TIMUR KARAÇAY - HAYDAR EŞ

CALCULUS

SEÇKIN YAYINCILIK
ANKARA

Contents

0.1 Sayı Ekseni

Bu derste sık sık doğru, düzlem ve *uzay* terimleri ile karşılaşacağız. Bu terimler duyu organlarımızca kolayca algılanan kavramlardır. Öğrenmekte zorluk çekmeyeceğiz.

Orta öğretimdeki geometri derslerinden aşağıdaki belitleri anımsayacksınız.

Aksiyom 0.1. *İki noktadan bir doğru geçer.*

Aksiyom 0.2. *Üç noktadan bir düzlem geçer.*

Bu ifadeler, duyu organlarımızın farkettiği, ama kanıtlanamayan birer gerçektir. O nedenle *belit* olarak alınırlar. Onlar geometrinin omurgasını oluşturan belitlerdendir.

Sayı Ekseni (sayı doğrusu): Cetvel ile defterimize bir d doğrusu çizelim. Buna *taşıyıcı doğru* diyeceğiz. Taşıyıcı doğrunun ortalarında bir başlangıç noktası işaretleyelim ve o noktayı O ile gösterelim. İşaretlediğimiz noktanın bir tarafını pozitif (+), ötekini negatif (-) yön olarak seçelim. Başlangıç noktasından başlayarak pozitif yöne doğru her hangi bir birim uzunluk belirleyip, o uzunluğun ucuna $+1$ diyelim. Başlangıç noktasından başlayıp $+1$ noktasına kadar olan uzaklığa *birim uzunluk* diyeceğiz.

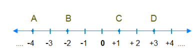


Figure 1: Sayı Doğrusu

Böylece bir sayı ekseni (doğrusu) oluşturduk.

Sayı ekseni oluştururken;

1. Taşıyıcı doğrunun hangi konumda olduğunun önemi yoktur. Doğruyu istediğiniz konumda çizebilirsiniz. Bu konuma *doğrultu* diyoruz.

2. Başlangıç noktasına göre doğrunun hangi tarafını pozitif, hangi tarafını negatif seçtiğimizin önemi yoktur. Buna *yön* ya da *yönelti* diyoruz. Yönlendirmeyi istediğiniz gibi yapabilirsiniz; yani doğrunun iki tarafından hangisini isterseniz pozitif yön olarak seçebilirsiniz. Onun karşıtı olan yön negatif yön olur.

3. Birim uzunluk olarak hangi uzuluğu aldığınızın önemi yoktur. Santimetre, decimetre, parmak genişliği, karış, ayak ya da hiç adı olmayan rasgele bir uzunluk seçebilirsiniz. Bütün uzunluk ölçüleri birbirlerine dönüşebilir; yani bir uzunluğu başkası cinsinden ifade edebilirsiniz.

0.2 Sayıların Eksene Yerleştirilmesi

Sayı eksenini bu durumuyla bırakırsak çok işe yaramaz. Şimdi sayı eksenini daha işlevsel hale getirelim. +1 noktasından başlayarak pozitif yönde 1 birim uzunluk daha ilerleyelim o ulaştığımız noktaya +2 diyelim. Bu eylemi durmdaksızın tekrarlayalım. Bir +n noktasında iken, pozitif yönde birim uzunluk kadar ileriye gidip, ulaştığımız noktayı +(n+1) ile gösterelim. Bu eylemi pozitif yönde istediğimiz kadar tekrarlayabiliriz. Ama eylemi asla bitiremeyiz. Ancak şunu sezebiliriz.

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots \} \tag{1}$$

doğal sayılar kümesinin her öğesine sayı ekseni üzerinde bir ve yalnızca bir tane nokta karşılık gelir. Doğal sayılar kümesinin öğelerini sayarak ve bir doğru üzerine yerleştirerek bitiremeyiz. Ama hangi doğal sayıyı seçersek seçelim, yerleştirme yöntemimiz önünde sonunda o sayıya erişecek ve onu sayı ekseni üzerinde olması gereken konuma yerleştirecektir. Bu *sayılabilir sonsuz* kümelerin önemli bir niteliğidir. Bu niteliği tam sayılar ve rasyonel sayılar için de kullanacağız.

Şimdi aynı eylemi negatif yönde yapalım: Başlangıç noktasından başlayarak (-) yönde birer birim aralıklarla

$$-\mathbb{N} = \{ 0, -1, -2, \ldots, -n, -(n+1), \ldots \} \tag{2}$$

kümesinin öğelerini sayı ekseninin negatif yönüne, aralarında birim uzunluk olacak biçimde yerleştirelim. Böylece sayı ekseni üzerinde

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -(n+1), -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots \} \tag{3}$$

tam sayılar kümesinin öğelerini yerleştirmiş oluruz. Kuruluş yönteminden, bu yerleştirmenin bire-bir eşleme olduğunu görüyoruz.

Sıra rasyonel sayıları yerleştirmeye geldi. Örnek olarak $\frac{15}{4}$ rasyonel sayısını ele alalım. Bu sayının onlu sistemdeki açılımı 3.75 dir. Sayı ekseni üzerinde $[3, 4]$ aralığını 100 eşit parçaya bölelim. 3 den başlayarak (+) yöne doğru 75 aralık sayalım. Eriştiğimiz noktaya 3.75 işaretini koyalım. Bu şekilde bütün pozitif rasyonel sayıları sayı ekseni üzerine bire-bir yerleştirebilirz. Benzer olarak bütün negatif rasyonel sayıları da sayı ekseninin negatif tarafına yerleştirebiliriz. Soyut Matematik derslerinde gördüğünüz gibi, rasyonel sayılar sayılabilir çokluktadır. Onları sayarak ve doğru üzerine birer birer yerleştirerek bitiremeyiz. Ama hangi rasyonel sayıyı seçersek seçelim, yerleştirme yöntemimiz önünde sonunda o sayıya erişecek ve onu sayı ekseni üzerinde olması gereken konuma yerleştirecektir.

Şimdi işin zor yerine geldik. Doğal sayıları, tam sayıları ve rasyonel sayıları sayı ekseni üzerine bire-bir olacak biçimde yerleştirdik. Ama sayı ekseni üzerinde boşluklar kaldığını sezeliliyoruz. Örneğin, birim uzunluklu ikizkenar dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu olan $\sqrt{2}$ sayısının yeri sayı ekseninde boştur. Pergeli hipotenüs uzunluğu kadar açalım ve pergelin bir bacağını başlangıç noktasına sabitleyip öteki bacağın sayı ekseninin pozitif yönünde ulaştığı noktaya

$\sqrt{2}$ sayısını yerleştirelim. Bu şekilde $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{101}, \ldots, \sqrt{1000001}, \ldots$ gibi irrasyonel sayıları sayı eksenine yerleştirebiliriz. Bu eylem durmaksızın devam etse bile $\mathbb{Q}'$ irrasyonel sayılar kümesini bitiremeyiz. Çünkü $\mathbb{Q}'$ irrrasyonel sayılar kümesi sayılamayan sonsuz bir kümedir. Sayıların çok büyük bir bölümü irrasyonel sayıdır. Sayılabilir sonsuz olmakla birlikte, rasyonel sayılar gerçel sayılar içinde çok çok azdır. Ancak, gerçel sayıların kuruluş yöntemlerinden hangisi alınırsa alınsın, her gerçel sayının sayı ekseni üzerinde bir noktaya karşılık geldiği gösterilebilir. Başka bir deyişle, $\mathbb{R}$ kümesi ile sayı ekseni arasında bire-bir eşleşme vardır. Bu eşleşme, sayı eksenini doldurur, sayılar arasında eşleşmeyen boşluklar kalmaz. Gerçel sayıların *tamlık* (completeness) özeliği denilen şey budur. Bu ders boyunca kullanacağımız önemli başka özelikleri Kesim **??**'de söylemiştik. Onları aklınızda tutunuz.

Sayı kümeleri arasında

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R} \tag{4}$$

ve

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \tag{5}$$

bağıntılarını varsayıyoruz.

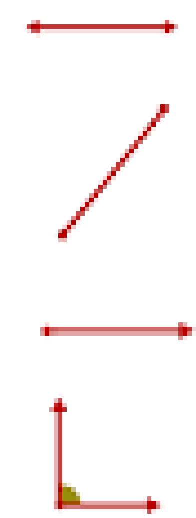


Figure 2: Doğrular

0.3 *Doğru, Düzlem, Uzay*

Bu derste sık sık doğru, düzlem ve *uzay* terimleri ile karşılaşacağız. Bu terimler duyu organlarımızca kolayca algılanan kavramlardır. Öğrenmekte zorluk çekmeyeceğiz.

[1]

Orta öğretimdeki geometri derslerinden aşağıdaki belitleri anımsayacaksınız.

Aksiyom 0.3. *İki noktadan bir doğru geçer.*

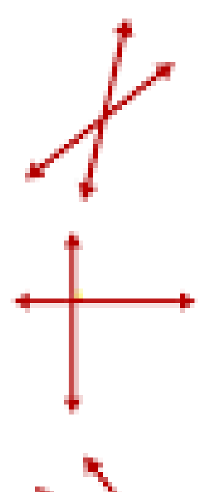
Aksiyom 0.4. *Üç noktadan bir düzlem geçer.*

Önceki kesimde sayı ekseni kurduk. Şimdi sayı ekseni ile ilgili bazı yararlı işleri yapabiliriz.

[1] Aynı konuyu düşünen insanların benzer şekiller üzerinde düşünmelerini sağlamak için bazı gelenekler oluşmuştur.

0.4 *Gerçel Sayı Ekseni*

Gerçel sayı ekseni, önceki kesimde kurduğumuz sayı eksenidir. Ancak, sayı eksenini kurarken doğrultu, yön ve birimin keyfi oluğunu söyledik. İşin aslı öyledir. Ancak, aynı konuyu düşünen insanların benzer şekiller üzerinde düşünmelerini sağlamak için bazı gelenekler oluşmuştur. Bu derste de o geleneklere uymakta yarar vardır.



Gerçel sayı ekseninin doğrultusunu, önümüzdeki masanın bizim tarafta olan kenarına paralel olacak biçimde alırız. Yönünü bizim sağımızdaki yön olarak seçeriz. Birim uzunluk seçerken, o anda kullanılacak sayıları gözümüzün rahat seçeceği aralıkları yaratmasını isteriz. Ama ardışık sayıları yerleştirirken sayıların sayı ekseninin çok çok ırak noktalarına gitmesi işimizi kolaylaştırmaz. Benzer eylemiş sınıftaki yazı tahtası için de uygularız. Tahtaya çizilen sayı ekseni, örneğin tavana paralel çizilir. Hemen belirtelim ki, bu seçimler isteğe bağlı gönüllü yapılan eylemlerdir. Matematik bizi böyle yapmaya zorlamaz.

Bu istekleri karşılayacak biçimde çizilen sayı ekseninin doğrultusuına yatay doğrultu diyoruz. Burada yataylığın kişinin konumuna göre değiştiği apaçıktır.

0.5 Bir boyutlu uzay

2

Gerçel sayı ekseni bir boyutlu bir Öklid uzayıdır. Uzayın her öğesine bir *vektör* denilir. Uzay (+) işlemine göre bir gruptur. Uzaydaki her x vektörü (sayısı) istenilen bir α gerçel sayısı ile çarpılabilir. Çarpımın sonucu gene bir gerçel sayıdır. Dolayısıyla uzayda bir vektördür. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ sayısının (vektör) mutlak değeri (uzunluğu), x sayısının başlangıç noktasına olan $|x|$ uzaklığıdır. Sayı ekseni üzerindeki a, b sayıları (vektörleri) arasındaki uzaklık $|b - a|$ mutlak değeridir.

[2] Gerçel sayı ekseni bir boyutlu birÖklid uzayıdır.

Bir uzayda, uzaya ait noktaların (vektörlerin) uzay içindeki konumlarını belirten nesneye (araç) koordinat sistemi denilir. Sayı ekseni, bir boyutlu uzaydaki her sayının (vektörün) konumunu belirttiğine göre, uzayın koordinat sistemidir.

Bir boyutlu uzayda

$$ax = b \quad (a \neq 0) \tag{6}$$

gibi denklemleri daima çözebiliriz. (6) denkleminde a, b iki sabit gerçel sayı x ise bilinmeyendir.

Bir denklemde bilinmeyen(ler)in kuvvet(ler)i 1 ise denklem *doğrusal denklem* adını alır. Bilinmeyenin hangi kümeden seçileceği önceden biliniyorsa, ona *değişken* diyoruz. Denklemi çözmek demek denklemde eşitliği sağlayan x değişken(ler)inin bulunması demektir. (6) denkleminin çözümü $x = \frac{b}{a}$ olur.

0.6 Düzlem

3

[3] Düzlem iki boyutlu bir Öklid uzayıdır.

Düzlem iki boyutlu bir Öklid uzayıdır. Düzlemde önce bir koordinat sistemi kuralım. Biraz önce söylediğimiz gibi yatay doğrultuda alacağımız bir sayı ekseni düşünelim. Buna $Ox-$ ekseni, apsisler ekseni ya da *yatay eksen* denilir. Başka bir sayı eksenini, başlangıç noktaları çakışacak ve aralarında dik açı oluşacak biçimde yerleştirelim. Bu eksene de $Oy-$ ekseni, ordinatlar ekseni ya da düşey eksen denilir. Yatay ve düşey eksenlere *koordinat eksenleri* denilir.

Kesişen iki doğru bir düzlem belirtir. Bu düzlem üzerindeki bir P noktasının konumunu belirlemek için, P noktasından eksenlere birer dikme inelim. Dikmelerin ayaklarının başlangıç noktasına olan uzaklıkları, sırasıyla x ve y olsun. (x, y) nesnesine bir *sıralı çift* denilir. Düzlemin her noktası için bu iş yapılabilir. Böylece, düzlem ile

$$\{(x, y) | \, x, y \in \mathbb{R}\} \tag{7}$$

sıralı sayı çiftleri arasında bire-bir eşleşim kurulur. x sayısına P noktasının apsisi, y sayısına P noktasını ordinatı denilir. Apsis ve ordinat terimleinin tarihi değeri vardır. Ancak, algıyı kolaylaştırmak için apsis yerine yatay koordinet, ordinat yerine de *düşey* koordinat diyeceğiz.

Öte yandan, iki sayı ekseninin belirlediği düzlem ile (7) sıralı çiftlerinin kümesini aynı sayacağız. Düzlemin her noktasını bir (x, y) sıralı çifti ile belirlemek büyük kolaylık sağlar.

Düzleme 2-boyutlu denmesinin nedeni apaçıktır. Çakışmayan ve birbirlerine paralel olmayan iki sayı ekseni, düzlemin her noktasının konumunu belirliyor.

0.7 *Doğru Denklemi*

[4]

Düzlemde bir doğru denklemi, doğruya ait (x, y) nokta çiftlerinin düzlemin nerelerinde olduğunu belirleyen bir denklemdir. Buna doğrunun grafiği diyoruz. Öyleyse doğrunun grafiği, x ile y değişkenleri arasındaki ilişkiyi veren bir bağıntıdır. Bu bağıntı

$$y = mx + n \tag{8}$$

$$ax + by + c = 0 \tag{9}$$

denklemlerinden birisi ile verilir. Denklemlerde x, y değişkenlerinin üstleri 1'dir. O ndenle denklemlere *doğrusal* denklem diyoruz.

Birinci denklemde $x = 0$ konulursa, doğrunun $Oy-$ eksenini kestiği $(0, n)$ noktası bulunur. m katsayısı doğrunun eğimidir.

İkinci denklem daha genelmiş gibi görünse de basit cebirsel işlemlerle birisi ötekinin biçimine dönüştürülebilir.

[4] $y = mx + n$, $ax + by + c = 0$

Doğru Çizimi

Doğrunun grafiğini çizmenin en kısa yolu, grafiğin koordinat eksenlerini kestiği noktaları bulmaktır. Tabii, istenirse grafik üzerindeki herhangi iki noktayı bulup onlardan geçen doğruyu çizmek her zaman mümkündür.

İkinci denklemde $x = 0$ konulursa, doğrunun $Oy-$ eksenini kestiği $(0, -\frac{c}{b})$ noktası, $y = 0$ konulursa, doğrunun $Ox-$ eksenini kestiği $(-\frac{c}{a}, 0)$ noktası bulunur. İki noktası bilinince doğruyu çizebiliriz.

0.8 Doğrusal Denklem Sistemi

5

Çok değişkenli denklemlere alışkanlık sağlamak için x, y değişknleri yerine x_1, x_2 değişkenlerini kullanacağız. Bu iş yalnızca değişkenlere farklı ad verme

Düzlemde iki doğrunun denklemlerinden oluşan

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

denklemlerine iki değişkenli iki doğrusal denklemden oluşan sistem denilir.

[5] $a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$

Örnek 0.5.

$$3x_1 - y - 1 = 0$$
$$2x_1 + 3y + 14 = 0$$

denklem sistemini yoketme yöntemi ile çözmek isteyelim. İki denklemden y değişkenini yoketmek için, birinci denklemi 3 ile, ikinci dnklemi 1 ile çarpıp, taraf tarafa toplarsak $11x = -11$ çıkar. Buradan $x = -1$ bulunur. Bu değer denklemlerden herhangi birisinde kulllanılırsa $y = -4$ çıkar. O halde, sistemin çözümü Ç $= (-1, -4)$ olur. Çözümü grafik üzerinde görmek için iki doğrunun grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizerek kesişim noktalarını görmek yetecektir.

Örnek 0.6.

Şimdi de yerine koyma yöntemiyle bir denklem sistemini çözelim:

$$-x + 2y = 3$$
$$2x + 4y = 2$$

sistemini çözmek için birinci denklemden $x = 2y - 3$ değerini bulup ikinci denklemde yerine koyalım: $y = 1$ çıkar. Bu değeri ilk denklemde kullanırsak $x = -1$ buluruz. O halde çözüm Ç $= (-1, 1)$

dir. Gerçekten bu iki doğrunun grafikleri aynı koordinat sisteminde çizilirse, $(-1, 1)$ noktasında kesiştikleri görülür.

1 Nicelik Sayıları

[1]

1.1 Kısa Tarihçe

Matematikte nicelik sayılarını, şimdi kullandığımız anlamıyla ortaya koyan kişinin, Rus asıllı Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918) olduğu kabul edilir. Cantor, nicelik kavramını, sonlu kümelerin öğe sayısı olarak ortaya koydu ve onu kullanarak sonlu kümeleri büyüklüklerine göre karşılaştırmaya başladı. Örneğin $\{1,2,3\}$ ile $\{a,b,c\}$ kümelerinin birbirlerinden farklı ama büyüklüklerinin (öğe sayılarının) aynı 3 doğal sayısına eşit olduğunu gördü. Bu basit düşünceden bir genellemeye ulaştı. İki kümenin büyüklüklerinin eşit olması için, kümeler arasında birebir örten (bbö) bir dönüşümün olması gerektiğini anladı. Sonra bu düşünceyi kolayca sonsuz kümelere genelleştirdi.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\} \tag{1.1}$$

doğal sayılar kümesini, bütün sonlu kümelerin nicelik sayılarının kümesi olarak tanımladı. Bu kümeye *ilk sonlu ötesi sayı* adını verdi. Bu en küçük sonlu ötesi sayıdır. $\mathbb{N}$ kümesinin nicelik sayısını $\aleph_0$ ile gösterdi. (1.1) kümesine birebir eşlenen; yani ona eşgüçlü olan kümelere *sayılabilir sonsuz kümeler* dedi.

