüsü} & A(1,1) \\ z_2 = 1 - i'nin & \text{görüntüsü} & B(1,-1) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow | z_1 - z_2 | = \sqrt{(1-1)^2 + (1+1)^2} = 2$$

bulunur.

Örnek 1.18.

$\{z : | z - 1 + i | = 2, z \in \mathbb{C}\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösterelim:

$z = x + iy$ olsun.

$$\begin{aligned} & \mid z-1+i \mid = 2 \\ \Rightarrow \quad & \mid x+iy-1+i \mid = 2 \\ \Rightarrow \quad & \mid (x-1)+i(y+1) \mid = 2 \\ \Rightarrow \quad & \mid \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 2 \\ \Rightarrow \quad & (x-1)^2+(y+1)^2 = 4 \end{aligned}$$

bulunur. O halde, verilen denklemi sağlayan karmaşık sayılar, merkezi $(1,-1)$ ve yarıçapı 2 olan çember üzerindeki karmaşık sayılardır. Şekli inceleyiniz.

Örnek 1.19.

$$\{z : \mid z-1+i \mid \leq 2, z \in \mathbb{C}\}$$

kümesini karmaşık düzlemde gösterelim.

$$\mid z-1+i \mid \leq 0 \Rightarrow \mid z-(1-i) \mid \leq 2$$

$(1-i)$ sayısının görüntüsü $M(1,-1)$ olduğundan z sayılarının kümesi M merkezli $r=2$ yarıçaplı dairedir. Yukarıda sağdaki şekle bakınız.

1.17 Kutupsal Gösterim

Sıfırdan farklı bir karmaşık sayı $z = a + ib$ olsun. Bu sayının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsünü orijine birleştiren doğru parçasına r ve r nin Ox ekseni ile oluşturduğu açının ölçüsüne θ diyelim. Şekildeki dik üçgenden,

$$\begin{aligned} \mid z \mid &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \sin\theta &= \frac{b}{\mid z \mid} \quad \text{veya} \quad b = \mid z \mid \sin\theta \\ \cos\theta &= \frac{a}{\mid z \mid} \quad \text{veya} \quad a = \mid z \mid \cos\theta \end{aligned}$$

yazılır. a ve b yerine değerleri konularak,

$$z = a + ib = \mid z \mid \cos\theta + i \mid z \mid \sin\theta = \mid z \mid (\cos\theta + i\sin\theta)$$

veya

$$\mid z \mid = r \quad \text{yazılırsa} \quad z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

elde edilir. Bu biçimdeki gösterime, karmaşık sayıların

kutupsal (veya trigonometrik) gösterimi

denir.

Sıfırdan farklı $z = a + ib$ karmaşık sayısı için,

$$\cos\theta = \frac{a}{\mid z \mid} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \frac{b}{\mid z \mid}$$

eşitliklerini sağlayan θ gerçel sayısına z nin

argümenti

denir ve $arg(z) = \theta$ veya $arg(a + ib) = \theta$ biçiminde gösterilir. $0 \leq \theta < 2\pi$ ise θ ya karmaşık sayının *esas argümenti* denir ve Arg(z) ile gösterilir.

Mutlak değeri ve argümenti verilen bir karmaşık sayı kolayca bulunur.

Karmaşık sayının mutlak değer ve argümentine bu sayının

kutupsal koordinatları

denir ve $(\mid z \mid, \theta)$ veya (r, θ) biçiminde gösterilir.

Karmaşık sayı, θ argümenti radyan cinsinden ve $k \in Z$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} z = a + ib &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] \end{aligned}$$

biçiminde de yazılabileceğini unutmayınız.

$$\mid z \mid = r \quad ve \quad (\cos\theta + i\sin\theta) = cis\theta = e^{i\theta}$$

gösterimini kullanırsak,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta = e^{i\theta}$$

kısaltmasını yazabiliriz.

Örnek 1.20.