Cantor, bundan sonra önemli sonuçlara ulaştı:

1. *Doğal sayılar kümesi sonsuz altkümelerine eşgüçlüdür.* Gerçekten doğal sayıların içinde tek sayılar ya da çift sayılar sonsuz kümelerdir. Her birisinin nicelik sayısı $\aleph_0$ dir. Bunu görmek kolaydır. Örneğin, $n \Rightarrow 2n$ dönüşümü doğal sayılar kümesinden çift sayılar kümesine birebir ve örten bir dönüşümdür. Dolayısıyla nicelik sayıları aynıdır.

2. Doğal sayı çifterinden oluşan küme; yani $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kartezyen çarpımı sayılabilir sonsuz kümedir.

[1] Cantor: Nicelik sayısı sonlu kümelerin öğe sayısıdır.

3. Rasyonel sayılar kümesi sayılabilir sonsuz kümedir.
4. Cebirsel sayılar[2] sayılabilir sonsuz kümedir.
5. Doğal sayılar kümesinin, Gerçel sayılar kümesine eşgüçlü olmadığını 1874 yılında yayınladığı makalede kanıtladı. Bu önemli makale şu gerçeği ortaya koydu. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin nicelik sayısı, doğal sayıların nicelik sayısından kesinlikle daha büyüktür. $\mathbb{R}$ nin nicelik sayısına *continuum* adını verdi ve $\mathfrak{c}$ ile gösterdi. Özetle,

$$\aleph_0 < c \tag{1.2}$$

eşitsizliği vardır.

[2] Tamsayı katsayılı polinomların kökleri

Bu gün nicelik sayıları, kümeler kuramında kendi başına bir daldır. Bunun yanında kombinatorik, soyut cebir ve analizde kullanılan önemli bir araçtır.

1.2 Sayı Türleri

[3]

Matematikte iki türlü sayı kullanılır:

1. Nicelik Sayıları
2. Sıra Sayıları

[3] Nicelik Sayıları
Sıra Sayıları

Örneğin,

1. "Yedi kişi"
2. "Üç okul"
3. "On iki çocuk"

ifadeleri, söz konusu kümelerin öğelerinin sayısını (niceliğini) belirtir. Buna karşın,

1. "Yedinci kişi"
2. "Üçüncü okul"
3. "On ikinci çocuk"

ifadeleri, üzerinde iyi sıralama bağıntısı olduğu sezilen kümeye ait öğenin, sıralamadaki konumunu (sıra sayısını) belirtir.

İşlevlerinden hemen anlaşıldığı gibi, birinci tür sayılara *nicelik sayıları*, ikinci tür sayılara da *sıra sayıları* denilir. Bu bölümde nicelik sayılarını, sonraki bölümde sıra sayılarını ele alacağız.

Uyarı 1.1. *Bazı kaynaklar sayı türlerine* adlandırma sayıları (nominal numbers) *adıyla üçüncü bir sayı türü eklerler. Ancak, işlevlerine bakınca adlandırma sayıları matematiksel anlamda yeni bir tür sayılmazlar.*

1.3 Nicelik Sayıları

Nicelik sayıları, doğal sayıların bir genellemesidir. Kümelerin büyüklüklerini (öğe sayısını) belirlemek için kullanılır. Sonlu kümenin nicelik sayısı, onun öğe sayısını belirten doğal sayıdır. Sonsuz kümelerin büyüklüklerini belirten nicelik sayıları, sonlu ötesi sayılardır (transfinite numbers).

Nicelik sayıları kümelerin büyüklüğünü belirttiğine göre, eş büyüklükte (eşgüçlü) olan kümelerin nicelik sayılarının aynı olduğunu varsaymalıyız. O zaman, önümüze kolay bir yol çıkıyor. *'Bütün kümelerin kümesi*'ni eşgüçlü olma bağıntısına göre denklik sınıflarına ayırıp, her denklik sınıfını bir nicelik sayısı olarak alabiliriz. Daha açık bir deyişle, her denklik sınıfından rasgele seçilecek bir kümenin nicelik sayısını o sınıftaki kümelerin ortak nicelik sayısı olarak alabiliriz.

Ancak bu kolay yola girmemizin önünde büyük bir engel var: *'Bütün kümelerin kümesi'* ni ele alamıyoruz. Onu ele aldığımızda, Kümeler Kuramı'nda çatışkılar (paradox) ortaya çıkıyor.

O nedenle, kolay yol aramaktan vazgeçip, biraz dolambaçlı bir yola sapacağız. Nicelik sayılarının varlığını bir belit (axiom) olarak kabul edeceğiz. Bu kabul,

'Sonlu kümelerin nicelik sayıları doğal sayılar kümesidir.'

önermesinin genellemesidir. Dolayısyla, şimdiye dek yaptıklarımıza aykırı düşmeyecektir.

Nicelik Sayılarının Varlığı

Aksiyom 1.2. [4] *Adına nicelik sayıları denilen ve aşağıdaki iki özeliğe sahip bir $\mathfrak{N}$ ailesi vardır.*

[4] Eşgüçlü kümelerin nicelik sayıları birbirlerine eşittir.

1. Her C kümesi için, C kümesinin nicelik sayısı adını vereceğimiz ve C kümesine eşgüçlü olan bir $\mathfrak{c}$ kümesi vardır.

2. Eşgüçlü kümelerin nicelik sayıları birbirlerine eşittir.

Son özelik şu anlama gelir: C kümesinin nicelik sayısı $\mathfrak{c}$, D kümesinin nicelik sayısı $\mathfrak{d}$ ise

$$C \approx D \rightarrow \mathfrak{c} = \mathfrak{d} \tag{1.3}$$

olur. Sonlu kümelerde bu özeliğin sağlandığını biliyoruz. Örneğin,

$$C = \{1,2,3\}, \qquad D = \{a,b,c\}$$

ise, birebir ve örten (bbö) $f : C \Rightarrow D$ dönüşümü

$$f(1) = a, \ f(2) = b, \ f(3) = c$$

biçiminde tanımlanabilir. Öyleyse, C ile D eşgüçlüdürler. Buradan

$$C \approx D \to \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$$

çıkar. Yerine göre formüllerin kolay yazılması ve kolay algılanması için nicelik sayılarını farklı simgelerle göstereceğiz. C kümesinin nicelik sayısı

$$\mathfrak{c},\ \bar{\bar{C}},\ \natural(C),\ n(C)\ |C| \tag{1.4}$$

simgelerinden birisiyle gösterilir.

Cantor Teoremi, bir kümenin kendi kuvvet kümesine eşgüçlü olamayacağını söylüyor. $(A \subset B) \wedge (A \neq B)$ bağıntısını $A \prec B$ ile gösterirsek,

$$\emptyset \prec A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec \ldots \prec \mathbb{N} \prec \alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \ldots \prec \alpha_\eta \ldots \tag{1.5}$$

biçiminde, sağdaki soldakinden daha güçlü olan kümelerin varlığını söyleyebiliriz. Bunun için, ardışık iki terimde, soldakinin kuvvet kümesini sağdaki küme olarak almak yetebilir. (1.5) bağıntısından

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec \ldots \prec \aleph_0 \prec \aleph_1 \prec \aleph_2 \prec \ldots \prec \aleph_\eta \ldots \tag{1.6}$$

biçiminde birbirinden büyük nicelik sayılarının varlığını sezebiliriz.

Ancak bu sezgiyi bilgiye dönüştürmek zordur. Bildiğimiz tanım ve belitlerle, yazdığımız sıraya giren kümeleri belirlemek olanaksızdır. Örneğin $\mathbb{N}$ nin nicelik sayısı ile $\mathbb{R}$ nin nicelik sayısı arasında başka bir nicelik sayısının olup olmadığı kanıtlanamaz. Biraz sonra bu konuyu ele alacağız.

1.4 Gösterimler

Doğal Sayı

Doğal sayıları sonlu kümelerin nicelik sayıları olarak tanımladık. Kümesel işlemlerde $\mathbb{N}$ yerine ω simgesini kullandık. Belit 1.2 'in varsayımları uyarınca, her doğal sayıyın nicelik sayısını kendisi imiş gibi düşünebilir ve dolayısıyla aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\natural(0) = \quad 0 = \quad \{\emptyset\} \tag{1.7}$$
$$\natural(1) = \quad 1 = \quad \{0\} \tag{1.8}$$
$$\natural(2) = \quad 2 = \quad \{0,1\} \tag{1.9}$$
$$\natural(3) = \quad 3 = \quad \{0,1,2\} \tag{1.10}$$
$$\vdots \tag{1.11}$$
$$\natural(n) = \quad n = \quad \{0,1,2,\ldots,n-1\} \tag{1.12}$$
$$\vdots \tag{1.13}$$

Küme aileleri üzerinde eşgüçlülük bir denklik bağıntısı olduğundan, (1.7) gösterimleri bir çelişki yaratmazlar. Çünkü, (1.7) eşitliklerininin sağ yanlarındaki kümelerden birisine eşgüçlü olan kümenin nicelik sayısı, orta sol karşısında yazılı olan doğal sayıdır. Burada, baştan beri söylediğimiz gerçeği teorem olarak ifade edebiliriz..

Theorem 1.3. *Doğal sayılar, sonlu kümelerin büyüklüğünü (öğe sayısını) gösteren nicelik sayılarıdır.*

Sonlu ve Sonsuz Nicelik Sayıları

Tanım 1.4. *Liste 1.7 gösterimleri nedeniyle, doğal sayılara* sonlu nicelik sayıları*, ya da* sonlu kümelerin nicelik sayıları*, denilir.*

Bunun karşıtı olarak, sonlu olmayan nicelik sayılarına sonsuz nicelik sayıları*, yada* sonsuz kümelerin nicelik sayıları*, denir.*

Doğal sayıları küme olarak ele aldığımızda w simgesini, nicelik sayısı olarak ele aldığımızda $\mathbb{N}$ simgesini kullanacağız. Bu ayrım, yalnızca işlemlerde yalınlığı sağlamak içindir, işin aslında bir fark yaratmaz.

alef sıfır

'Alef' diye okunan $\aleph$ İbranicenin ilk harfidir. $\aleph_0$ ise doğal sayılar kümesinin nicelik sayısıdır.

$$\aleph_0 = \natural(w) = \natural(\mathbb{N}) \tag{1.14}$$

$$w = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

doğal sayılar kümesinin iki önemli özeliği vardır:

1. w sayılabilir en büyük kümedir.
2. w en küçük sonsuz kümedir.

Bunları nicelik sayıları cinsinden ifade edersek,

1. $\aleph_0$, doğal sayıların hepsinden büyüktür. İlk sonlu ötesi sayıdır.
2. $\aleph_0$ en küçük sonlu ötesi sayıdır.

alef bir

$\aleph_1$, gerçel sayılar kümesinin nicelik sayısıdır. Eşsimgesi $\mathfrak{c}$ dir.

$$\aleph_1 \;=\; \natural(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} \tag{1.15}$$

1.5 Sürey Hipotezi

CONTINUUM HYPOTHESIS

Cantor, doğal sayıların nicelik sayısının gerçel sayıların nicelik sayısından kesinlikle küçük olduğunu; yani

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

olduğunu kanıtladıktan sonra, bu ikisi arasında başka bir nicelik sayısı olup olmadığını gösteremedi. Bunun üzerine, adına *Sürey Hipotezi ('Continuum Hypothesis')* denilen şu varsayımı kabul etti:

Aksiyom 1.5. *Doğal sayılar kümesinin nicelik sayısından büyük ve gerçel sayılar kümesinin nicelik sayısından küçük bir nicelik sayısı yoktur.*

Bu hipotez, $\aleph_0$ sayısından sonra gelen nicelik sayısının $\aleph_1$ olduğu anlamına geliyordu. Bu sanısını vurgulamak için, koyduğu hipoteze 'continuum' dedi ve $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin nicelik sayısını $\mathfrak{c}$ ile gösterdi.

$$\aleph_1 \ = \ \natural(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} \tag{1.16}$$

'Sürey Hipotezi' nin doğru mu, yoksa yanlış mı olduğunun kanıtı matematikçileri uzun süre uğraştırdı. Bu soru, Hilbert'in 1900 yılında Paris'te yapılan Dünya Matematik Kongresine sunduğu 23 problemin[5] ilkidir.

1963 yılında *Paul Cohen*, Seçim Belitini kabul edince, 'Sürey Hipotezi'nin, Zermelo-Fraenkel Kümeler Kuramı'nın belitlerinden bağımsız olduğunu kanıtladı. Cohen'in önemli buluşu şu anlama geliyordu. Sürey Hipotezinin doğru ya da yanlış kabul edilmesi, ZFC Kümeler Kuramında[6] bir çatışkı (paradox) yaratmaz. Bu buluşu nedeniyle, 1966 yılında Cohen'e, matematikte verilen en büyük armağan olan 'Fields Medal' armağanı verildi.

[5] Alman matematikçi David Hilbert (1862-1943) 'in 1900 yılında Paris'te yapılan Dünya Matematik Kongresine sunduğu 23 problem, 20.yüzyıl matematiğine yön vermiştir.

[6] ZFC: Zermelo-Fraenkel belitleri ile birlikte Seçim Beliti

1.6 Nicelik Sayıları Üzerinde Aritmetik

Tanım 1.6. *Nicelik sayılarında toplama, çarpma ve üs işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:*

Kesişmeyen S, T kümeleri için $\mathfrak{s} = |S|$ ve $\mathfrak{t} = |T|$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} + \mathfrak{t} &= |S \cup T| \\ \mathfrak{s}\mathfrak{t} &= |S \times T| \\ \mathfrak{s}^{\mathfrak{t}} &= |S^T| \end{aligned}$$

$S \cap T \neq \emptyset$ ise, S yerine ona eşgüçlü olan $S \times \{0\}$ kümesi ve T yerine ona eşgüçlü olan $T \times \{1\}$ kümesi alınarak, kesişmeme koşulu her zaman sağlanabilir.

İyi Tanımlılık

İyi tanımlılık şu anlama gelir: $|S| = \mathfrak{s} = |S_1|$ ve $|T| = \mathfrak{t} = |T_1|$ olacak şekilde S, S_1, T, T_1 kümeleri varsa,

$$\begin{aligned} |S \cup T| = && \mathfrak{s} + \mathfrak{t} = && |S_1 \cup T_1| \\ |S \times T| = && \mathfrak{s}\mathfrak{t} = && |S_1 \times T_1| \\ |S^T| = && \mathfrak{s}^{\mathfrak{t}} = && |S_1^{T_1}| \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde,

Theorem 1.7. *Yukarıda tanımlanan toplama, çarpma ve üs alma işlemleri iyi tanımlıdır.*

KANIT: İyi tanımlılığın gerektirdiği koşulların sağlandığı, eşgüçlülük tanımından çıkar.

Theorem 1.8. *Yukarıda tanımlanan toplama, çarpma ve üs alma işlemleri aşağıdaki özelikleri sağlar:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} + \mathfrak{t} &= \mathfrak{t} + \mathfrak{s} && \text{(toplamın yer değişimi)} \\ \mathfrak{s}\mathfrak{t} &= \mathfrak{t}\mathfrak{s} && \text{(çarpımın yer değişimi)} \\ \mathfrak{s} + (\mathfrak{t} + \mathfrak{r}) &= (\mathfrak{s} + \mathfrak{t}) + \mathfrak{r} && \text{(toplamın birleşimi)} \\ \mathfrak{s}(\mathfrak{t}\mathfrak{r}) &= (\mathfrak{s}\mathfrak{t})\mathfrak{r} && \text{(çarpımın birleşimi)} \\ \mathfrak{s}(\mathfrak{t} + \mathfrak{r}) &= \mathfrak{s}\mathfrak{t} + \mathfrak{s}\mathfrak{r} && \text{(soldan dağılma)} \\ (\mathfrak{s} + \mathfrak{t})\mathfrak{r} &= \mathfrak{s}\mathfrak{r} + \mathfrak{t}\mathfrak{r} && \text{(sağdan dağılma)} \end{aligned}$$

KANIT: Tanım 1.6 varsayımları ile ilgili kümeler cebiri ve aralarındaki eşgüçlülük bağıntılarından kolayca görülür.

1.7 *Sıralama*

Nicelik sayıları doğal sayıların genellemesidir ve onları içine alır. Dolayısıyla, doğal sayılardaki sıralama bağıntısını genelleştirmeli ve ayrıca genelleşen sıralama özel olarak doğal sayılardaki sıralamayı korumalıdır. Nicelik syıları üzerinde sıralama bağıntısını Tanım 1.9 'deki gibi tanımlarsak, istenenler gerçekleşir.

Tanım 1.9.

S, T kümeleri için $\mathfrak{s} = |S|$ ve $\mathfrak{t} = |T|$ olsun.

$$\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t} \to S \preccurlyeq T$$
$$\mathfrak{s} \prec \mathfrak{t} \to S \prec T$$

Bu tanımdaki $\prec$ ve $\preceq$ simgelerinin

$$\begin{aligned} S \preccurlyeq T &\rightarrow S \subset T \\ S \prec T &\rightarrow (S \subset T) \wedge (S \neq T) \end{aligned} \tag{1.17}$$

gibi tanımlandığını varsayıyoruz..

Theorem 1.10. *Bir nicelik sayıları kümesi üzerinde, Tanım 1.9 ile verilen $\preccurlyeq$ bağıntısı iyi sıralama bağıntısıdır.*

KANIT: $\mathcal{K}$ nicelik sayılarından oluşan herhangi bir küme olsun.

$$\mathcal{M} = \{M \mid \mathfrak{m} = \natural(M), \, \mathfrak{m} \in \mathcal{K}\}$$

kümeler ailesini düşünelim. `Teorem` 1.7 gereğince $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ *iyi sıralanmış* bir sistemdir. Öte yandan

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{K} \\ f : M &\longmapsto \natural(M) \end{aligned}$$

dönüşümü bir eşyapı dönüşümüdür. öyleyse, $(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$ de iyi sıralanmış bir sistem olacaktır.

Theorem 1.11. *λ ile κ iki nicelik sayısı olsun, $\lambda \leq \kappa$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\kappa = \lambda + \mu$ olacak şekilde bir μ nicelik sayısının var olmasıdır.*

KANIT: $\lambda \leq \kappa$ olsun. $\lambda = \natural(L)$ ve $\kappa = \natural(K)$ olacak biçimde, birbirlerinden ayrık iki L ve K kümelerini düşünelim. Varsayımımız gereğince, L den K ya bbi olan bir f fonksiyonu vardır ve $L \approx f(L)$, $\lambda = \natural(f(L))$ olur. $M = K - f(L)$ ve $\mu = \natural(M)$ denirse, $\kappa = \lambda + \mu$ olacağı apaçıktır.

Tersine olarak $\kappa = \lambda + \mu$ olacak şekilde bir μ nicelik sayısı var olsun.

$$\lambda = \natural(L), \; \kappa = \natural(K), \; \mu = \natural(M), \; L \cap M = \emptyset$$

olacak şekilde K, L, M kümelerini seçelim. Varsayımımız gereğince bbö bir

$$h : L \cup M \rightarrow K$$

fonksiyonu vardır. Şu halde h nın L ye kısıtlanmışı olan $h_{|_L}$, L den K ya birebir içine (bbi) bir fonksiyondur, ki bu

$$L \approx h(L) \subset K$$

olması demektir. Buradan

$$\begin{aligned} \natural(L) &\leq \natural(K) \\ \lambda &\leq \kappa \end{aligned}$$

çıkar.

Theorem 1.12. *$x \leq y$ ve $u \leq v$ koşulunu sağlayan x, y, u, v nicelik sayıları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:*

(i) $x + u \leq y + v$

(ii) $xu \leq yv$

(iii) $x^u \leq y^v$

KANIT:

$x = |X|$, $y = |Y|$, $u = |U|$, $v = |V|$ olsun. Teorem 1.11 uyarınca $y = x + s$ ve $v = u + t$ ve $s = |S|$, $t = |T|$ olacak şekilde S, T kümeleri vardır.

(i)

$$y + v = (x + s) + (u + t) = (x + u) + (s + t)$$

yazılabilir, ki buradan, Teorem 1.11 gereğince (i) çıkar.

(ii)

$$\begin{aligned} yv &= (x + s)(u + t) \\ &= xu + xt + su + st \\ &= xu + (xt + su + st) \end{aligned}$$

den istenen çıkar.

(iii) $w = |W|$ herhangi bir nicelik sayısı ise, öncelikle,

$$x^u \leq (x + w)^u \tag{1.18}$$

olduğunu gösterelim.

X^U den $(X \cup W)^U$ ye birebir içine bir fonksiyonun varlığını göstereceğiz. Gerçekten her $f : U \to X$ fonksiyonunu aynı zamanda $f : U \to X \cup W$ fonksiyonu olarak düşünebiliriz. Öyleyse,

$$\mu : X^U \to (X \cup W)^U$$

fonksiyonunu

$$\forall f \in X^U \quad \text{için} \quad \mu(f) = f$$

diye tanımlayabiliriz. μ dönüşümünün bbi olduğu apaçıktır. O halde (1.18) eşitsizliği vardır. Teorem 1.11 uyarınca bu bağıntıyı

$$x^u \leq y^u$$

şeklinde yazabiliriz. Oysa (ii) den

$$x^u \leq y^u \leq y^u y^t = y^{u+t} = y^v$$

yazılabilir, ki bu (iii) bağıntısını kanıtlar.

1.8 Sonsuz Toplamlar

Lemma 1.13. *Her $\{x_i \mid i \in I\}$ nicelik sayıları ailesi için $x_i = \natural(X_i)$ ve $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$ olacak biçimde bir $\{X_i \mid i \in I\}$ kümeler ailesi vardır.*

KANIT:

x nicelik sayısı ise $x = \natural(X)$ olan bir X kümesi olduğunu biliyoruz. Daha önce de yaptığımız gibi her $i \in I$ için

$$x_i = \natural(X_i) = \natural(X_i \times \{i\})$$

kümesini oluşturabiliriz. Bu durumda

$$i \neq j \Rightarrow (X_i \times \{i\}) \cap (X_j \times \{j\}) = \emptyset$$

olacağı açıktır. ⊡

$$\{X_i \mid i \in I\} \tag{1.19}$$

kümeler ailesi yerine $\{X_i \times \{i\} \mid i \in I\}$ kümeler ailesi alınabilir. Yalınlığı sağlamak için, (1.19) ailesini ayrık aile varsayacağız.

Tanım 1.14. *$\{x_i \mid i \in I\}$ nicelik sayıları kümesinin toplamı $i \neq j$ ve $i, j \in I$ için $X_i \cap X_j = \emptyset$ olmak üzere*

$$\sum_{i \in I} x_i = \natural\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \tag{1.20}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Lemma 1.15. *y ve $\{x_i \mid i \in I\}$ nicelik sayıları için aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$$y\left(\sum_{i \in I} x_i\right) = \sum_{i \in I} y x_i \tag{1.21}$$

KANIT:

$y = \natural(Y)$ ve $x_i = \natural(X_i)$, $(i \in I)$ ve $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$ olacak şekilde Y ve $(X_i \mid i \in I\}$ kümelerini seçelim.

$$Y \times \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} (Y \times X_i) \tag{1.22}$$

olduğunu biliyoruz, iki yanın nicelik sayısı alınırsa istenen eşitlik çıkar. ⊡

Lemma 1.16. *Her $i \in I$ için $x_i \leq y_i$ eşitsizliklerini sağlayan $\{x_i \mid i \in I\}$ ve $\{y_i \mid i \in I\}$ nicelik sayıları için*

$$\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i \tag{1.23}$$

eşitsizliği sağlanır.

KANIT:

Her $i \in I$ için $x_i = \natural(X_i)$ ve $y_i = \natural(Y_i)$ olacak şekilde ayrık $\{X_i \mid i \in I\}$ ve $\{Y_i \mid i \in I\}$ ailelerini seçebiliriz. Her $i \in I$ için $x_i < y_i$ olduğuna göre bir $f_i : X_i \to Y_i$ bbi fonksiyonu vardır. Şimdi bir

$$f =: \bigcup_{i \in I} X_i \to \bigcup_{i \in I} Y_i, \qquad x \in X_i \Rightarrow f(x) = f_i(x) \tag{1.24}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun bbi olduğunu görmek kolaydır. ⊡

1.9 Sonsuz Çarpımlar

Tanım 1.17. *$\{x_i \mid i \in I\}$ nicelik sayıları kümesinin çarpımı, her $i \in I$ için $x_i = |X_i|$ olan $\{X_i \mid i \in I\}$ kümeler ailesinin kartezyen çarpımının nicelik sayısıdır.*

Bunu simgelerle ifade edersek,

$$\prod_{i \in I} x_i = \natural \left(\prod_{i \in I} X_i \right) \tag{1.25}$$

olur. ⊡

Lemma 1.18. *Her $i \in I$ için $x_i \leq y_i$ eşitsizliklerini sağlayan $\{x_i \mid i \in I\}$ ve $\{y_i \mid i \in I\}$ nicelik sayıları için*

$$\prod_{i \in I} x_i \leq \prod_{i \in I} y_i \tag{1.26}$$

eşitsizliği sağlanır.

KANIT:

Her $i \in I$ için $x_i = \natural(X_i)$ ve $y_i = \natural(Y_i)$ olacak şekilde ayrık $\{X_i \mid i \in I\}$ ve $\{Y_i \mid i \in I\}$ ailelerini seçebiliriz. Her $i \in I$ için $x_i < y_i$ olduğuna göre bir $f_i : X_i \to Y_i$ bbi fonksiyonu vardır. Şimdi bir

$$g : \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i \tag{1.27}$$

fonksiyonunu, $x = (x_i) \in \Pi X_i$ ve $y = (y_i) \in \Pi Y_i$ olmak üzere,

$$g(x) = y \Leftrightarrow (\forall i (i \in I) f_i(x_i) = y_i$$

biçiminde tanımlayalım. g nin bbi bir fonksiyon olduğunu gösterirsek, istenen sonuç çıkar.

$$\begin{aligned} g(u) = g(v) &\Rightarrow \forall i (i \in I) f_i(u_i) = f_i(v_i) \\ &\Rightarrow \forall i (i \in I) u_i = v_i \\ &\Rightarrow (u_i) = u = v = (v_i) \end{aligned}$$

⊡

1.10 *Alıştırmalar*

1. x ile y herhangi iki nicelik sayısı olsun ve $x = \natural(X)$ ve $y = \natural(Y)$ olacak şekilde X ile Y kümeleri için,

$$x + y = \natural(X \cup Y) + \natural(X \cap Y)$$

olduğunu gösteriniz.

2. x, y, z üç nicelik sayısı ise aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz:

$$x^y x^z = x^{y+z}, \qquad (x^y)^z = x^{yz}, \qquad x^z y^z = (xy)^z$$

3. $0,\ 1$ ve $x > 0$ nicelik sayıları için aşağıdaki işlemleri sağlayınız:

$$\begin{array}{l} x + 0 = x, \qquad 0x = 0, \qquad x^0 = 1 \qquad 0^x = 0, \\ 1x = x, \qquad x^1 = x, \qquad 1^x = 1 \end{array}$$

4. n sonlu bir nicelik sayısı ise

$$\begin{aligned} &n.\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots \aleph_0 = \aleph_0 \\ &(\aleph_0)^n = \aleph_0.\aleph_0.\aleph_0.\ldots.\aleph_0 = \aleph_0 \\ &nc = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \ldots + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \\ &\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}.\mathfrak{c}.\mathfrak{c}.\ldots.\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz. *(Eşitliklerin sağındaki toplama ve çarpmalarda n öğe var.)*

5. Aşağıdaki eşitliği sağlayınız:

$$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots = \aleph_0.\aleph_0$$

6. $\mathfrak{c}$ gerçel sayılar kümesinin nicelik sayısı olmak üzere, aşağıdaki eşitliği sağlayınız:

$$\mathfrak{c} = \aleph_0.\aleph_0.\aleph_0.\ldots = \aleph_0^{\aleph_0}$$

7. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayınız:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= 1 + 2 + 3 + \ldots n + \ldots \\ &= 1 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^n + \ldots \\ &= \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots = \aleph_0.\aleph_0 \\ c &= 1.2.3.\ldots \\ c &= c.c.c.\ldots = c^{\aleph_0} \end{aligned}$$

1.11 Sıra Sayıları

7

Birinci, ikinci, üçüncü,... gibi sıra belirten sayıları günlük yaşamda, doğal sayılarından daha çok kullanırız. Gerçekte, doğal sayılar hem nicelik hem de sıra belirtirler. Sonlu olduklarında doğal sayılarla sıra sayıları arasında bir ayırım gözetilmeyebilir. Ama sonsuzluk durumunda, matematikçiler titiz olmaya zorlanır. Bilindiği gibi, sonlu kümeler ile sonsuz kümelerin özelikleri birbirlerinden bazı yönlerden çok farklıdır. Benzer şey, sonsuzluk durumunda, sıra sayıları ile nicelik sayılarının özelikleri için de geçerlidir.

[7] birinci ikinci üçüncü

Figure 1.1: Sıra Sayıları

Bu bölümde, amacımız, sıra sayılarının kuruluşunu yapmaktır. Bir kümeyi sıralamak demek, onun *birinci, ikinci, üçüncü, . . .* öğelerini belirlemek demektir. Küme sonlu ise bu iş, kümenin öğelerini birer birer seçip sıra numarası vermekten ibaret kolay bir iştir.

Sayılabilir sonsuz kümeler için iş çok zor değildir. B kümesi sayılabilir sonsuz ise, B kümesinin öğelerini ω doğal sayılar kümesine birebir eşleriz. n doğal sayısına eşlenen öğe, kümenin $n - inci$ öğesi olur. ω doğal sayılar kümesi iyi sıralı olduğundan, ona birebir eşlenen sayılabilir B kümesi de iyi sıralanmış olur.

Bu söylediklerimizi simgelerle ifade edelim.

S sayılabilir sonsuz bir küme ise $f : \mathbb{N} \to S$ birebir örten (bbö) fonksiyonu vardır. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $f(m) = x_m \in S$ ve $f(n) = x_n \in S$ diyelim.

Tanım 1.19. *$S \approx \mathbb{N}$ ise, S kümesi üzerine*

$$(m, n \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq n) \to (f(m) \preceq f(n)) \Leftrightarrow (x_m \leq x_n) \tag{1.28}$$

sıralama bağıntısını koyalım.

Theorem 1.20. *(1.28) sıralamasına göre $(S, \preceq)$ sistemi iyi sıralıdır.*

KANIT: f nin eşsıra dönüşümü olduğu; yani sıra koruyan ve bbö fonksiyon olduğu apaçıktır.

Bu önerme, iyi sıralama kavramını ω doğal sayılar kümesinden sayılabilir sonsuz kümelere taşıyor. Dolayısıyla bir genellemedir. Ama bizim amacımız daha büyüktür. Teorem 1.20'i sayılamaz sonsuz kümelere genellemek istiyoruz.

Genellemeyi yapabilirsek, elde edeceğimiz sonuca *"sonlu ötesi tüme varım ilkesi"* adını vermek, yapılan işin önemini anlatıyor olacaktır. Öte yandan bu genelleme *sonlu, sayılabilir sonsuz* ve *sayılamaz sonsuz* kümeler için geçerli olacaktır. Özel haller olarak, sonlu ve sayılabilir sonsuz durumlarındaki sıralama ile çakışacaktır. O nedenle, daha alçak gönüllü davranıp, her üç durum için geçerli olan *"Tümevarım İlkesi"* adını verebiliriz.

1.12 Sıra Sayıları

8

İyi sıralı iki küme benzer iseler, yani sıraca eşyapılı iseler, bu iki kümenin ortak bir özelikleri vardır. İşte bu ortak noktadan hareketle *sıra sayılarını* tanımlayacağız. Kabaca söylersek, iyi sıralanmış bir kümenin sıra sayısı bu kümeye benzer olan bütün kümelerin yapılarını belirleyen soyut bir varlıktır.

[8] iyi sıralanmış bir kümenin sıra sayısı bu kümeye benzer olan bütün kümelerin yapılarını belirleyen soyut bir varlıktır.

Anımsanacağı gibi, nicelik sayılarını tanımlarken, bu sayıların seçilecek özel kümelere bağlı olmadığını göstermek için (1.7) sistemini seçmiştik. Sıra sayıları için de benzer şeyi yapabiliriz. Gerçekten, (1.7) sisteminde kümelerin adlarını değiştirerek

$$\alpha_0 = \{\emptyset\} \tag{1.29}$$
$$\alpha_1 = \{0\} \tag{1.30}$$
$$\alpha_2 = \{0,1\} \tag{1.31}$$
$$\alpha_3 = \{0,1,2\} \tag{1.32}$$
$$\vdots \tag{1.33}$$
$$\alpha_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\} \tag{1.34}$$
$$\vdots \tag{1.35}$$

sistemini yazabiliriz.

Liste 1.29 ailesi kapsama bağıntısına göre iyi sıralıdır.

$$\alpha_0 \subset \alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \alpha_3 \subset \ldots \tag{1.36}$$

İşlemlerde yalınlığı sağlamak için (1.12) ailesini A ile gösterelim:

$$A = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\} \tag{1.37}$$

Önel Bölük

Tanım 1.21. *Liste 1.29 koşulunu sağlayan (1.37) biçimindeki A kümesinin herhangi bir α_i öğesine, A nın bir önel bölüğü denir.*

Önel bölüğün A kümesine ait olduğunu belirtmek için,

$$A_{\alpha_i} = \alpha_i \tag{1.38}$$

yazacağız. Tabii, Liste 1.29 sisteminde her öğenin saptadığı önel bölük, o öğenin kendisine eşittir.

Bölüksel Küme

Tanım 1.22. *S nin her α öğesi, α nın saptadığı önel bölüğe eşitse; $(S, \preceq)$ iyi sıralanmış kümesine* "bölüksel" *'dir, denilir.*

Bunun anlamı, $\alpha = S_\alpha$ eşitliğinin olmasıdır. Bölüksel kümeye, bazen, *bölüksel olarak iyi sıralanmıştır*, denilir. Her $(S, \preceq)$ iyi sıralanmış kümesi için, (1.12) gereğince

$$\alpha \preceq \beta \Leftrightarrow S_\alpha \subset S_\beta \tag{1.39}$$

olduğundan, her bölüksel iyi sıralanmış küme *"kapsama"* bağıntısına göre sıralanmıştır.

Bundan böyle S kümesini ve sıralama bağıntısını belirtmeden, *"bölüksel küme"* diyeceğiz.

Theorem 1.23. *Bölüksel kümenin önel bölükleri de bölükseldir.*

Kanit: B bölüksel bir küme ve B_α bunun bir önel bölüğü olsun. $B_\alpha \subset B$ olduğundan, B_α iyi sıralanmış bir kümedir. Çünkü iyi sıralı kümenin her altkümesi de iyi sıralıdır. Öte yandan, her $\beta \in B_\alpha$ için $(B_\alpha)_\beta = B_\beta = \beta$ olduğundan, B_α bölüksel bir kümedir.

Theorem 1.24. *Bölüksel kümenin her bölüksel has altkümesi kendisinin bir önel bölüğüdür.*

Kanit: B bölüksel küme $Y \subset B$ ve $Y \neq B$ ise, Y altkümesinin, B için bir önel bölük olduğunu göstereceğiz.

$\alpha \in Y$ için B içinde $\alpha = B_\alpha$ ve Y içinde $\alpha = Y_\alpha$ olacaktır. Şu halde $B_\alpha = Y_\alpha$ olmalıdır; yani B içinde α dan önce gelen bütün öğeler Y ye aittir. Y kümesi B nin bir has alt kümesi olduğundan $(B - Y) \neq \emptyset$ dir. O halde $\delta = \inf(B - Y)$ olmak üzere $Y = B_\delta$ olur.

Theorem 1.25. *Bölüksel iki kümenin arakesiti bölükseldir.*

Kanit: B ve H bölüksel kümelerinde sıralama, kapsama bağıntısına göredir. O halde, arakesitlerini hem B nin hem de Y nin birer altkümesi olarak düşünürsek, arakesitler ailesi de kapsamaya göre iyi sıralı bir küme olacaktır. Eğer $\alpha \in B \cap H$ ise $\alpha = B_\alpha$ ve $\alpha = H_\alpha$ olur. Bu, B içinde α dan önce gelen bütün öğelerin H içinde de α dan önce gelmesini, dolayısıyla $B \cap H$ içinde de aynı şeyin olmasını gerektirir. Şu halde $\alpha \in (B \cap H)_\alpha$ dır. Buradan $B \cap H$ nin bölüksel olduğu çıkar.

Theorem 1.26. *Bölüksel iki küme ya eşittir ya da birisi ötekinin bir önel bölüğüdür.*

Kanit: B ve H iki bölüksel küme olsun. $B \cap H$ bölüksel olduğundan, ya $B \cap H = B$ dir ya da $B \cap H$ arakesiti B in bir önel bölüğüdür. Aynı düşünüşle, ya $B \cap H = H$ dir ya da $B \cap H$ arakesiti H nin bir önel bölüğüdür.

$B \cap H = B$ ise $B \subset H$ dir ve dolayısıyla ya $B = H$ ya da B, H nin bir önel bölüğü olur.

Benzer olarak, $B \cap H = H$ ise, ya $B = H$ ya da H, B in bir önel bölüğü olur.

Geriye kalan tek olası durum $B \cap H$ nin hem B in hem de H nin birer önel bölüğü; yani $B \cap H = X_\alpha = H_\beta$ olmasıdır. Bu durumda $X_\alpha = \alpha$, $H_\beta = \beta$ olacağından $\alpha = \beta$ elde edilir, ki bu $\alpha \in B \cap H$ olmasını gerektirir ve $B \cap H = B_\alpha$ olduğu kabulüne aykırı düşer.

Theorem 1.27. *Eşsıralı bölüksel kümeler birbirlerine eşittir.*

KANIT: Bölüksel B kümesi bölüksel H kümesiyle eşsıralı ise $B = H$ olduğunu göstermeliyiz.

f eşsıra dönüşümü altında $B \cong H$ olsun. Belirli bir $\alpha \in B$ öğesinden önce gelen bütün $x \in B$ öğeleri için $x = f(x)$ ise $B_\alpha = H_{f(\alpha)}$; yani $\alpha = f(\alpha)$ olacaktır. O halde *sonlu ötesi tüme varım ilkesine* göre, her $x \in B$ için $x = f(x)$ olur. O halde, $B = H$ olacaktır.

Lemma 1.28. *İyi sıralı bir küme, birden çok bölüksel küme ile eşsıralı olamaz.*

İyi sıralı her kümenin bölüksel bir küme ile eşsıralı olduğunu gösterirsek, bölüksel kümeleri sıra sayıları olarak alabiliriz. Aşağıdaki iki teoremde bunu kanıtlayacağız.

Theorem 1.29. *Her önel bölüğü bir bölüksel küme ile eşsıralı olan iyisıralı kümenin kendisi de bölüksel bir küme ile eşsıralıdır.*

KANIT: İyi sıralı B kümesinin her önel bölüğü bir bölüksel küme ile eşsıralı ise, B nin kendisinin de bölüksel bir küme ile eşsıralı olduğunu göstermeliyiz.