$z = 1 + i\sqrt{3}$ sayısının argüment ve esas argümentini bulalım.

$$\mid z \mid = r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

bulunur. Mutlak değer yardımıyla,

$$z = 2(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

yazılır.

Karmaşık sayının kutupsal biçimi düşünülerek, $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$\begin{aligned} \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Rightarrow \quad arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

bulunur. θ için eşitliği sağlayan en küçük pozitif gerçel sayı $\frac{\pi}{3}$ olduğundan, z sayısının esas argümenti $\frac{\pi}{3}$ radyandır.

z sayısını kutupsal biçimde yazalım:

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 2cis60^0$$

veya $k \in z$ olmak üzere,

$$z = 2[\cos(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)] = 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)2e^{i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)}$$

ya da

$$z = 2[\cos(60^0 + k360^0) + i\sin(60^0 + k360^0)] = 2cis(60^0 + k360^0) = 2e^{i(60^o + k360^o)}$$

olur.

z 'nin esas argümentinin, OAB üçgeni yardımıyla bulunabileceğini görünüz.

Örnek 1.21.

Kutupsal koordinatları $(4, 225^0)$ olan karmaşık sayıyı bulalım:

$$\begin{aligned} z &= 4cis225^0 \\ &= 4(\cos 225^0 + i \sin 225^0) \\ &= 4[(-\cos 45^0) + i(-\sin 45^0)] \\ &= 4\left[(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + i(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right] \\ &= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \\ &= -2\sqrt{2}(1+i) \end{aligned}$$

1. $(1+i)^{14}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.
2. $(3-2i) = z_1(1+i)$ ise z_1 sayısını bulunuz.

1.18 *Kutupsal Çarpma ve Bölme*

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ve $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ karmaşık sayılarının çarpımını ve bölümünü bulalım.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1.r_2[(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= r_1.r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \\ z_1.z_2 &= r_1.r_2cis(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.\bar{z}_2 = \frac{r_1}{r_2}cis(\theta_1 - \theta_2)$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitliklerden,

$$\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

ve

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

sonuçlarını çıkarırız.

Örnek 1.22.

$z_1 = 2(\cos 70^0 + i \sin 70^0)$, $z_2 = 3(\cos 50^0 + i \sin 50^0)$ olmak üzere $z_1.z_2$ yi bulalım:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= 2.3cis(70^0 + 50^0) \\ &= 6(\cos 120^0 + i \sin 120^0) \\ &= 6(-\cos 60^0 + i \sin 60^0) \\ &= 6(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= -3 + 3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Örnek 1.23.

$\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$ ve $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ ise $\arg(\frac{z_1}{z_2})$yi bulalım:

$$\begin{aligned} \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Çarpma İşleminin Geometrik Yorumu

$$z_1 = a + ib = r_1 cis\theta_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

ve

$$z_2 = c + id = r_2 cis\theta_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

olsun. z_1 ile z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri sırasıyla A ve B olsun. Ox ekseni üzerinde $\mid OC \mid = 1$ birim uzunluk olacak şekilde C noktası alalım. $m(\hat{C}) = m(\hat{B})$ ve $m(\widehat{COA}) = m(\widehat{BOD})$ olacak şekilde açılar çizip $\overset{\Delta}{AOC}$ ne benzer $\overset{\Delta}{DOB}$ elde edelim.