B nin B_x önel bölüğü h_x eşsıra dönüşümüyle bir $H(x)$ bolüksel kümesine gönderilsin. $B_x \cong H(x)$ olur.

$$H = \{z \mid \exists x(x \in B) \wedge (z = H(x))\} \tag{1.40}$$

kümesini tanımlayalım.

$$f : B \to H, \quad f(x) = H(x) \tag{1.41}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $x \prec y$ olmak üzere $x, y \in B$ ise, h_x eşsıra dönüşümü altında

$$B_x \cong H(x) \tag{1.42}$$

ve h_y nin B_x kümesine kısıtlanmışı olan $h_{y_{|B_x}}$ eşsıra dönüşümü altında

$$B_x = (B_y)_x \cong (H(y))_{h_y(x)} \tag{1.43}$$

olacaktır. Kabulümüz gereğince $H(x)$ bölüksel olduğundan $(H(y))_y(x)$ de bölüksel olur; çünkü, bölüksel bir kümenin bir önel bölüğüdür. `Teorem` 1.27 den,

$$H(x) = (H(y))_{h_y(x)} \tag{1.44}$$

çıkar. $x \prec y$ olduğundan da $H(x)$, $H(y)$ nin bir önel bölüğüdür. O halde,

$$x \prec y \to H(x) \subset H(y) \tag{1.45}$$

özeliği sağlanır. $x \neq y$ olduğunda $x \prec y$ ve $y \prec x$ varsayımlarından ancak bir tanesinin doğru olacağı düşünülürse, (1.45) bağıntısının her $x, y \in B$, $x \prec y$ için sağlandığını söyleyebiliriz ki bu $f : B \to H$ fonksiyonunun bbö olduğu anlamına gelir. Ayrıca (1.45) bağıntısı, f fonksiyonunun $(B, \preceq)$ sisteminden $(H, \subset)$ sistemine bir eşsıra dönüşümü olduğunu söyler. $(B, \preceq)$ iyi sıralanmış olduğundan $(H, \subset)$ sistemi de iyi sıralıdır.

Şimdi H nın bölüksel olduğunu gösterelim. (1.44) eşitliğinde $H(x)$ yerine $f(x)$ konulabilir. $H(y)$ bölüksel olduğundan $(H(y))_{h_y(x)}$ yerine de $h_y(x)$ konulabilir. Öyleyse, her $x \prec y$ için

$$f(x) = h_y(x) \tag{1.46}$$

yazılabilir ve sonuç olarak

$$f_{|B_y} = h_y \tag{1.47}$$

elde edilir. Bundan sonra, H deki iyi sıralamanın bölüksel olduğu aşağıdakilerden çıkar:

$$\begin{aligned} H_{z_y} &= \{z \mid \exists x(x \in B) \wedge (H(x) \subset H(y)) \wedge (z = H(x))\} \\ &= \{z \mid \exists x(x \in B) \wedge (x \prec y) \wedge (z = f(x))\} \\ &= \{z \mid \exists x(x \in B) \wedge (x \prec y) \wedge (z = h_y(x))\} \\ &= H(y) \end{aligned}$$

Theorem 1.30. *İyi sıralı küme bir ve yalnızca bir tane bölüksel küme ile eşsıralıdır.*

KANIT: B iyi sıralı ise, sonlu ötesi tüme varım ilkesiyle `Teorem` 1.27 uyarınca, B ile eşsıralı bir bölüksel kümenin varlığı ortaya çıkar. Tekliği ise `Sonuç` 1.28 den görülür.

1.13 *Sıra Sayısı*

Tanım 1.31. *İyi sıralı kümenin sıra sayısı kendisine eşsıralı olan olan bölüksel kümedir.*

İyi sıralanmış B kümesine eşsıralı olan bir ve yalnızca bir tane bölüksel küme vardır. Ona B nin *sıra sayısı* denir ve

$$\bar{B}, \quad \underset{\sim}{B}, \quad ord(B) \tag{1.48}$$

simgelerinden birisiyle gösterilir.

Theorem 1.32. *İyi sıralı kümelerin eşsıralı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul sıra sayılarının aynı olmasıdır.*

KANIT: B ve H iyi sıralanmış kümeler olsun.

$$B \cong H \Longleftrightarrow \bar{B} = \bar{H} \tag{1.49}$$

olduğunu göstermeliyiz. $B \cong \bar{B}$ ve $H \cong \bar{H}$ olduğu açıktır. `Teorem` 1.27 gereğince

$$B \cong H \Leftrightarrow \bar{B} \cong \bar{H} \Leftrightarrow \bar{B} = \bar{H} \tag{1.50}$$

olur.

Theorem 1.33. *Eşsıralı olmayan iyi sıralı iki kümeden birisi ötekinin bir önel bölüğü ile eşsıralıdır.*

KANIT: Bu teorem, eşit olmayan iki doğal sayıdan birisinin ötekinden küçük olmasının benzeridir.

B ve H iyi sıralanmış iki küme olsun. Uygun f ve h dönüşümleri altında

$$B \overset{f}{\cong} \bar{B}, \qquad H \overset{h}{\cong} \bar{H} \tag{1.51}$$

olacağını biliyoruz. `Teorem` 1.26 uyarınca, aşağıdaki üç durumdan birisi vardır:

(a) $\bar{B} = \bar{H}$

(b) $\bar{B} = \bar{H}_y$ $\quad$ (H_y, $\bar{H}$ nin bir önel bölüğüdür)

(c) $\bar{H} = \bar{B}_x$ $\quad$ ($\bar{B}_x$ $\bar{B}$ nin bir önel bölüğüdür)

(a) durumu varsa $B \cong \bar{H}$ olur. (b) durumu varsa $B \cong Z_{h^{-1}(y)}$ olur. (c) durumu varsa $H \cong X_{f^{-1}(x)}$ olur. Böylece istenen şey elde edilmiş olur.

1.14 *Karşılaştırma*

SIRA SAYILARININ MUKAYESESI

Buraya kadar söylenenleri derlersek, sıra sayıları kümesi üzerinde $\leq$ simgesiyle gösterilen bir bağıntıyı şöyle tanımlayabiliriz:

Tanım 1.34. *a ve b sıra sayıları ise aşağdaki özelikler sağlanır:*

$$a \leq b \Leftrightarrow a,\ b \text{ nin bir önel bölüğüdür} \tag{1.52}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a \in b) \vee (a = b) \tag{1.53}$$

Bu tanımı kullanarak, alıştığımız üçleme (trichotomy) kuralını yazabiliriz:

Theorem 1.35. *a ve b sıra sayıları ise aşağıdaki üç durumdan birisi ve yalnızca birisi vardır:*

1. $a \in b$
2. $a = b$
3. $b \in a$

1.15 Sıra Sayılarında Aritmetik

Sıra sayıları üzerinde aritmetik işlemleri yapmak için *toplama, çarpma ve üs alma* operatörleri tanımlanabilir.

Küçük - Büyük

Doğal sayılarda yaptığımız gibi, sıra sayıları için de $\preceq$ yerine $\prec$ bağınısını kullanabiliriz. a, b sıra sayıları için,

$$a \prec b \Leftrightarrow (a \preceq b) \wedge (a \neq b) \tag{1.54}$$

diyebiliriz. Bunu bölüksel küme kavramıyla da ifade edebiliriz:

Tanım 1.36. *a ve b sıra sayıları için $a = \bar{A}$, $b = \bar{B}$ olacak şekilde iyi sıralı A ve B kümeleri verilsin. A kümesi, B nin bir önel bölüğüne eşsıralı ise, a sıra sayısı b sıra sayısından küçüktür, denilir ve*

$$a < b \tag{1.55}$$

simgesiyle gösterilir.

Bileşimin Sıralanması

Toplama işlemi için, sıralanmış bileşimleri bilmemiz gerekiyor.

Tanım 1.37. *A ile B tam sıralanmış iki küme ve $A \cap B = \emptyset$ ise $A \cup B$ üzerinde sıralama işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$a, b \in A \cup B$ için $a \prec b$ olması için gerekli ve yeterli koşullar şunlardır:

$$a \prec b \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \wedge b \in B, & \\ (a, b \in A) \wedge (a \prec b) & \text{A daki sıralamaya göre} \\ (a, b \in B) \wedge (a \prec b) & \text{B deki sıralamaya göre} \end{cases}$$

İçinde bu sıralama bağıntısı olan $A \cup B$ bileşimini $A \uplus B$ simgesiyle göstereceğiz.

Uyarı 1.38. *$A \uplus B$ nin $B \uplus A$ dan farklı olacağına dikkat ediniz. Yukardaki tanım, genel olarak, bir kümeler ailesi için de söylenebilir.*

Toplama

Sıra Sayılarının Toplanması

Tanım 1.39.

a ve b sıra sayıları için $a = \bar{A}$ ve $b = \bar{B}$ ise, toplama işlemi

$$a \oplus b = \mathrm{ord}(A \uplus B) \tag{1.56}$$

biçiminde tanımlanır.

(1.56) ifadesindeki A ve B kümeleri iyi sıralı olduğundan, $A \uplus B$ bileşimi de iyi sıralı olacaktır.

Sıra sayılarında toplama işleminin birleşme özeliği vardır, Ama yer değişme özeliği yoktur:

$$(a \oplus b) \oplus \gamma = a \oplus (b \oplus \gamma) \tag{1.57}$$

$$a \oplus b \neq b \oplus a \tag{1.58}$$

Çarpma

Sıra Sayılarının Çarpımı

Tanım 1.40. *İyi sıralanmış X ve Y kümelerinin $X \times Y$ kartezyen çarpımının ters konum sıralaması şöyle tanımlanır: $(x, x'), (y, y') \in X \times Y$ için*

$$(x, x') < (y, y') \Leftrightarrow [(x' < y') \vee (x' = y' \wedge x < y)] \tag{1.59}$$

Bunun sözel anlamı şudur: Sıralı çiftlerin önce ikinci bileşenlerine bakılıyor. Eşit değilseler, onların sırası sıralı çiftin sırası oluyor. Ama ikinci bileşeler eşitse, birinci bileşenlerin sırası sıralı çiftin sırası oluyor.

Tanım 1.41. *Bu bağıntıya göre $X \times Y$ iyi sıralanmıştır. Üstündeki bu sıralamanın var olduğunu belirtmek için $X \times Y$ kartezyen çarpımını, $X \boxtimes Y$ simgesiyle gösterelim.*

Tanım 1.42. *x ile y iki sıra sayısı ise, $x = \bar{X}$, $y = \bar{Y}$ olmak üzere, sıra sayılarının çarpımı aşağıdaki kural ile tanımlanır:*

$$x.y = ord(X \boxtimes Y) \tag{1.60}$$

Sıra sayılarında $\oplus$ çarpma işlemi şu özeliklere sahiptir:

(a) $(xy)z = x(yz)$

(b) $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ (soldan dağılma özeliği)

(c) $(y \oplus z)x \neq yx \oplus zx$ (sağdan dağılma özeliği)

Buradan çıkan sonuç şudur: Sıra sayılarında soldan çarpmanın toplama üzerinde dağılma özeliği vardır, ama sağdan çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliği yoktur.

Üs Alma

Sıra sayılarının sonlu üsleri (kuvvetleri) çarpma yardımıyla tanımlanabilir. Böylece

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5, \ldots \tag{1.61}$$

üsleri bulunabilir. Sonsuz kuvvetleri için

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}},\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}, \ldots \tag{1.62}$$

biçimindeki diziler düşünülmelidir.

1.16 Sıra Sayılarının Sınıfı

BÜTÜN SIRA SAYILARININ SINIFI: W

Şimdiye dek yaptığımız işlemlerde, *"bölüksel küme"* deyimi ile *"sıra sayısı"* deyimini eşanlamlı kullandık. Özel olarak, bölüksel B kümesinin $\bar{B}$ sıra sayısı B kümesidir.

Bütün sıra sayılarının sınıfını W ile göstereceğiz. W kümesinin iyi sıralı olduğu gösterilebilir. Buradan, şu sonuca ulaşılabilir.

Theorem 1.43. *β sıra sayısı için β dan küçük olan bütün sıra sayılarından oluşan kümeye W_β diyelim.*

1. *β sayısı W_β kümesinin sıra sayısıdır.*

2. *W_β iyi sıralıdır.*

KANIT: β sıra sayısı için

$$\beta = \bar{B} \tag{1.63}$$

eşitliğini sağlayan bir ve yalnızca bir tane B kümesi vardır. Öte yandan, W bölüksel bir küme olduğundan $\beta = W_\beta$ olmalıdır. (1.63) eşitliğini sağlayan B kümesinin tekliği, $\bar{B} = W_\beta$ olmasını gerektirir. Buradan istenen $\beta = W_\beta$ eşitliği çıkar. Bölüksel küme iyi sıralı olduğundan, W_β kümesi iyi sıralıdır.

Alıştırmalar

1. $A = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ kümesi iyi sıralı mıdır? Neden?
2. $\mathbb{Q}^+ = \{\text{pozitif rasyonel sayılar}\}$ kümesi iyi sıralı mıdır? Neden?
3. $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, -3, -2, -1\}$ kümesi iyi sıralı mıdır? Neden?
4. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 0\}$ kümesi iyi sıralı mıdır? Neden?
5. $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 1, 3, 5, \ldots\}$ kümesi iyi sıralı mıdır? Neden?
6. a, κ nicelik sayılarından birisi sonsuz ve $\kappa \geq 1$ ise
$$\kappa + a = a + \kappa = \kappa \times a = a \times \kappa = a$$
olduğunu gösteriniz.
7. κ nicelik sayısı için
$$\kappa < 2^\kappa$$
olduğunu gösteriniz.
8. Her doğal sayı, iyi sıralı sonlu bir kümeye eşyapılıdır.
9. A kümesinin nicelik sayısı n ise $\mathscr{P}(A)$ kümesinin nicelik sayısının 2^n olduğunu gösteriniz.
10. Bölüksel bir kümenin kuvvet kümesinin, kapsamaya göre iyi sıralı olmadığını gösteriniz.
11. İyi sıralı küme bir ve yalnızca bir tane bölüksel kümeye eşsıralı olabilir. Gösteriniz.

2
Sayılar

2.1 Doğal Sayılar

Doğal Sayıların Kuruluşu

Doğal sayılar kümesini kurmak için ya *Peano belitlerini* ya da *kümesel yöntemi* seçeriz. Sonuçta ikisi aynı sistemi kurar. Biz, şimdiye dek kümelerle işlem yaptığımıza göre, doğal sayılar kümesini de kümesel yöntemle oluşturmak daha uygun olacaktır. Zaten, uygulayacağımız yöntemle elde edeceğimiz sistemdem, Peano belitleri önerme olarak çıkarabilir.

Boş ($\emptyset$) kümeyi kullanarak, sonraki bir öncekini içeren aşağıdaki ardışık kümeler dizisini oluşturalım. Diziye ait kümeleri istediğimiz simgelerle gösterebiliriz. Amacımıza daha hızlı ulaşmak için, onları, doğal sayılar için kullandığımız simgelerle gösterelim.

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{\emptyset\} \\
2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Bu kümelerden herbirisi, kendinden önce gelen kümelerin hepsini birer öğe olarak içermektedir. Bu şekilde ard arda istediğimiz kadar küme kurabiliriz. Bu kümelerin kuruluşu sonsuz zaman devam ettirilebilir, hiç bir zaman bitirilemez. (4.1) sistemini daha kısa olarak

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0,1\} \\
3 &= \{0,1,2\} \\
4 &= \{0,1,2,3\} \\
&\vdots \\
k &= \{0,1,2,\ldots,k-1\}) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

biçiminde yazalım.

Tanım 2.1. *A kümesinin A^+ ile gösterilen ardılı*

$$A^+ = A \cup \{A\} \tag{2.3}$$

eşitliği ile tanımlanır.

$A = \emptyset$ diyelim. (4.3) uyarınca, (4.2) sistemini

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= 0^+ \\
2 &= 1^+ \\
3 &= 2^+ \\
4 &= 3^+ \\
&\vdots \\
r &= (r-1)^+ \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

biçiminde yazabiliriz.

(4.1) ile tanımlanan kümelerin her birine bir *doğal sayı* diyeceğiz. Aslında, (4.1), (4.2) ve (4.4) dizileri aynıdır.

Tanım 2.2. *(4.1) dizisinin her kümesi bir doğal sayıdır. Diziye ait bütün kümelerin oluşturduğu küme doğal sayılar kümesidir.*

Yazık ki, diziye ait bütün kümeleri içeren bir kümeyi oluşturmak olanaksızdır. (4.1) sistemine ait kümeleri oluşturan ardışma yönteminde, her doğal sayıya er ya da geç sıra gelecektir. Ama (4.1) sisteminin bütün kümelerini içeren ω kümesini kuran son bir ardıla erişilemeyecektir. Başka bir deyişle, (4.1) sistemine ait kümelerin kuruluşu hiçbir zaman bitirilemeyecektir.

O nedenle, istediğimiz özeliklere sahip ω kümesinin varlığını bir belit (axiom) olarak alacağız. Konuyu biraz daha genelleştirmek için yeni bir kavrama gereksinim duyuyoruz.

Tanım 2.3.

$$\emptyset \in A$$
$$X \in A \to X^{+} \in A$$

özeliklerine sahip A kümesine ardışan küme *denilir.*

Ardışan bir küme bütün doğal sayıları içerir.

Ardışma yöntemiyle doğal sayı oluşturma işini asla bitiremarkeyeceğimiz için, ardışan bir kümenin varlığını bir belit olarak kabul edeceğiz.

Sonsuzluk Beliti

Aksiyom 2.4. *Ardışan bir küme vardır.*

Bu belit, ardışan (en az) bir kümenin varlığını söylüyor. Ardışan her küme bütün doğal sayıları içerir.

Doğal Sayı

Aşağıdaki özelikler kolayca görülür:

1. Ardışan iki kümenin arakesiti ardışan bir kümedir.

2. Ardışan kümelerden oluşan her ailenin arakesiti ardışan kümedir.

3. Özel olarak, ardışan bütün kümelerin arakesiti ardışan kümedir.

Bunların kanıtı problem olarak bırakılmıştır (bkz. Problemler 4.1).

Tanım 2.5. *Ardışan bütün kümelerin arakesitine doğal sayılar kümesi, denir.*

Kapsama bağıntısına göre sıralanmış olmak üzere, ardışan kümelerin en küçüğü doğal sayılar kümesidir. Bu kümeyi, ω simgesiyle temsil edeceğiz. (Sayısal problemlerde, çoğunlukla, ω yerine $\mathbb{N}$ simgesini kullanacağız.)

Problemler

1. Ardışan iki kümenin arakesitinin ardışan bir küme olduğunu gösteriniz.

2. Ardışan kümelerden oluşan her hangi bir ailenin arakesitinin de ardışan bir küme olduğunu gösteriniz.

2.2 Sonlu Tümevarım İlkesi

Theorem 2.6. *$W \subset \omega$ altkümesi için*

(a) $0 \in W$

(b) $n \in W \Rightarrow n^+ \in W$

koşulları sağlanıyorsa, $W = \omega$ *dır.*

KANIT: Varsayımlar W kümesinin ardışan bir küme olduğunu söylüyor (bkz. Tanım 4.3). ω doğal sayılar kümesi, ardışan her küme tarafından kapsandığından (bkz. Tanım 4.5). $\omega \subset W$ olacaktır. Oysa $W \subset \omega$ verilmiştir. Öyleyse $W = \omega$ dır.

Teoremarkin anlamını sözel olarak ifade edelim:

1. İlk doğal sayıyı içeren,

2. İçerdiği her doğal syının ardılını da içeren küme doğal sayılar kümesidir.