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{AOC} \sim \overset{\Delta}{DOB} &\Rightarrow \frac{\mid OD \mid}{\mid OA \mid} = \frac{\mid OB \mid}{\mid OC \mid} \\ &\Rightarrow \frac{\mid OD \mid}{\mid z_1 \mid} = \frac{\mid z_2 \mid}{1} \\ &\Rightarrow \mid OD \mid = \mid z_1 \mid . \mid z_2 \mid \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $\widehat{COA} = \theta_1$, $\widehat{COB} = \theta_2$ ve $\widehat{COD} = \theta_1 + \theta_2$ olduğundan $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$ çarpımı, karmaşık düzlemde D noktası ile temsil edilir. Yani D noktası, $z_1.z_2$ sayısının, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

Bölme İşleminin Geometrik Yorumu

$z_1 \neq 0$ olmak üzere iki karmaşık sayı

$$z_1 = a + ib = r_1 cis\theta_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

ve

$$z_2 = c + id = r_2 cis\theta_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

olsun. z_1 ve z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri sırasıyla A ve B olsun. $\mid OC \mid = 1$ birim uzunluk olmak üzere $A\overset{\Delta}{O}C$ ne benzer $B\overset{\Delta}{O}D$ çizelim.

$$A\overset{\Delta}{O}C \sim B\overset{\Delta}{O}D \Rightarrow$$

$$\frac{\mid DO \mid}{\mid CO \mid} = \frac{\mid BO \mid}{\mid AO \mid} \Rightarrow \mid DO \mid = \frac{\mid z_2 \mid}{\mid z_1 \mid}$$

bulunur. Öte yandan

$$\widehat{COD} = \theta_2 - \theta_1, \mid \frac{z_2}{z_1} \mid = \mid OD \mid = \frac{r_2}{r_1}$$

olduğu açıktır. O halde,

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} cis(\theta_2 - \theta_1) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

bölümü, karmaşık düzlemde D noktası ile temsil edilir. Yani D noktası $\frac{z_2}{z_1}$ sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

1.19 DeMoivre Formülü

$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx) = e^{inx}$

1.20 Karmaşık Sayıların Kuvvetleri

$z = rcis\theta$ olsun.

$$\begin{aligned} z^2 &= z.z = rcis\theta.rcis\theta; & z^3 &= z^2.z = r^2cis2\theta.rcis\theta \\ z^2 &= r^2cis(\theta+\theta) & z^3 &= r^3cis(2\theta+\theta) \\ z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i\cos 2\theta) & z^3 &= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde devam edilerek $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

elde edilir.

Theorem 1.24. *$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için,*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

dır. Bu eşitliğe De Moivre eşitliği *denir.*

Örnek 1.25.

$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{75}$ karmaşık sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{75} &= (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{75} \\ &= \cos\frac{75\pi}{3} + i\sin\frac{75\pi}{3} \\ &= \cos 25\pi + i\sin 25\pi \\ &= \cos(\pi + 12.2\pi) + i\sin(\pi + 12.2\pi) \\ &= -1 + i0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.26.

$(1+i)^{18}$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$$\mid 1+i \mid = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} (1+i)^{18} &= (\sqrt{2})^{18}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^{18} = 2^9(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{18} \\ &= 2^9(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}) \\ &= 2^9(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

bulunur.

1.21 Karmaşık sayıların Kökleri

$z_1 = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sayısının n-inci $(n \in \mathbb{N}^+)$ kuvvetten köklerini $\sqrt[n]{z_1}$ ile göstereceğiz. Bu kökler

$$z = \sqrt[n]{z_1} \Leftrightarrow z^n = z_1$$

bağıntısını sağlayan z sayılarıdır.

Örneğin, karesi -2 olan bir gerçel sayı olmadığını biliyoruz; ama karesi -2 olan karmaşık sayıları bulabiliriz:

$$(\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

$$(-\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

O halde, $\sqrt{2}i$ ve $-\sqrt{2}i$ sayıları -2'nin kareköküdür.

Bu örnekteki gibi özel çözüm her zaman mümkün değildir. Karmaşık sayıların köklerini bulmak için, De Moivre teoremini kullanacağız

Theorem 1.27.

$$z_1 = rcis\theta \quad ve \quad n \in N^+ \quad için$$

$$z^n = z_1$$

denklemini sağlayan z sayıları şunlardır:

$$r^{1/n}cis\frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

İspat:

$z^n = z_1$ denkleminde $z_1 = rcis\theta$ değerini yerine koyup De Moivre teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned}
z^n &= rcis\theta \\
z &= [rcis\theta]^{1/n} \\
z &= r^{1/n}cis[\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)] \\
z &= \sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1
\end{aligned}$$

bulunur.