2.3 Peano Belitleri

Theorem 2.7. *Aşağıdaki özeliklere sahip bir ω kümesi vardır:*

P1. $0 \in \omega$

P2. $n \in \omega$ *ise* $n^+ \in \omega$

P3. $n \in \omega$ *ise* $n^+ \neq 0$

P4. ω *nın bir* A *alt kümesi aşağıdaki iki özeliğe sahipse* $A = \omega$ *dır:*

  (a) $0 \in A$

  (b) $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

P5. $m, n \in \omega$ *ve* $n^+ = m^+$ *ise* $m = n$ *dir.*

Varlığını kabul ettiğimiz ω kümesinin $P1. - P5.$ Peano koşullarını sağladığı kanıtlanabilir. Biraz uzunca olan bu kanıtlara girmeyeceğiz. İsteyen öğrenciler, bir çok kaynaktan bulabilecekleri bu kanıtları inceleyebilirler.

Problemler

1. Doğal sayıların hiç birisinin ardışan küme olamayacağını gösteriniz.

2. Hiç bir doğal sayı, kendisine ait bir kümenin altkümesi olamaz. Neden?.

3. A, B kümeleri için $A = B$ ise $A^+ = B^+$ olduğunu gösteriniz.

4. p doğal sayı ise $p \notin p$ olduğunu gösteriniz.

5. p, q, r doğal sayıları için aşağıdaki özeliklerin varlığını gösteriniz:

   (a) $q \neq q^+$

   (b) $p \in q$ ise $q \notin p$ olur.

   (c) $q \in p$ ve $p \in r$ ise $q \in r$ olur.

   (d) $p \in q$ ise $p^+ \subset q$ olur.

6. $W \in n$ ve $n \in \omega$ ise $W \in \omega$ olduğunu tüme varımla ispatlayınız.

7. $W^+ \in \omega$ ise $W \in \omega$ olduğunu gösteriniz.

8. $p \in \omega$ ise ya $p = 0$ olduğunu ya da $p = q$ olan bir $q \in \omega$ varolduğunu gösteriniz.

2.4 *Doğal Sayıların Sıralanması*

Doğal sayılarda varlığını sezgisel olarak bildiğimiz ya da alışkanlıkla kullandığımız *'küçük ya da eşit'* $\leq$ bağıntısını matematiksel olarak tanımlayacak ve $(\omega, \leq)$ sisteminin *iyisıralı* olduğunu kanıtlayacağız.

Tanım 2.8. *Doğal sayılar kümesi üzerinde $\leq$ bağıntısı*

$$a \leq b \Leftrightarrow (a \in b) \vee (a = b) \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır.

(4.5) ifadesi, "*a doğal sayısı, b doğal sayısından ya küçüktür ya da eşittir*" diye okunur.

$a \leq b$ ile $b \geq a$ simgeleri eş anlamda kullanılacaktır.

$\leq$ yerine $<$ bağıntısını kullanmak istiyorsak, $a < b$ ifadesini

$$a < b \Leftrightarrow (a \leq b) \wedge (a \neq b) \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlayabiliriz.

$\leq$ bağıntısının doğal sayılar kümesi üzerinde *iyi sıralama* bağıntısı olduğunu göstermek için, $(\omega, \leq)$ sisteminin önce tikel sıralı bir sistem olduğunu, sonra iyisıralı bir sistem olduğunu kanıtlaycağız.

Theorem 2.9. *$(\omega, \leq)$ tikel sıralı bir sistemdir.*

Kanıt: *Sistemin yansımalı*, *geçişmeli* ve *antisimetrik* olduğunu göstereceğiz.

yansıma: Her öğe kendisine eşt olduğundan, $a \in \omega$ için $a = a$ dır. O halde, (4.5) den $a \leq a$ yazabiliriz.

geçişme: $a, b, c \in \omega$ verilsin. $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise dört olası durum vardır:

$$\begin{aligned}
(a \in b) \wedge (b \in c) &\to ((a \in b) \wedge (b \subset c) \to (a \in c)) \\
(a \in b) \wedge (b = c) &\to a \in c \\
(a = b) \wedge (b \in c) &\to a \in c \\
(a = b) \wedge (b = c) &\to a = c
\end{aligned}$$

(4.5) uyarınca, bu dört durumun her biri için $a \leq c$ olacaktır.

antisimetrik: $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise (4.5) uyarınca ya $a = b$ ya da $a \leq b$ ve $b \in a$ olacaktır. İkinci durum varsa $a \subset b$ ve $b \subset a$ çıkar ki bu $a = b$ olmasını gerektirir.

Theorem 2.10. *$a \in \omega$ ise $0 \leq a$ olur.*

KANIT:

$$A = \{a \mid a \in \omega, 0 \leq a\}$$

kümesini düşünelim. *Sonlu Tüme Varım İlkesi* (bkz. `Teoremark` 4.6) uyarınca $A = \omega$ olduğunu göstermeliyiz. $\leq$ bağıntısı yansımalı olduğundan $0 \leq 0$ çıkar. O halde, $0 \in A$ olur. Herhangi bir $a \in A$ seçelim. Varsayımdan $0 \leq a$ olur. $a \in a^+$ olduğundan $a \leq a^+$ yazılır. Böylece $0 \leq a$ ve $a \leq a^+$ elde edilmiş oldu. $\leq$ bağıntısı geçişmeli olduğu için

$$(0 \leq a) \wedge (a \leq a^+) \to (0 \leq a^+)$$

olacaktır. Öyleyse, $a^+ \in A$ olur ve *Sonlu Tüme Varım İlkesine* göre $A = \omega$ sonucuna ulaşılır.

Theorem 2.11. *$b < a$ ise $b^+ \leq a$ dir.*

KANIT: b doğal sayı olsun ve

$$A_n = \{a \in \omega \mid (b < a) \to (b^+ \leq a)\}$$

kümesmi tanımlayalım. Sonlu Tüme Varım İlkesine göre $A_n = \omega$ olduğunu göstereceğiz. Tanımdan

$$\begin{aligned}
a \notin A_n &\leftrightarrow (b < a) \wedge (\neg(b^+ \leq a)) \\
&\leftrightarrow (b \in a) \wedge (\neg(b^+ \leq a))
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan, özel olarak,

$$0 \notin A_n \leftrightarrow b \in 0 \wedge \neg(b^+ \leq 0)$$

çıkar, ki bu olanaksızdır. Öyleyse $0 \in A_n$ olmalıdır. Şimdi herhangi bir $a \in A_n$ seçelim. Tanımdan $b < a \to b^+ \leq a$ dir. $a^+ \in A_n$ olduğunu göstermek için

$$b < a^+ \to b^+ \leq a \leq a^+$$

olduğunu göstermeliyiz. $b < a^+$ ise $b \in a^+$ dir. Teoremark 4.19 gereğince, ya $b \in a$ dir ya da $b = a$ dir. Eğer $b = a$ ise $b^+ = a^+$ çıkar ve ispat biter. Eğer $b \in a$ ise; yani $b < a$ ise, kabulümüzden

$$b^+ \leq a < a^+$$

çıkar ve ispat biter.

Theorem 2.12. $(\omega, \leq)$ *iyisıralı bir sistemdir.*

Kanıt: Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Eğer $(\omega, \leq)$ sistemi iyisıralı olmasaydı, boş olmayan ve en küçük öğesi var olmayan bir $A \subset \omega$ alt kümesi var olacaktı. Şimdi

$$W = \{b \in \omega \,|\, a \in A \Rightarrow b \leq a\}$$

kümesini tanımlayalım. Sonlu Tüme Varım İlkesiyle $W = \omega$ olduğunu göstereceğiz. `Teoremark` 4.10 den $0 \in W$ yazabiliriz. Bir $b \in W$ seçelim. Tanımdan, her $a \in A$ için $b \leq a$ olacaktır. Eğer, herhangi bir $p \in A$ için $b = p$ ise p, A nın en küçük öğesi olur, ki bu kabulümüze aykırıdır. Öyleyse, her $a \in A$ için $b < a$ olacaktır. `Teoremark` 4.11 den, her $a \in A$ için $b^+ \leq a$ yazabiliriz, ki bu $b^+ \in W$ olmasını gerektirir. Demek ki $W = \omega$ dır. A nın *en küçük öğesi* olmadığından $W \cap A = \emptyset$ çıkar. Öyleyse $A = \emptyset$ olmalıdır.

Aritmetiğin kurulması için doğal sayıların kurulması ve onun üzerinde işlemlerin tanımlanması yeterlidir. Ondan sonra $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin ve $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin kurulması ve dört işlemin onlar üzerine genişletilmesi kolaydır. Bu işler cebir, analiz ve topoloji derslerinde yapılır. O nedenle, bu genişlemeleri burada ayrıntılı anlatmaya gerek görmüyoruz. Yalnızca tam sayılar kümesi ile rasyonel sayılar kümesinin kuruluşunu söylemekle yetineceğiz.

2.5 *Tam Sayıların Kuruluşu*

Tam sayılar, iki doğal sayının farkı ya da toplamı olarak çok farklı biçimlerde yazılabilir. Örneğin, 7 tam sayısını

$$\begin{aligned} 7 &= -121 - (-128) &&= -1 - (-6) = 0 + 7 &&= 1738 - 1731 \\ &= 17 - 10 &&= 2 + 5 = 8 - 13 &&= 3709 - 3702 \\ &= \ldots \end{aligned} \tag{2.7}$$

gibi çok değişik biçimlerde yazabiliriz. Tam sayıları öyle kurmalıyız ki, yukarıdaki gibi farklı yazılışlara izin versin ve onları tek bir tam sayı olarak kabul etsin. Bunu yapmak kolaydır. $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere, iyi bilinen

$$m - n = p - q \Leftrightarrow m + q = n + p \tag{2.8}$$

bağıntısını düşünelim. Şimdi, tam sayıların ne olduğunu bilmediğimizi var sayıp, yukarıdaki (4.8) bağıntısının sol yanını unutalım. $m - n$ yerine (m, n) sıralı ikilisini ve $p - q$ yerine (p, q) sıralı ikilisini koyarak, bağıntıyı

$$(m, n) \approx (p, q) \Leftrightarrow m + q = n + p \tag{2.9}$$

biçiminde yeniden yazalım. Bunun $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir *denklik bağıntısı* olduğu kolayca gösterilir.

Tanım 2.13. *(4.9) bağıntısının denklik sınıfları kümesine* tam sayılar kümesi *denilir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.*

Demek ki, doğal sayılar kümesi biliniyorken, tam sayılar kümesini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerindeki (4.9) denklik bağıntısının denklik sınıfları olarak kurabiliyoruz. O nedenle, (4.7) biçiminde yazılan sayılar aynı denklik sınıfı içindedirler.

(4.9) denklik bağıntısının tanımladığı denklik sınıflarını

$$[(a, b)] = \{(x, y) \mid (a, b) \approx (x, y)\} \tag{2.10}$$

biçiminde gösterelim.

Tam sayılar kümesi üzerinde toplama ve çarpma: $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

2.6 Doğal Sayılarda Aritmetik

Doğal sayılarda Eşitlik

Tanım 2.14. *m, n iki doğal sayı ise, bunların, birbirlerine eşit oluşunu $m = n$ simgesiyle gösterecek ve*

$$m = n \quad \Longrightarrow \quad \natural(A) = \natural(B) \tag{2.11}$$

bağıntısıyla tanımlayacağız.

Bunu, *"m, n ye eşittir"* ya da *"m eşit n dir"*, diye okuyacağız.

Eşitliğin aşağıda sıralanan özelikleri, tanımdan ve (4.11) bağıntısından çıkar:

Theorem 2.15. *Aşağıdaki özelikler vardır.*

1.	$m \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m = m$	(Yansıma Özeliği)
2.	$m, n \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m = n \vee n = m$	(İkileme Özeliği)
3.	$m, n \in \mathbb{N},\ m = n$	$\Longrightarrow$	$n = m$	(Simetri Özeliği)
4.	$m, n, c \in \mathbb{N},\ m = n \wedge n = c$	$\Longrightarrow$	$m = c$	(Geçişme Özeliği)

Doğal Sayılarda Toplama

Tanım 2.16. *a ile b doğal sayılarının toplamı, $a+b$ simgesiyle gösterilir ve*

$$a+b = |(A \cup B)| \qquad A \cap B = \emptyset \tag{2.12}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Sonlu iki kümenin bileşimi sonlu olduğundan, $|(A \cup B)|$ nicelik sayısı, $\mathbb{N}$ ye aittir. Dolayısıyla, $+$ (toplama) işlemi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye tanımlı ikili işlemdir:

$$+ \ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad + \ : \ (a,b) \to a+b \tag{2.13}$$

Toplama İşleminin Özelikleri

Theorem 2.17. *Doğal sayılarda toplama işlemi aşağıdaki özelikleri sağlar:*

1. $m,n \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m+n \in \mathbb{N}$	*(Kapalılık Özeliği)*
2. $m,n \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m+n = n+m$	*(Yer Değişme Özeliği)*
3. $m,n,r \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m+(n+r) = (m+n)+r$	*(Birleşme Özeliği)*
4. $m,n,r \in \mathbb{N},\ m=n$	$\Longrightarrow$	$m+r = n+r$	*(Sadeleşme Özeliği)*
5. $m \in \mathbb{N},\ 0 \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m+0 = 0+m = m$	*(Birim Öğe Var)*
6. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq 0$	$\Longrightarrow$	$m+n \neq 0$	*(Ters Öğe Yok)*

KANIT: bkz. Problemler 4.6.

Doğal Sayılarda Çarpma

Tanım 2.18. *m ile n nin çarpımı $\quad m \times n, \quad m.n, \quad mn \quad$ simgelerinden birisiyle gösterilir ve aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır:*

$$m.n = |(A \times B)| \tag{2.14}$$

Sonlu iki kümenin kartezyen çarpımı sonlu olduğundan, $|(A \times B)|$ nicelik sayısı, daima $\mathbb{N}$ ye aittir. Dolayısıyla, $\times$ (çarpma) işlemi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye tanımlı bir ikili işlemdir:

$$\cdot \ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \cdot \ : \ (m,n) \hookrightarrow m.n \tag{2.15}$$

Çarpma İşleminin Özelikleri

Theorem 2.19. *Doğl sayılarda çarpma işlemi aşağıdaki özelikler sağlar.*

1. $m,n \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m.n \in \mathbb{N}$	*(Kapalılık Özeliği)*
2. $m,n \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m.n = n.m$	*(Yer Değişme Özeliği)*
3. $m,n,r \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m.(n.r) = (m.n).r$	*(Birleşme Özeliği)*
4. $m,n,r \in \mathbb{N},\ m=n$	$\Longrightarrow$	$m.r = n.r$	*(Sadeleşme Özeliği)*
5. $m \in \mathbb{N},\ 1 \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m.1 = 1.m = m$	*(Birim Öğe Var)*
6. $m \in \mathbb{N},\ 0 \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$m.0 = 0.m = 0$	*(Yutan Öğe Var)*
7. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq 1$	$\Longrightarrow$	$m.n \neq 1$	*(Ters öğe Yok)*

KANIT: bkz. Problemler 4.6.

Dağılma Kuralları

Theorem 2.20. *Doğal sayılarda çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özeliği vardır.*

Bunun simgelerle ifadesi şöyledir.

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Longrightarrow \quad a.(b+c) = a.b + a.c \qquad \text{(soldan dağılma)}$$
$$a, b, c \in \mathbb{N} \Longrightarrow \quad (b+c).a = b.a + c.a \qquad \text{(sağdan dağılma)}$$

KANIT: bkz. Problemler 4.6.

Problemler

1. Eşitliğin teoremark 4.15 ile verilen özeliklerini sağlayınız.
2. Toplama işleminin, Teoremark 4.6 ile verilen özelikleri kanıtlayınız.
3.

2.7 Rasyonel Sayılar

Tam sayılarda olduğu gibi rasyonel sayıların da

$$\ldots = \frac{-1}{-2} = \frac{-4}{-8} = \frac{-12}{-24} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24} = \ldots \tag{2.16}$$
$$\ldots = \frac{-12}{-24} = \frac{-8}{-16} = \frac{-3}{-6} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{11}{22} = \frac{9}{18} = \ldots \tag{2.17}$$

gibi birden çok biçimde yazılabildiğini biliyoruz. Tam sayılarda yaptığımız gibi, rasyonel sayıları öyle kurmalıyız ki, yukarıdaki gibi farklı yazılışlara izin versin ve onları tek bir raqsyonel sayı olarak kabul etsin. Bunu yapmak kolaydır. $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, iyi bilinen

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \leftrightarrow mq = np \tag{2.18}$$

bağıntısını düşünelim. Şimdi, rasyonel sayıların ne olduğunu bilmediğimizi var sayıp, yukarıdaki (4.18) bağıntısının sol yanını bilinenler cinsinden yazalım.

$\frac{m}{n}$ yerine (m, n) sıralı ikilisini ve $\frac{p}{q}$ yerine (p, q) sıralı ikilisini koyarak, bağıntıyı

$$(m, n) \approx (p, q) \Leftrightarrow mq = np \tag{2.19}$$

biçiminde yeniden yazalım. Bunun $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilir.

Tanım 2.21. *(4.19) bağıntısının denklik sınıfları kümesine* rasyonal sayılar kümesi *denilir ve* $\mathbb{Q}$ *ile gösterilir.*

Demek ki, tam sayılar kümesi biliniyorken, rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerindeki (4.19) denklik bağıntısının denklik sınıfları olarak kurabiliyoruz. *toplama, çıkarma, çarpma, bölme* işlemleri ile *sıralama bağıntısı*, (4.19) ile verilen denklik sınıfları kümesi üzerinde kolayca tanımlanır.

Pratikte rasyonel sayılarla işlem yaparken, denklik sınıflarını değil, işleme giren her bir denklik sınıfından seçilecek birer temsilci öğeyi kullanırız.

Rasyonel sayılar kümesi üzerinde *toplama ve çarpma* işlemleri (4.9) ile belirlenen denklik sınıfları yardımıyla tanımlanır.

İyi Tanımlılık

Rasyonel sayıların farklı yazılışlarıyla işlem yaparken hep aynı sonuca ulaşırız. Örneğin,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$
$$\frac{3}{6} + \frac{12}{16} = \frac{120}{96} = \frac{5}{4}$$

işlemleri aynı sonucu verir.

Bunu genelleştirebiliriz:

Denklik sınıfları üzerinde tanımlanan bir işlemin, denklik sınıflarını temsil etmek üzere seçilecek öğelere bağlı olup olmadığı uygulamada önem taşır. Denklik sınıfları üzerinde işlem yaparken denklik sınıflarından hangi temsilcileri seçersek seçelim, hep aynı sonuca ulaşmalıyız. Bu özelik, işlemin *iyi tanımlı* olduğu anlamına gelir. Değilse, işlem yapan kişiler farklı temsilciler seçebileceğinden, işlemin sonucu farklı çıkar. Böyle bir durum istenmez.

Tanım 2.22. *Denklik sınıfları kümesinde tanımlı bir işlem, denklik sınıfını temsil etmek üzere seçilen temsilciye bağlı değilse, o işlem* iyi tanımlıdır*.*

Bu kavramı biraz açmakta yarar var. Örneğin, rasyonel sayılar kümesi üzerinde

$$m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{olmak üzere} \quad f(\frac{m}{n}) = m \tag{2.20}$$

bağıntısını düşünelim. (4.20) kuralına göre

$$\begin{aligned} f(\frac{3}{4}) &= 3 \\ f(\frac{6}{8}) &= 6 \\ f(\frac{12}{16}) &= 12 \\ f(\frac{75}{100}) &= 75 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olacaktır. Oysa $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{75}{100} = \ldots$ olduğundan (4.20) le verilen f bir fonksiyon değildir. İyi tanımlı olması için, $\frac{3}{4}$ rasyonel sayısının denklik sınıfından seçilecek her temsilci $\frac{m}{n}$ sayısı için $f(\frac{m}{n})$ değerleri aynı olmalıdır.

Uyarı 2.23.

İyi tanımlı fonksiyon deyince, sanki iyi tanımlı olmayan fonksiyon varmış izlenimi doğmaktadır. Aslında, (4.20) kuralı bir fonksiyon tanımı değildir. Fonksiyon tanımlı ise, zaten iyi tanımlıdır; *kötü tanımlı fonksiyon* yoktur. O nedenle, *iyi tanımlı fonksiyon* deyiminin fonksiyon tanımının titizlikle yapılmadığı eski zamanlardan kalmış bir terim olduğu açıktır. Ama sık sık cebirde ve analizde karşınıza çıkabilir.

2.8 *Problemler*

1. a, b, c doğal sayıları için, aşağıdaki aşağıdaki özelikleri kanıtlayınız

1) $(a < b) \vee (a = b) \vee (a > b)$			*(Üç Hal Kuralı)*
2) $(a < b) \wedge (b < c)$	$\Longrightarrow$	$a < c$	*(Geçişkenlik)*
3) $a < b$	$\Longrightarrow$	$a + c < b + c$	*(Toplamda Sadeleşme)*
4) $(a < b) \wedge (c < d)$	$\Longrightarrow$	$a + c < b + d$	*Yan yana Toplama)*
5) $a < b \vee (c > 0)$	$\Longrightarrow$	$a.c < b.c$	*(Çarpmada Sadeleşme)*

2. a, b sıfırdan farklı iki doğal sayı ve m, n iki doğal sayı ise, aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz.

   (a) $a^m.a^n = a^{m+n}$

   (b) $a^n.b^n = (ab)^n$

   (c) $(a^m)^n = a^{mn}$.

3. $A \subset \omega$ kümesi

$$(a)\ 0 \in A$$
$$(b)\ n \in A \Longrightarrow n^+ \in A$$

   koşullarını sağlıyorsa, $A = \omega$ olur. Gösteriniz.

4. m ile n iki doğal sayı ve $m \in n^+$ ise ya $m \in n$ ya da $m = n$ olduğunu gösteriniz.

5. Ardılları eşit olan iki doğal sayı birbirlerine eşittir; yani

$$(m, n \in \omega) \wedge (m^+ = n^+) \to m = n$$

olur. Gösteriniz.

3
Sayılar

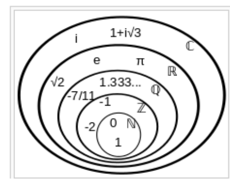


Figure 3.1: Sayı Kümeleri

3.1 Doğal Sayılar

Doğal sayılar, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$ kümesidir. Negatif değer almazlar. Bazı kaynaklarda "0" doğal sayı olarak alınmaz ancak cebirsel yapılar kurulacaksa "0" sayısının doğal sayı olarak alınması gerekir.

Bazı kaynaklar, 0 hariç tutulunca, kalan doğal sayılar kümesine *sayma sayıları* der

3.2 Doğal sayılarda Toplama

Toplama işlemi ileri doğru sayma işlemidir. Toplama işlemine katılan sayılara terim, işlemin sonucuna toplam denir. Toplama işlemi sayıların aynı basamakları arasında yapılır. Bu nedenle toplama işleminde sayılar aynı basamaklar alt alta gelecek şekilde yapılır.

Doğal sayılarda toplama aşağıdaki cebirsel kurallara uyar:

Toplamsal birim öğe: 0

$$a + 0 = a$$

Toplamanın değişme özelliği:

$$a + b = b + a$$

Toplamanın birleşme özelliği:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Toplamanın çarpma üzerine dağılma özelliği (sağdan dağılma):

$$(a + b)c = ac + bc$$

Bir a sayısını bir b sayısıyla toplamak, a sayısının b kere ardılını almak olarak tanımlanır. Daha matematiksel bir tanım verilmek istenirse `Ard(n)` gösterimi n sayısının ardılını ifâde etmek üzere, toplama aşağıdaki belitlerle tanımlanır:

$$a + 0 = aa + Ard(b) = Ard(a + b)$$

Bu belitlerden yola çıkarak ardıllık işlemini toplama cinsinden göstermek mümkündür: 2. belitte b=0 seçilirse

$$a + Ard(0) = ard(a + 0)$$

sıfırın ardılı 1'dir. O halde,

$$Ard(a) = a + 1$$

olduğu kolaylıkla görülür.

3.3 *Doğal sayılarda Çarpma*

Çarpma işlemi ard arda toplama işlemidir. Çarpma işlemine katılan sayılara çarpan, işlemin sonucuna çarpım denir.

Doğal sayılarda çarpma aşağıdaki cebirsel kurallara uyar:

Çarpımsal birim öğe:

$$a1 = a$$

Çarpmanın değişme özelliği:

$$ab = ba$$

Çarpmanın birleşme özelliği

$$(ab)c = a(bc)$$

Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği (soldan dağılma):

$$c(a + b) = ca + cb$$

Bir a sayısını bir b sayısıyla çarpmak, a sayısının b kere toplamını almak olarak tanımlanır. Daha matematiksel bir tanım verilmek istenirse Ard(n) gösterimi n sayısının ardılını ifâde etmek üzere, çarpma aşağıdaki belitlerle tanımlanır:

$$a1 = aa\,Ard(b) = ab + a$$

Uyarı 3.1. *Doğal syıla çıkarma ve bölme işlemlerine kapalı değildir; yani çıkarma ve bölme işlemleri doğal sayılar kümesinde tanımlı değildir.*

3.4 *Onlu Sistem*

Sayıların gösterimi için tarih boyunca farklı simgeler kullanılmıştır. Şu anda dünyada yaygın olan sistem onlu sistem denilen ve 10 tabanına göre sayıların gösterildiği sistemdir. Bu sistemin önemini anlamak için, Roma rakamlarıyla dört işlem yapmayı deneyiniz.

Aslında, her doğal sayı taban olarak kullanılabilir.

Bilgisayarda 2 tabanı kullanılır. İkili (binary) sistem diye anılır.

Onlu sistemde sayıları göstermek için 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sayakları (digits) kullanılır. Bu sistemde, bir sayının gösteriminde sağdan sola doğru sayakların yer aldığı basamak değerleri, sırasıyla, Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

Table 3.1: default

basamak	üstel ifadesi	basamak değeri
Birler basamağı	10^0	1
Onlar basamağı	10^1	10
Yüzler basamağı	10^2	100
Binler basamağı	10^3	1 000
On binler basamağı	10^4	10 000
Yüz binler basamağı	10^5	100 000
Milyonlar basamağı	10^6	1 000 000
On milyonlar basamağı	10^7	10 000 000
Yüz milyonlar basamağı	10^8	100 000 000
...		

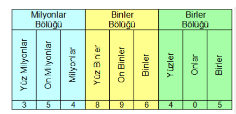


Figure 3.2: Basamaklar

3.5 *Tamsayılar*

Çıkarma işlemi geçerli olacak biçimde doğal sayıların genişletilmesiyle Tam sayılar kümesi elde edilir.

Tam sayılar kümesi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

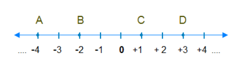


Figure 3.3: Sayı Doğrusu

Tamsayılar pozitif tam sayılar kümesi, negatif tam sayılar kümesi ve sıfırın birleşimi ile oluşan sayı kümesidir. Sayma sayılarının soluna artı anlamında + işareti yazıldığında +1, +2, +3, +4, ...sayıları elde edilir. Bu sayılara *pozitif tam sayılar* denir ve pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}_+$ ile gösterilir.

Pozitif Tam Sayılar

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Negatif Tam Sayılar

Sayma sayılarının soluna eksi anlamında işareti yazıldığında -1, -2, -3, -4, ... sayıların elde edilir.

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$$

Bu sayılara negatif tam sayılar denir ve negatif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}_-$ ile gösterilir. Pozitif tam sayılar, negatif tam sayılar ve sıfır, tam sayıları oluşturur ve tam sayılar kümesi Z ile gösterilir.

Sıfır ne negatif ne de pozitif tam sayıdır. Sıfırın işareti yoktur.

Solunda işareti olmayan (sıfır hariç) sayılar pozitif olarak alınır.

Her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır.

Tam Sayıların Sayı Doğrusunda Gösterilmesi

Tam sayılar sayı doğrusu üzerinde gösterilirken; bir doğru üzerinde bir nokta alınıp sıfır sayısıyla eşlenir ve bu referans noktası olarak alınır. Sağında ve solunda eşit aralıklarla noktalar işaretlenir. Sıfır noktasının sağındaki noktalar sırasıyla +1, +2, +3, ... ile, solundaki noktalar sırasıyla -1, -2, -3, ... ile eşlenir. Aşağıdaki sayı doğrusunda A noktası -4, B noktası -2, C noktası +1, D noktası +3 ile eşlenmiştir. Bu noktalar ve görüntüleri aşağıdaki sayı doğrusunda verilmiştir.tam sayılar sayı doğrusu

3.6 Mutlak Değer

Mutlak değer; sayı doğrusu üzerindeki herhangi bir sayının referans noktasına olan uzaklığını gösteren sayıya o sayının mutlak değeri denir. Bir sayının mutlak değeri, sayının birbirine paralel iki çizgi arasına yazılmasıyla gösterilir. Aşağıdaki örneklerde de görüldüğü üzere; pozitif veya negatif her tam sayı mutlak değer dışına pozitif olarak çıkar. Sıfırdan farklı her tam sayının mutlak değeri pozitif tam sayıdır.

$$|+15| = +15$$
$$|-46| = +46$$
$$|-7| = +7$$

3.7 Tam Sayıların Karşılaştırılması

- Sayı doğrusu üzerinde negatif tam sayılar sıfırın solunda, pozitif tam sayıları sıfırın sağındadır.
- Sıfır, bütün negatif tam sayılardan büyüktür. 0 > -1 > -55 > -99
- Sıfır, bütün pozitif tam sayılardan küçüktür. 0 < 5 < 42 < 78
- Sayı doğrusu üzerinde sağa doğru gidildikçe sayılar büyür, sola doğru gidildikçe sayılar küçülür.
- Pozitif tam sayılar sıfırdan uzaklaştıkça büyür. En küçük tam sayı +1 dir.

- Negatif tam sayılar sıfıra yaklaştıkça büyür. En büyük negatif tam sayı -1 dir.
- Negatif her tam sayı, pozitif her tam sayıdan küçüktür.
- Her tam sayı solundaki tüm tam sayılardan büyük, sağındaki tüm tam sayılardan küçüktür.

Yukarıdaki anlatımdan faydalanarak aşağıda verilen 10 soruluk alıştırmamızı çözmenizi öneririz.

3.8 Toplama

Toplama işlemi yapılırken, verilen tam sayıların aynı veya farklı işaretli oluşlarına göre işlem yapılır. İkiden fazla tam sayı toplanırken de kolaylık sağlaması için önce aynı işaretli sayılar ile işlem yapılır. Tam sayılarda toplama işlemini yeni bir sayfada çözümlü sorular eşliğinde daha detaylı olarak açıkladım. Aşağıdaki linkten konu anlatımı sayfasına ulaşabilirsiniz. Tam Sayılarda Toplama İşlemi

3.9 Çıkarma

Çıkarma işlemi kuralı, çıkarma işleminin sayı doğrusunda gösterimi ve modelleyerek çıkarma işlemi yapma konularını yeni bir sayfada çözümlü sorular eşliğinde daha detaylı olarak açıkladık. Aşağıdaki linkten ulaşabilirsiniz. Tam Sayılarda Çıkarma İşlemi

3.10 Çarpma

Çarpma işlemi kuralı, çarpma işleminin sayı doğrusunda gösterimi, çarpma işleminin özellikleri ve modelleyerek çarpma işlemi yapma konularına aşağıdaki linkten ulaşabilirsiniz. Tam Sayılarda Çarpma İşlemi

Tam Sayılarda Bölme İşlemiBölme işlemi, bölme işleminin özellikleri, bir tam sayıyı 10' un kuvvetleri ile bölme ve modelleyerek bölme işlemi yapma konularına aşağıdaki linkten ulaşabilirsiniz.

3.11 Büyük Sayılar Nasıl Adlandırılır?

Büyük sayılar, yaygınlığı nedeniyle İngilizce adlarıyla çağrılır. Ama bu adlandırma Avrupa'da ve Amerika'da birbirlerinden farklıdır. Bu yazıda, bu farklılığın nedenini ve farklılığı yoketmek için önerilen çareleri ele alacağız.

Büyük sayıların adlandırılışı, bir çok alanda olduğu gibi, Latin kökenlidir. Örneğin, Latince 3 anlamına gelen *-tri-* sözcüğünün arkasına *-illion-* takısı eklenerek *-trillion-* sözcüğü oluşturulur. Bu kurgu *-million-* sözcüğüne bir benzetmedir. Fransız matematikçisi *Nicolas Chuquet* (1445-1488) 10^{12} sayısı için -byllion- ve 10^{18} sayısı için -tryllion- sözcüklerini kullanmıştır. Bu nedenle, büyük sayıları adlandırma sisteminin, ondan kaynaklandığı söylenir. Ancak, 1600 yıllarında Fransada 10^9 yerine -billion- ve 10^{12} yerine -trillion- sözcükleri kullanılır olmuştur. Fransa ve Amerika bu yeni sistemi kullanmaya devam ederken İngiltere ve Almanya Chuquet sistemini kullanmayı sürdürmüştür. 1948 yılında Fransa tekrar Chuquet sistemine dönmüş ve böylece Avrupa ve Amerikan adlandırma sistemleri coğrafi olarak da ayrılmıştır. Ancak, Amerika'nın finansal üstünlüğü ağır basmaya başlayınca, büyük sayıları adlandırmada Amerikan sistemi dünyada yaygınlık kazanmaya başlamıştır. 1974 yılında İngiltere başbakanı Wilson, İngilterenin resmi raporlarında -billion- nun 10^{12} değil, Amerikan sisteminde olduğu gibi 10^9 sayısı yerine kullanılacağını açıklamıştır. Ama, bu girişim bile, Avrupa ve Amerikan sistemleri denilen iki adlandırma sistemini birleştiremarkemiştir. Birleştirme yönünde yapılan öneriler vardır. Bu önerilere geçmeden önce, Avrupa ve Amerikan sistemlerinde büyük sayıların nasıl adlandırıldığını söylemeliyiz. $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ gibi bir doğal sayı göstersin. Avrupa sisteminde büyük sayılar 10 üzeri (6n) biçiminde gruplanır. 10^{6n} sayısının adı, n sayısının Latince adına -illion- takısı eklenerek söylenir. Amerikan sisteminde takı aynıdır ama büyük sayılar 10^{3n+3} biçimindeki gruplara ayrılır. Bu nedenle, billion sayısı Avrupa sisteminde 10^{12} = 1 000 000 000 000 sayısı iken Amerikan sisteminde 10^9 = 1 000 000 000 sayısıdır. 10^9 sayısına Avrupada -milliard- ya da -bin milyon- denilmektedir.

Bu gün Amerikanın adlandırma sisteminin daha iyi olduğu söylenemeyeceği gibi, onların Avrupa sistemine dönmesi de beklenemez. Onun yerine, büyük sayıları adlandırmada, bütün ülkelerin anlaşacağı yepyeni bir sisteme gitmekte yarar vardır. Bu önerilerden birisi, büyük sayıları 10^{3n} gruplarına ayırmak, Latince sayılar yerine Yunanca sayıları kullanmaktır. Bir başka öneri de, sayılara International System of Units (SI) takısını eklemektir. Bu öneri, fiziksel bilimlerle de uyum sağlayacağı için, bilimsel açıdan daha uygun görünmektedir. Ama, bütün dünyada insanların alışkın oldukları sayı adlarını aniden değiştirmek olanaksızdır. Bu değişim, okullardan başlayıp bir iki kuşak zaman alacak bir iştir. Aşağıdaki tablo, yukarıda söylenenleri özetlemektedir.

Table 3.2: Büyük Sayıları Adlandırma

n	10^{3n}	*Amerikan Sistemi*	*Avrupa Sistemi*	*SI öntakısı*	*Öneri*
3	10^{9}	billion	milliard	giga-	gillion
4	10^{12}	trillion	billion	tera-	tetrillion
5	10^{15}	quadrillion	billiard	peta-	pentillion
6	10^{18}	quintillion	trillion	exa-	hexillion
7	10^{21}	sextillion	trilliard	zetta-	heptillion
8	10^{27}	septillion	quadrillion	yotta-	oktillion
9	10^{27}	octillion	quadrilliard		ennillion
10	10^{30}	nonillion	quintillion		dekillion
11	10^{33}	decillion	quintilliard		hendekillion
12	10^{36}	undecillion	sextillion		dodekillion
13	10^{39}	duodecillion	sextilliard		trisdekillion
14	10^{42}	tredecillion	septillion		tetradekillion
15	10^{45}	quattuordecillion	septilliard		pentadekillion
16	10^{48}	quindecillion	octillion		hexadekillion
17	10^{51}	sexdecillion	octilliard		heptadekillion
18	10^{54}	septendecillion	nonillion		oktadekillion
19	10^{57}	octodecillion	nonilliard		enneadekillion
20	10^{60}	novemdecillion	decillion		icosillion
21	10^{63}	vigintillion	decilliard		icosihenillion
22	10^{66}	unvigintillion	undecillion		icosidillion
23	10^{69}	duovigintillion	undecilliard		icositrillion
24	10^{72}	trevigintillion	duodecillion		icositetrillion
25	10^{75}	quattuorvigintillion	duodecilliard		icosipentillion
26	10^{78}	quinvigintillion	tredecillion		icosihexillion
27	10^{81}	sexvigintillion	tredecilliard		icosiheptillion
28	10^{84}	septenvigintillion	quattuordecillion		icosioktillion
29	10^{87}	octovigintillion	quattuordecilliard		icosiennillion
30	10^{90}	novemvigintillion	quindecillion		triacontillion
31	10^{93}	trigintillion	quindecilliard		triacontahenillion
32	10^{96}	untrigintillion	sexdecillion		triacontadillion
33	10^{99}	duotrigintillion	sexdecilliard		triacontatrillion

3.12 Rasyonel Sayılar

Tanım 3.2. *İki tam sayının birbirine oranı şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar denir.*

$$\frac{p}{q} \qquad (p, q \in \mathbb{Z})$$

Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ harfi ile gösterilir.

Rasyonel sayılar $p/q = \frac{p}{q} \qquad (p \neq 0)$ şeklinde yazılabilen sayılardan oluşur. Bölme işleminde payda sıfırdan farklı olmalıdır.

Tüm doğal sayılar ve tam sayılar, paydalarına 1 yazılıp iki tam sayının oranı şeklinde yazılabildiği için rasyonel sayılardır.

Buna göre, Doğal Sayılar $\mathbb{N}$, Tamsayılar $\mathbb{Z}$, rasyonel sayılardır. Daha genel olarak,

Tanım 3.3. *Ondalık açılımları sonlu ya da devirli olan bütün sayılar rasyonal sayıdır.*

Örnek -7 =-71-7 =-71

Tüm kesirler rasyonel sayılardır.

Örnek -135=-85-35=-85

Ondalıklı sayılar ve devirli ondalıklı sayılar kesir olarak yazılabildiği için rasyonel sayılardır.

Örnek 0,2=2100,2=210 1,3=1,33333... =139=1291,3=1,33333... =139=129

Kök alma işleminde kökten kurtulabilen sayılar rasyonel sayıdır.