$z^n = z_1$ denklemini sağlayan z sayılarına z_1 sayısının n-inci kuvvetten kökü denir. Köklerin modülleri eşit ve $\sqrt[n]{r}$ dir. Agümentleri ise birbirlerinden farklı olup

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \frac{\theta + 4\pi}{n}, \cdots, \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$

dir. Görüldüğü gibi, verilen bir z_1 karmaşık sayısının n-inci kuvvetten n tane kökü vardır. Bu kökler karmaşık düzlemde, merkezi orijinde olan $\sqrt[n]{|z_1|}$ yarıçaplı çember üzerinde eşit aralıklarla sıralanır.

Örnek 1.28.

z_1 sayısını kutupsal biçimde yazalım. $k \in Z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |\, z_1 \,| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ z_1 &= 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) \\ z_1 &= 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \end{aligned}$$

olur. Kareköklere z diyelim. k bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned} z^2 &= z_1 \\ z^2 &= 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \\ z &= 2^{1/2} cis[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)] \\ z &= \sqrt{2} cis(\frac{\pi}{6} + k\pi) \end{aligned}$$

$k = 0$ için

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2} cis \frac{\pi}{6} \\ z_1 &= \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \\ &= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$k = 1$ için

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2} cis(\frac{\pi}{6} + \pi) \\ &= \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) \\ &= \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.29.

$z^3 - i = 0$ denkleminin köklerini bulalım. $k = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z^3 = i \quad &\Rightarrow \quad z^3 = cis(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &\Rightarrow \quad z = cis[\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)] \\ &\Rightarrow \quad z = [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})] \end{aligned}$$

$k = 0$ için,

$$
\begin{aligned}
z_1 &= [\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}] \\
z_1 &= (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\
z_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)
\end{aligned}
$$

$k = 1$ için,

$$
\begin{aligned}
z_2 &= [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})] \\
z_2 &= (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) \\
z_2 &= (-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\
z_2 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)
\end{aligned}
$$

$k = 2$ için,

$$
\begin{aligned}
z_3 &= [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})] \\
z_3 &= (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) \\
z_3 &= (0 - i) \\
z_3 &= -i
\end{aligned}
$$

bulunur.

Köklerin görüntülerinin ağırlık merkezi orijinde olan düzgün çokgenin köşeleri olduğunu grafikten görünüz.

Söylenenleri özetlersek;

$z = r)cos\theta + isin\theta$ sayısının n tane kökü şunlardır:

$z_k = \sqrt[n]{r}\left(cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

Örnek 1.30.

$z_1 = 8 + 6i$ sayısının kareköklerini bulunuz.

Bu sayıyı kutupsal biçimde yazmak için trigonometrik cetvelden değerler bulmak zorunda kalacağız. Bundan sakınmak amacıyla, kutupsal koordinatları kullanmadan, karekökleri tanıma uyacak biçimde bulmaya çalışalım:

$z = x + iy$ ve $z^2 = z_1$ olsun.

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = 8+6i \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi = 8+6i \\ & \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Elde edilen sistemi çözelim:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 8 &\Rightarrow x^2 - (\frac{3}{x})^2 = 8 \\ &\Rightarrow x^4 - 9 - 8x^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x^2+1)(x^2-9) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \quad \text{olamaz} \\ &\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 & \text{için} \quad y_1 = 1 \\ x_2 = -3 & \text{için} \quad y_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Ohalde $z_1 = 3 + i$ ve $z_2 = -3 - i$ olacaktır.

1.22 *Alıştırmalar*

1. $$z = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2(2-i)$$
   sayısının mutlak değerini bulunuz.