Örnek 29??=2.3=6=61

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Ondalık kesirler ve devirli ondalık açılımlar birer rasyonel sayıdır.

Basit Kesir: Payı küçük paydası büyük olan kesirlerdir.

Bileşik Kesir: Payı büyük paydası küçük olan kesirlerdir.Pay ve paydası aynı olan kesirlerde bileşik kesirdir.

Tamsayılı Kesir: Bir sayma sayısı ve bir basit kesir ile birlikte yazılan kesirlerdir.Her bileşik kesir aynı zamanda tamsayılı kesirdir.

3.13 Gerçel Sayılar

16.Bölüm
Gerçel Sayılar

Rasyonel Sayılar Yetmez!

İnsanoğlu'nun Sayma Sayıları'nı buluşu; oradan Tam Sayılar'a; Tam Sayılar'dan Rasyonel Sayılara geçişi, ve rasyonel sayılarla işlem yapmaya başlaması, uygarlık tarihindeki yolda binlerce yıllık bir zamanı almıştır. Ama bütün bu gelişmeler, toplulukların gündelik yaşamlarının ve aralarındaki ticari ilişkilerin zorunlu kıldığı gelişmeler olarak yorumlanabilir.

Ancak, Rasyonel Sayılar'dan Gerçek Sayılar'a geçiş daha sancılı olmuştur. Örneğin, Milattan çok önceye giden dönemlerde *bir dik üçgende, dik kenarların karelerinin toplamının, hipotenüsün karesine eşit* olduğu biliniyordu. Ama, dik kenarları 1 birim olan dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğunu; yani, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ yi kimse bulamıyordu. Benzer olarak, antik çağda, dikkatle yapılan pratik ölçümlerle, bir çemberin yarıçapı ile çevresinin uzunluğu arasındaki ilişkiyi veren $Cevre = 2\pi r$ bağıntısına çok yakın formüller verilmiştir. Ama hiç kimse π sayısının gerçek değerini hesaplayamamıştır. Bu olguları, matematiksel bir dille söyleyecek olursak,

$$x^2 = 2, \quad x^2 = 7, \quad x^3 = 5 \quad x^4 = 27$$

gibi bir çok denklemin, Rasyonel Sayılar Kümesi içinde çözümleri yoktur.

Bu problemim çözümü, ancak çok yakın zamanlarda yapılabilmiştir. Ünlü Alman matematikçisi Richard Dedekind (1831-1916), Rasyonal Sayıları kapsayan çok daha büyük Gerçek Sayılar Kümesi'ni kurmayı başarmıştır. Rasyonal Sayılar Kümesi içinde çözülemeyen problemler, Gerçek Sayılar Kümesi içinde çözülebilmektedir.

Gerçel Sayıların Kuruluşu

Gerçek Sayılar Kümesinin oluşturulması, değişişik yöntemlerle yapılabilir. Ama, bu yöntemlerin hepsi, bu dersin kapsamı dışında kalan bilgiler gerektirir. O nedenle, burada, yalnızca, rasyonel olmayan sayıların varlığını gösterecek ve sonra da sayı ekseninde her noktaya karşılık bir gerçek sayının varlığını kabul edeceğiz.

Tam Sayılar Seyrektir:
Sayı ekseni üzerinde, başlangıç noktasının iki yanına bir kaç tamsayı yerleştiriniz. Ardışık iki tamsayı arasında, başka bir tamsayı yoktur. Bu özelik, *tamsayıların, sayı ekseni üzerinde seyrek,* olduğu anlamına gelir.

Rasyonel Sayılar Yoğundur:
İki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı vardır. Gerçekten, p ile q rasyonel sayıları, sayı eksenine yerleştirildiğinde, bu ikisinin orta noktası da bir rasyonel sayı olur. Çünkü, $r_1 = (p+q)/2$ de bir rasyonel sayıdır. r_1 ile p nin orta noktası olan $r_2 = (r_1 + p)/2$ noktası da bir rasyonel sayıdır. Böyle devam edilirse, p ile q arasında, sonsuz çoklukta $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \ldots$ rasyonel sayıları bulunur. Öyleyse, rasonel sayılar sayı ekseni üzerinde *yoğun (sık)* dur.

Rasyonel Sayılar, Sayı Eksenini Doldurmaz:
Rasyonel sayıların sayı ekseninde yoğun oluşu, önemli bir özeliktir. Ama bu yetmez. Çünkü, sayı ekseni üzerinde, rasyonel bir sayıya karşılık gelmeyen noktalar vardır. Bunu, yukarıda sözünü ettiğimiz *hipotenüs* ile gösterebiliriz. Bir sayı ekseni çiziniz. Bir köşesi başlangıçta ve dik köşesi 1 üzerinde olan, ikizkenar dik üçgeni çiziniz. Pergelinizi, başlangıç noktasına batırıp, hipotenüs boyunca açınız. Şekilde olduğu gibi, Pergelin açıklığını bozmadan, sayı eksenini C noktasında kesecek bir çember parçası çiziniz.

Pisagor Teoremarki'ne göre, bu üçgenin hipotenüsünün uzunluğu

$$|OC| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

dir. Şimdi $\sqrt{2}$ nin bir rasyonel sayı olmadığını gösterelim. Olmayana Ergi Yöntemi'ni kullanacağız. Eğer, $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı olsaydı, aralarında asal olan iki tamsayının oranı biçiminde yazılabilirdi:

$$\left(\exists p, q \in \mathfrak{Z}^+,\ (ebob(p,q) = 1)\right)\left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right)$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{p}{q} &\implies p^2 = 2q^2 \\
&\implies 2q^2 \quad \text{çift sayıdır} \\
&\implies p^2 \quad \text{çift sayıdır} \\
&\implies p \quad \text{çift sayıdır} \\
&\implies \exists p_1 \in \mathfrak{Z}^+ \quad \text{için,} \quad p = 2p_1 \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p^2 = 2q^2) \wedge (p = 2p_1) &\implies 4p_1^2 = 2q^2 \\
&\implies 2p_1^2 = q^2 \\
&\implies 2p_1^2 \quad \text{ve} \quad q^2 \quad \text{çift sayıdır} \\
&\implies q \quad \text{çift sayıdır.} \\
&\implies \exists q_1 \in \mathfrak{Z}^+ \quad \text{için,} \quad q = 2q_1 \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p = 2p_1) \wedge (q = 2q_1) &\implies 2|p \quad \wedge \quad 2|q \\
&\implies p \quad \text{ile} \quad q \quad \text{aralarında asal değildir.}
\end{aligned}$$

p ile q aralarında asal olacak biçimde seçildiği için, varılan bu sonuç, başta yapılan kabulümüzle çelişir. Öyleyse, bu çelişkiyi yaratan kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ yazılamaz; yani $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı değildir.

Bu durumda, Sayı Ekseni'nin C noktasına rasyonel olmayan $\sqrt{2}$ sayısı eşlenmiştir. O halde, Rasyonel Sayılar Kümesi, Sayı Eksini'nin tüm noktalarını dolduramazlar.

Benzer olarak, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[7]{2}, \ldots$ gibi, rasyonel olmayan sonsuz çoklukta sayı olduğu gösterilebilir.

Demek ki, Sayı Ekseni üzerinde, rasyonel sayıların dolduramadığı sonsuz çoklukta boşluklar vardır. Bu boşlukları doldurmak için, Rasyonel Sayılar Kümesi genişletilir. Bunun için, Sayı Ekseninin her noktasına bir ve yalnız bir *sayı* eşlenerek, $\mathbb{R}$ simgesiyle gösterilen ve adına *Gerçek (reel) Sayılar Kümesi,* denilen yeni bir sayı kümesi oluşturulur. Doğal sayılar, tamsayılar ve rasyonel sayılar da Sayı Ekseni üzerinde birer noktaya eşlenmiş olduğu için, Gerçek Sayılar Kümesi, onların hepsini kapsar:

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ayrıca, önceki sayı kümelerinde tanımlanan $+, -, \times, \div$ işlemleri ile $<, \leq, >, \geq$ sıralama bağıntılarının aynen Gerçek Sayılar Kümesi'ne

taşındığını varsayacağız. Tabii, bütün bunların belitsel yöntemlerle kuruluşu yapılabilir. Ama, burada, aşağıdaki beliti kabul etmekle yetineceğiz:
Belit: Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(\mathbb{R}, +, .)$ cismi vardır.

[R1]: $\mathbb{R}$ cismi, $\mathbb{Q}$ cismini bir öz alt cisim olarak kapsar.

[R2]: $\mathbb{Q}$ üzerindeki *eşitlik, işlemler ve sıralama bağıntıları,* $\mathbb{Q}$ üzerinde aynen geçerli kalmak üzere, $\mathbb{R}$ ye genişler.

[R3]: $\mathbb{R}$ ile sayı ekseni arasında bire bir ve örten bir eşleme vardır *(Tamlık özeliği)*.

$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesine *İrrasyonel Sayılar Kümesi,* denilir.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

olduğu apaçıktır. Rasyonel Sayılar Kümesi, Gerçek Sayılar Kümesi'nin bir özalt kümesidir; yani, İrrasyonel Sayılar Kümesi boş değildir :
$\mathbb{Q}' \neq ptyset$.

Gerçel Sayıların Özelikleri

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gerçek sayılar cismi üzerindeki eşitlik, toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve sıralama bağıntılarının sağladığı özelikleri sıralamakla yetineceğiz. $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun.

Eşitlik Bağıntısının Özelikleri:

İkileme (İki Hal) kuralı	:	Ya $a = b$ ya da $a \neq b$ dir.
Yansıma	:	$a = a$
Simetri	:	$a = b \to b = a$
Geçişkenlik	:	$(a = b \wedge b = c) \to a = c$
Toplamada Kısaltma	:	$a = b \Longrightarrow a + c = b + c$
Çarpmada Kısaltma	:	$a = b \Longrightarrow a.c = b.c \quad (c \neq 0)$
Yerine Koyma	:	$a = b$ ise, a'yı içeren her ifadede a yerine b konulabilir.

Toplama İşleminin Özelikleri

Kapalılık	:	$a, b \in \mathbb{R} \to a + b \in \mathbb{R}$
Yer değişme	:	$a + b = b + a$
Birleşme	:	$a + (b + c) = (a + b) + c$
Özdeşlik (birim öge)	:	$a + 0 = a = 0 + a$
Ters öge	:	$a + (-a) = -a + a = 0$

Bu özelikleri bir araya getirirsek, aşağıdaki teoremark ortaya çıkar.

Theorem 3.4. $(\mathbb{R}, +)$ *sistemi değişmeli bir gruptur.*

Çarpma İşleminin Özelikleri:

Kapalılık	:	$a, b \in \mathbb{R} \to a.b \in \mathbb{R}$
Yer Değişimi	:	$a.b = b.a$
Birleşme	:	$a.(b.c) = (a.b).c$
Birim Öğe Varlığı	:	$a.1 = 1.a = a$
Ters Öge Varlığı	:	$a(\frac{1}{a}) = 1 = (\frac{1}{a})a, \quad (a \neq 0)$

Dağılma Özelikleri:

Çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine soldan dağılması:

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine sağdan dağılması:

$$(b + c).a = b.a + c.a$$

Sıralama Bağıntılarının Özelikleri:

Üçleme (Üç Hal) Kuralı	:	$(a < b) \vee (a = b) \vee (a > b)$
Toplamada Kısaltma	:	$(a < b) \Longrightarrow (a + c) < (b + c)$
Çarpımada Kısaltma	:	$(a < b) \Longrightarrow (a.c) < (b.c), \quad (c > 0)$
	:	$(a < b) \Longrightarrow (a.c) > (b.c), \quad (c < 0)$
Geçişkenlik	:	$(a < b) \wedge (b < c) \to (a < c)$

Çıkarma İşleminin Özelikleri:

Çıkarma işlemi toplama işlemi yardımıyla tanımlanabilir:

$$a - b = a + (-b)$$

Dolayısıyla, çıkarma işleminin özelikleri, toplama işleminin özeliklerinden çıkar.

Bölme İşleminin Özelikleri:

$$a \div b = a.(\frac{1}{b}), \quad (b \neq 0)$$

Dolayısıyla, çıkarma işleminin özelikleri, toplama işleminin özeliklerinden çıkar.

$a \div b$ simgesi yerine $a : b, a/b$ ya da $\frac{a}{b}$ simgeleri de kullanılır.

Archimedes özeliği:

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $a < b$ için,

$$na > b$$

eşitsizliğini sağlayan bir $n \in \mathfrak{N}^+$ vardır.

Sayı Ekseni Üzerinde Aralıklar

Bir çok problemin çözümünde, Sayı Ekseni üzerindeki aralıklara gerekseme doğar.

$a \leq b$ olmak üzere Sayı Ekseni üzerinde, başlangıç noktasına olan uzaklıkları, sırasıyla, a ve b olan $A(a, 0)$ ve $B(B, 0)$ noktalarını düşünelim.

Kapalı Aralık:

$[A, B]$ doğru parçasının noktalarına bire-bir karşılık gelen gerçek sayıları, [a,b] simgesiyle gösterecek ve adına *kapalı aralık* diyeceğiz. Bu aralık, a ile b arasındaki bütün gerçek sayılar ile a ve b den oluşur. O halde,

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

yazabiliriz.

Açık Aralık:

(A, B) doğru parçasının noktalarına bire-bir karşılık gelen gerçek sayıları, (a, b) simgesiyle gösterecek ve adına *açık aralık* diyeceğiz. Bu aralık, a ile b arasındaki bütün gerçek sayılardan oluşur. O halde,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

yazabiliriz.

Kapalı-Açık Aralık:

$[A, B)$ doğru parçasının noktalarına bire-bir karşılık gelen gerçek sayıları, $[a, b)$ simgesiyle gösterecek ve adına *kapalı-açık aralık* diyeceğiz. Bu aralık, a ile b arasındaki bütün gerçek sayılar ile a sayısından oluşur. O halde,

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

yazabiliriz.
$[a, b)$ *soldan kapalı, sağdan açık* bir aralıktır.

Açık-Kapalı Aralık:
$(A, B]$ doğru parçasının noktalarına bire-bir karşılık gelen gerçek sayıları, (a,b] simgesiyle gösterecek ve adına *açık-kapalı aralık* diyeceğiz. Bu aralık, a ile b arasındaki bütün gerçek sayılar ile b sayısından oluşur. O halde,

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

yazabiliriz.
$(a, b]$ *soldan açık, sağdan kapalı* bir aralıktır.

Dikey Koordinat Sistemi'nde, başlangıç noktasını $O(0, 0)$ ile, apsisi x olan bir noktayı da $X(x, 0)$ ile gösterelim. Örneğin, yatay eksen üzerinde, apsisi 11 olan noktaya $B(11, 0)$ diyebiliriz.

Örnekler

1. $[0, 1]$, $(1, 3]$, $(-3, -1)$, $[-2, 2]$ aralıklarını sayı ekseni üzerinde gösteriniz.

Çözüm: İstenen aralıklar, sırasıyla, aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.

2. Aşağıdaki şekillerin gösterdiği aralıkları yazınız.

Çözüm:

$$-3,2],\ [2,3),\ (5,9],\ (-5,1),\ [2,2]$$

3. $1 + x < 3x + 4 \leq 8 + x$ önermesinin, $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesini (doğruluk kümesini) bulunuz.

Çözüm: İki eşitsizliği ayrı ayrı çözüp, çözüm kümelerinin arakesitini bulmalıyız. Yatay eksen üzerinde, apsisi 11 olan noktaya $B(11,0)$ diyebiliriz.

$$\begin{aligned}
1 - x &\leq 2x + 1 \\
1 - x - 1 &\leq 2x + 1 - 1 \\
-x &\leq 2x \\
-x + x &\leq 2x + x \\
0 &\leq 3x \\
0 &\leq x
\end{aligned}$$

dir. O halde, birinci eşitsizliğin çözüm kümesi $C_1 = [O, B$ ışını üzerindeki noktalara karşılık gelen gerçek sayıların oluşturduğu kümedir. Bu ışına karşılık gelen gerçek sayılar kümesini $[0, +\infty)$

simgesiyle göstereceğiz:

$$[0,+\infty) = \{x \mid 0 \leq x, x \in \mathbb{R}\}$$

İkinci eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$\begin{aligned} 2x+1 &< x+12 \\ 2x+1-1 &< x+12-1 \\ 2x &< x+11 \\ 2x-x &< x+11-x \\ x &< 11 \end{aligned}$$

dir. O halde, ikinci eşitsizliğin çözüm kümesi $C_2 = OB)$ ışını üzerindeki noktalara karşılık gelen gerçek sayıların oluşturduğu kümedir. Bu ışına karşılık gelen gerçek sayılar kümesini $(-\infty, 11)$ simgesiyle göstereceğiz:

$$(-\infty, 11) = \{x \mid x < 11, \quad x \in \mathbb{R}\}$$

Bu iki çözüm kümesinin arakesiti, $[OB)$ aralığına ait noktalara karşılık gelen gerçek sayıların oluşturduğu kümedir. Dolayısıyla, bunu aşağıdaki biçimlerden herhangi birisiyle gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} S &= C_1 \cap S_2 \\ &= [OB \cap OB) \\ &= [OB) \\ &= [0,+\infty) \cap (-\infty, 11) \\ &= [0, 11) \\ &= \{x \mid \quad 0 \leq 11, \quad x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Çoğunlukla, sonuncu biçimi kullanacağız.

Onlu Sayma Sisteminde Sayıların Yazılışı

c bir gerçek sayı ise,

$$c = a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \cdots a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots \qquad (1)$$

açılımını sağlayan, $(0 \leq a_i \leq 9, \quad i \in \mathfrak{N})$ ve $(0 \leq b_j \leq 9, \quad j \in \mathfrak{N})$ rakamları vardır. Bu açılıma, *c sayısının, Onlu Sayma Sistemindeki açılımı,* denilir.

Bu açılımı, kısa biçimde belirtmek için

$$c = a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \ldots \tag{2}$$

yazarız. Bu yazılışa, *Onlu Sayma Sisteminde, c sayısının gösterimi,* ya da *c nin onlu yazılımı,* denilir.

(1) deki,

$$a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \cdots a_1 10 + a_0 \tag{3}$$

toplamı, c sayısının *tam kısmı*,dır. Bunun onlu sayma sistemindeki gösterimi

$$a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0 \tag{4}$$

dır. Buradaki her bir a_i rakamının basamak değeri $10^i a_i$ dir.

Benzer olarak,

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots \tag{5}$$

toplamı ise, c sayısının *ondalık kesir kısmı*'dır. Bunun onlu sayma sistemindeki gösterimi

$$, b_1 b_2 b_3 \ldots \tag{6}$$

dır. Buradaki her bir b_j rakamının basamak değeri $\frac{b_j}{10^j}$ dir.

(5) toplamı, 1 sayısından büyük olamaz. Bu nedenle, c gerçek sayısının kesir kısmıdır; *ondalık açılım,* adını alır.

Kısalığı sağlamak için, bazan, (5) toplamına, *kesir* denilir. Tabii, (5) toplamında sonlu ya da sonsuz terim olabilir.

(2) gösteriminde, c sayısının tam ve kesir kısımlarını ayırmak için, a_0 ile b_1 rakamları arasına " , " konulur. Buna, *ondalık virgülü* denir.

Bir sayının, Onlu Sayma Sistemindeki açılımı biliniyorsa, Onlu Sayma Sistemindeki gösterimi de belli olur. Tersine olarak, Onlu Sayma Sistemindeki gösterimi biliniyorsa, Onlu Sayma Sistemindeki açılımı da belli olur.