2. $z_1 = \mid z_1 - 1 \mid +2i$ eşitliğini doğrulayan z_1 karmaşık sayısını bulunuz.

3. $\mid z - 1 \mid - \mid z + 2i \mid = 0$ eşitliğini doğrulayan z karmaşık sayılarının görüntülerini bulunuz.

4. $z_1 = 1 + 2i$ ve $z_2 = 3 - i$ sayıları arasındaki uzaklığı bulunuz.

5. $\{z : \mid z - i \mid \leq 3, z \in \mathbb{C}\}$ kümesini karmaşık sayılar düzleminde belirtiniz.

6. $\{z : \mid z + 1 - 2i \mid \leq \mid z + 4 \mid, z \in \mathbb{C}\}$'ni karmaşık sayılar düzleminde belirtiniz.

7. $z = 1 - \sqrt{3}i$ sayısını kutupsal biçimde yazınız.

8. $z_1 = 4(\cos 200^0 + i \sin 200^0)$ ve $z_2 = 2(\cos 110^0 + i \sin 110^0)$ ise z_1/z_2 sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

9. $\arg[z - 1 + i] = 60^0$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri kümesini gösteriniz.

10. $A = \frac{(cis\frac{\pi}{6})^4(cis\frac{\pi}{2})^3}{(cis\frac{\pi}{4})^5}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

11. $z = (1 - i)^{64}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

12. Aşağıdaki şekilde görüntüleri verilen z_1 ve z_2'nin çarpımı olan sayıyı bulunuz.

13. $z = +i$ sayısının kareköklerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.

14. Kutupsal koordinatları $(2, 135^0)$ olan karmaşık sayıyı $a + ib$ biçiminde yazınız.

15. $4 \cdot (1 + \sqrt{3})i$ sayısının küpköklerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.

16. $z^4 = 1 + i$ denklemini çözünüz

17. Aşağıdaki denklemleri çözünüz ve kompleks düzlemde grafiklerini çiziniz:

    (a) $|z - 4 + 3i| = 5$

    (b) $|z + 3i| = 2$

    (c) $Im(z) = -2$

    (d) $Re(z) = 2$

    (e) $Re(1 + i\overline{z}) = 3$

    (f) $z^2 + (\overline{z})^2 = 2$

18. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz ve kompleks düzlemde grafiklerini çiziniz:

    (a) $Re(z) < -1$

    (b) $Re(z) > 3$

    (c) $-1 \leq Im(z) \leq 2$

(d) $|z - i| > 1$

(e) $Re(z^2) > 0$

(f) $2 < |z - i| < 4$

19. $4 \leq z\overline{z} < 9$ eşitsizliğini çözünüz ve kompleks düzlemde grafiklerini çiziniz:

20. $z = \sqrt{3} + i$ ise z^{1996} sayısını bulunuz.

21. deMoivre formülünü kullanarak;

$$sin3\theta = 3sin\theta - 4sin^3\theta$$
$$cos3\theta = 4sin^3\theta - 3cos\theta$$

olduğunu gösteriniz.

22. $\overline{z}^2 = 4$

23. $Re(z^2) = |\sqrt{3} - i|$ denklemini çözünüz.

24. $|z - (3 - 6i)| = 5$ denklemini çözünüz.

25. $z = \frac{1}{(1+i)(1-2i)(1+3i)}$ ise $Re(z)$ ve $Im(z)$'yi bulunuz.

26. $x^8 = -32$ denklemini çözünüz.

27. $x^5 = 1$ denklemini çözünüz.

28. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ sayısını bulunuz.

29. $z^3 + i = 0$ denklemini çözünüz.

30. $f, g : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$ birer fonksiyon ve

$$f : z \Rightarrow z + 1; \quad g : z \Rightarrow \overline{z}$$

ise $(g \circ f)(i)$'yi bulunuz.

Bibliography