Teoremark: *Onlu Sayma Sistemi'nde, her gerçek sayının bir ve yalnız bir açılımı vardır.*

Bu teoremarkin ispatı, bu dersin kapsamı dışında olan bilgileri gerektirdiğinden, ispatı yapmayacağız.

Örnek

$$5307,4052 = 5.10^3 + 3.10^2 + 0.10^1 + 7.10^0 + \frac{4}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{2}{10^4}$$

Ondalık Kesirler

Teoremark: *Bir rasyonel sayının, Onlu Sayma Sistemi'ndeki açılımı ya sonludur ya da devirlidir.*

r bir rasyonel sayı ise, $r = \dfrac{p}{q}$ olacak biçimde, aralarında asal p ve q tamsayıları vardır. Bu sayının, Onlu Sayma Sistemindeki gösterimini bulmak için, p sayısını q ya bölmek yeterlidir.

$p \div q$ bölme işleminde, kalanların kümesi $\{0, 1, 2, 3, \cdots, q-1\}$ dir. Bölmenin herhangi bir adımında kalan 0 (sıfır) olursa bölme biter. Bu durumda, p/q rasyonel sayısının ondalık açılımının *kesir kısmı sonludur,* denilir. Örneğin $5 \div 2 = 2,5$ dir.

$p \div q$ bölme işleminin hiç bir adımında, kalan sıfır olmuyorsa, p/q rasyonel sayısının açılımında, kesir kısmı sonsuz terimli olur. Ancak, bölme işleminin her adımında, kalan sayı $1, 2, 3, \cdots, q-1$ sayılarından birisi olacaktır. Dolayısıyla, en geç $q-1$ adım sonra, kalanlardan biri tekrarlanacaktır. Bu andan itibaren bölme işlemi tekrarlanmaya ve bölümde basamaklar, aynı sırayla devretmeye başlar. Bu durumda p/q rasyonel sayısının ondalık açılımındaki kesirli kısım, devirli olur. Bu tür ondalık açılımlara, *sonsuz devirli ondalık kesirler* denilir.

Yukarıdaki, $5 \div 2 = 2,5$ bölme işleminde, ondalık virgülünden sonraki birinci adımda kalan 0 olduğundan, bölme işlemi bitmiştir. Bu adımdan sonra, bölümün sağına sonsuz sayıda 0 yazılırsa, bölüm değişmez :

$$5 \div 2 = 2,5 = 2,5000\ldots$$

olur. Dolayısıyla, kesir kısmı sonlu olan bir ondalık açılımı da, 0 ın sonsuz sayıda devrettiği bir açılım olarak görebiliriz.

O halde, *her rasyonel sayı, kesir kısmı sonsuz devirli olan bir ondalık açılıma sahiptir,* denilebilir.

Bu sonucun karşıtı da doğrudur: *devirli her ondalık kesir, bir rasyonel sayıdır.*

Devirli ondalık kesirlerin ondalık gösterimlerini kısaltmak için, devreden basamaklar bir kere yazılır, üzerlerine bir çizgi çekilir.

Örnekler

1. $\dfrac{12}{1} = 12 = 12,000\ldots = 12,\overline{0}$

   Burada 12 tamsayı olduğundan, ondalık açılımındaki terimlerin hepsi 0dır.

2. $\dfrac{1}{2} = 0,5$

   Burada açılım sonludur.

3. $\dfrac{129}{90} = 1,4\overline{3} = 1,43333\ldots$

Bu örnekteki açılımda, ondalık virgülünün sağında, birinci rakamdan sonrakilerin hepsi 3 dür. Bu rakam sınırsız olarak devretmektedir. Dolayısıyla, sayının ondalık kısmı devirlidir. Devirli kesri kısa göstermek için, Devreden 3 rakamı üzerine çizgi konulmuştur.

4. $\frac{3123}{999} = 3,\overline{123} = 3,126126126\ldots$

Bu örnekteki açılımda, ondalık virgülünün sağındaki ilk üç rakam, sınırsız olarak devretmektedir. Dolayısıyla, sayının ondalık kısmı devirlidir. Devirli kesri kısa göstermek için, devreden 123 rakamları üzerine çizgi konulmuştur.

5. $\frac{17}{7} = 2,\overline{428571} = 2,428571428571428571\ldots$

Bu örnekteki açılımda, ondalık virgülünün sağındaki ilk altı rakam, sınırsız olarak devretmektedir. Dolayısıyla, sayının ondalık kısmı devirlidir. Devirli kesri kısa göstermek için, devreden 428571 rakamları üzerine çizgi konulmuştur.

6.

$$
\begin{aligned}
x = 2,75 \quad &\Longrightarrow \quad 100x = 275 \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{275}{100} \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{11}{4} \\
x = 2,\overline{75} \quad &\Longrightarrow \quad 100x = 275,\overline{75} \\
&\Longrightarrow \quad 100x - x = 275,\overline{75} - 2,\overline{75} \\
&\Longrightarrow \quad 99x = 273 \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{273}{99} \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{91}{33} \\
x = 41,\overline{567} \quad &\to \quad 1000x = 41567,\overline{567} \\
&\to \quad 1000x - x = 41567,\overline{567} - 41,\overline{567} \\
&\to \quad 999x = 41526 \\
&\to \quad x = \frac{41526}{999} \\
x = 4,7\overline{38} \quad &\to \quad 1000x = 4738,\overline{38} \\
&\to \quad 10x = 47,\overline{38} \\
&\to \quad 1000x - 10x = 4738,\overline{38} - 47,\overline{38} \\
&\to \quad 990x = 4691 \\
&\to \quad x = \frac{4691}{990}
\end{aligned}
$$

7.

$$x = 27,473 \quad \rightarrow \quad 1000x = 27473$$
$$\rightarrow \quad x = \frac{27473}{1000}$$

Theorem 3.5. *Sonlu ondalıklı bir gösterimde, en sağdaki rakam 1 küçültülür ve onun sağına 9 rakamı sonsuz devir olarak yazılırsa, sayının değeri değişmez.*

Karşıt olarak, devreden basamağı 9 olan bir ondalık kesrin, 9 dan önceki son rakamı bir arttırılarak devreden basamağı 0 yapılırsa, sayının değeri değişmez.
Bunu bir örnek üzerinde göstereceğiz.

$$\begin{aligned} a = 3,52\overline{9} \quad &\rightarrow \quad 1000a = 3529,\overline{9} \\ &\rightarrow \quad 100a = 352,\overline{9} \\ &\rightarrow \quad 1000a - 100a = 3529,\overline{9} - 352,\overline{9} \\ &\rightarrow \quad 900a = 3177 \\ &\rightarrow \quad a = \frac{3177}{900} \\ &\rightarrow \quad a = \frac{353}{100} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3,53 = \frac{353}{100} \\ y &= 3,53\overline{9} = \frac{353}{100} \end{aligned}\right\} 3,53\overline{0} = 3,52\overline{9}$$

Bu örnekler, her rasyonel sayının devirli bir ondalık kesir olarak yazılabildiğini ve karşıt olarak, her devirli ondalık kesrin de bir rasyonel sayı olduğunu göstyermektedir.
Öyleyse, rasyonel sayılarla, devirli ondalık kesirler arasında bire bir ve örten bir eşleme vardır.
Devirli olmayan ondalık kesirler vardır. Bunlar birer irrasyonel sayıdır.

Örnekler

1. $x = 23,1231234123451234561234567\ldots$
2. $\pi = 3,14159265358979\ldots$
3. $\sqrt{2} = 1,414213562373095\ldots$
4. $\sqrt{3} = 1,732050807568877\ldots$
5. $\sqrt{5} = 2,2360679\ldots$

Devirli olmayan bu ondalık kesirler de birer irrasyonel sayıdır.

Örnekler

1. Aşağıdaki açık önermenin, $\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}, Q, \mathbb{R}$ içindeki çözüm kümelerini ayrı ayrı bulunuz.

$$\begin{aligned} x+2=5 \quad &\rightarrow \quad x+2-2=5-2 \\ &\rightarrow \quad x=3 \end{aligned}$$

olduğundan, her dört kümede de bir tek çözümü vardır: $cC=\{3\}$.

2. Aşağıdaki açık önermenin, $\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}, Q, \mathbb{R}$ içindeki çözüm kümelerini ayrı ayrı bulunuz.

$$\begin{aligned} 5x+3=2 \quad &\rightarrow \quad 5x+3-3=2-3 \\ &\rightarrow \quad 5x=-1 \\ &\rightarrow \quad x=-\frac{1}{5} \end{aligned}$$

olduğundan, verilen denklemin $\mathfrak{N}$ ve $\mathfrak{Z}$ kümeleri içinde çözümü yoktur. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ndeki eşit bir tek çözümü vardır: $S=\{-\frac{1}{5}\}$.

3. Aşağıdaki açık önermenin, $\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}, Q, \mathbb{R}$ içindeki çözüm kümelerini ayrı ayrı bulunuz.

$$\begin{array}{lllll} \frac{x-3}{4} & \leq & \frac{2x+1}{2} & \leq & \frac{3x+2}{6} \\ \frac{3x-9}{12} & \leq & \frac{12x+6}{12} & \leq & \frac{6x+4}{12} \\ 12\cdot\frac{3x-9}{12} & \leq & 12\cdot\frac{12x+6}{12} & \leq & 12\cdot\frac{6x+4}{12} \\ 3x-9 & \leq & 12x+6 & \leq & 6x+4 \\ -\frac{5}{3} & \leq & x & \leq & -\frac{1}{2} \end{array}$$

olduğundan, verilen eşitsizlik sisteminin

$\mathfrak{N}$ içinde çözüm kümesi boştur: $\S_1 = ptyset$

$\mathfrak{Z}$ deki çözüm kümesi $S_2=\{-1\}$

$\mathbb{Q}$ içindeki çözüm kümesi $_3=\{x \mid -\frac{5}{3} \leq x \leq -\frac{1}{2}, x \in \mathbb{Q})$

$\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi

$$S_4=\left[-\frac{5}{3}\,,\,-\frac{1}{2}\right]=\left\{x \mid -\frac{5}{3} \leq x \leq -\frac{1}{2}, x \in \mathbb{R})\right\}$$

olur.

4. $\alpha = 1 - \dfrac{1}{1-0,0\overline{4}}$ sayısının değerini bulunuz.

$$\begin{aligned}
x = 0,0\overline{4} \quad &\Longrightarrow \quad 100x - 10x = 4,\overline{4} - 0,\overline{4} \\
&\Longrightarrow \quad 90x = 4 \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{2}{45} \\
\alpha = 1 - \frac{1}{1-0,0\overline{4}} = \quad &\Longrightarrow \quad \alpha = 1 - \frac{1}{1-x} \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = 1 - \frac{1}{1-\frac{2}{45}} = \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = 1 - \frac{45}{43} = \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{2}{43}
\end{aligned}$$

5. $(1-0,\overline{9})(1+\overline{9})$ işlemini yapınız.

$$\begin{aligned}
x = 0,\overline{9} \quad &\Longrightarrow \quad 10x - x = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} \\
&\Longrightarrow \quad 9x = 9 \\
&\Longrightarrow \quad x = 1 \\
\alpha = (1-0,\overline{9})(1+\overline{9}) \quad & \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = (1-x)(1+x) \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = (1-1)(1+1) \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = (0)(2) \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = 0
\end{aligned}$$

Uygulama* Her gerçek sayının, Onlu Sayma Sistemi'nde bir açılımının olduğunu görmek için aşağıdaki geometrik yaklaşım kullanılabilir.

c bir gerçek sayı ise, $n = a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0$ olacak biçimde $0 \leq a_r, a_{r-1}, \cdots, a_1, a_0 \leq 9$ rakamları vardır. Ayrıca, $n < c < n+1$ olacak biçimde bir n tamsayısı da vardır. [n,n+1] aralığını 10 eşit parçaya bölelim. Bu aralıklar,

$$\left[n + \frac{k}{10}, n + \frac{k+1}{10}\right], \quad (k = 0, 1, \ldots, 9)$$

olur.

c sayısı, bu alt aralıklardan birisine ve yalnız birisine aittir.

Burada iki durum doğabilir:

1^0. $c = n + \frac{k}{10}$ ise,

$$c = n + \frac{k}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \cdots$$

yazılabilir. Buradan, $k_1 = b_1$ ise,

$$c = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0, b_1$$

yazılır. Tabii, bunu

$$c = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0, b_1 000 \dots$$

biçiminde de yazabiliriz.

2^0. $\quad n + \frac{k}{10} < x < n + \frac{k+1}{10}$ ise, $\left[n + \frac{b_1}{10}, n + \frac{b_1+1}{10}\right]$ aralığını 10 eşit parçaya bölelim. Bu aralıklar,

$$\left[n + \frac{b_1}{10} + \frac{k}{10^2}, n + \frac{b_1}{10} + \frac{k}{10^2}\right], \quad (k = 0, 1, \dots, 9$$

olur.

Burada, tekrar iki durum doğabilir:

1^0. $\quad c = \frac{b_1}{10} + \frac{k}{10^2}$ ise,

$$c = n + \frac{b_1}{10} + \frac{k}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{0}{10^4} \cdots$$

yazılabilir. Buradan, $k = b_2$ ise

$$c = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2$$

yazılır. Tabii, bunu

$$c = a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0, b_1 b_2 000 \dots$$

biçiminde de yazabiliriz.

Böyle devam edersek,

$$c = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$$

yazılabileceği ortaya çıkar.

c gerçek sayısı bir tamsayı ise $c = c, 000 \dots$ yazılabilir.

c bir rasyonel sayı ise, $c = \frac{p}{q}$ olacak biçimde, aralarında asal olan p ve q tamsayıları vardır. p nin q ya bölünmesiyle, istenen açılım elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Sayı ekseni üzerinde $\frac{7}{5}, -\frac{2}{3}$ sayılarının konumlarını geometrik yolla bulunuz.
2. Sayı ekseni üzerinde $\sqrt{5}, \sqrt{5}$ sayılarının konumlarını geometrik yolla bulunuz.

3. Aşağıdaki rasyonel sayıların, onlu sayma sistemindeki gösterimlerini yazınız.

$$\frac{3}{27}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{27}{8}, \quad \frac{33}{17}$$

$$\frac{20}{6}, \quad \frac{29}{5}, \quad \frac{27}{72}, \quad \frac{23}{11}, \quad \frac{71}{13}$$

4. Aşağıdaki sözlü ifadeleri, $<, \ \leq, \ >, \ \geq$ simgelerini kullanarak yazınız.

(a) 2 sayısı -4 den büyüktür.

(b) $-\frac{1}{9}$ dan küçüktür.

(c) $-\frac{5}{4}$ sayısı negatiftir.

(d) 3 sayısı 6 dan büyük değildir.

(e) -7 sayısı negatiftir.

(f) x sayısı negatif değildir.

(g) x sayısı pozitif değildir.

(h) $\frac{1}{9}$ sayısı pozitiftir.

(i) $5x$ sayısı -4 ile $+8$ arasındadır.

(j) $x + 1$ sayısı -1 den küçük değil ve $+6$ dan büyük değildir.

5. Aşağıdaki cebirsel ifadeleri sözel biçime dönüştürünüz.

a.	$5 > 3$	b.	$-\frac{1}{2}$
c.	$-3 < 0$	d.	$+3 > 0$
e.	$6x - 1 \leq 0$	f.	$3x + 1 \geq 0$
g.	$27 > \frac{1}{27} > 0$	h.	$-3 \leq \leq 1$

6. $0 < a < b$ ise $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ olduğunu gösteriniz.

7. Aşağıdaki ondalık kesirleri, rasyonel sayı biçimine dönüştürünüz.

a.	$0,5$	$2,37$	$2,843$	$7,5274$
b.	$10,\overline{7}$	$1,\overline{23}$	$0,\overline{345}$	$3,\overline{6543}$
c.	$24,64\overline{7}$	$81,53\overline{98}$	$1,37\overline{6}$	$26,783\overline{48}$
d.	$14,63\overline{582}$	$0,01\overline{14}$	$0,263\overline{987}$	$0,003\overline{46}$

8. Aşağıdaki ondalık kesir çiftlerini rasyonel sayı biçiminde yazınız. Sonra bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.

a)	3,67	$3,66\overline{9}$
b)	10,215	$10,214\overline{9}$
c)	25,4718	$25,4717\overline{9}$

9. $0 < a < b$ ve $0 < c < d$ ise, $ac < bd$ olduğunu gösteriniz.

10. Aşağıdaki gerçek sayıları, devreden basamağı 9 olan devirli ondalık kesir biçiminde yazınız.

    a) 5,26 0,384 32,6 18,73

    b) 0 27 678 1666

11. Sayı ekseni üzerinde $\frac{7}{5}$, $-\frac{2}{3}$ sayılarının konumlarını geometrik yolla bulunuz.

12. Sayı ekseni üzerinde $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ sayılarının konumlarını geometrik yolla bulunuz.

13. Aşağıdaki gerçek sayıların rasyonel olmadığını gösteriniz.

$$\sqrt{3}, \qquad \sqrt{5}, \qquad \sqrt{7}, \qquad \sqrt{11}, \qquad \sqrt{17}, \qquad \sqrt{23}$$

14. Sayı ekseni üzerinde $\frac{7}{5}$, $-\frac{2}{3}$ sayılarının konumlarını geometrik yolla bulunuz.

15. Sayı ekseni üzerinde $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ sayılarının konumlarını geometrik yolla bulunuz.

16. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

    a. $1,5\overline{2} + 4,4\overline{3}$

    b. $1,3\overline{5} + 8,6\overline{8}$

    c. $0,5\overline{3} + 12,6\overline{6}$

    d. $1,\overline{3} + 0,\overline{7}$

    e. $9,\overline{4} + 0,\overline{6}$

    f. $\dfrac{2,3 \times 0,62 \times 3,75}{0,25 \times 2,6}$

    g. $\dfrac{2\frac{1}{3} \times 5,921}{\frac{0,858}{3}}$

    h. $\dfrac{3\frac{3}{4} \times 6\frac{3}{5}}{6,7 - 5,05}$

    i. $\dfrac{\frac{1}{4} + 3,31 : 6,\overline{2}}{\frac{1}{2} \times 3,\overline{47} - 1,\overline{6}}$

    j. $\dfrac{\frac{5}{8} : \frac{1}{4} + \frac{5}{7} \times 2,\overline{8}}{\frac{5}{6} \times \frac{1}{5} - 3,\overline{9} \times 1,2}$

17. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinde ayrı ayrı yazınız.

    a) $\dfrac{3x+1}{3} + 5x = \dfrac{7x+3}{4}$

    b) $\dfrac{1}{3}(3x + \dfrac{1}{5}) + \dfrac{7}{3} = -\dfrac{-2x+1}{4} - \dfrac{3}{2}$

    c) $\dfrac{3x-1}{2} - 5 = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{7}{4}$

    d) $\dfrac{x-11}{7} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3} + \dfrac{x+1}{5} + \dfrac{4x}{3}$

e) $(12x-4)(x-5)(2x-3)(2x-\sqrt{5})=0$

18. Aşağıdaki eşitsizlikleri $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinde ayrı ayrı çözünüz.

(a) $\frac{3}{4}x+\frac{32}{5}\leq 2x-3$

(b) $\frac{1}{4}(2x+\frac{1}{5})+\frac{1}{3}(5x+3)<\frac{3x}{5}-3$

(c) $\frac{4x-1}{2}+\frac{x+3}{3}<\frac{17}{4}$ ve $\frac{2-3x}{3}-\frac{x-5}{7}\geq\frac{2-3x}{9}-3$

(d) $\frac{x-3}{5}\geq\sqrt{2}-2$ veya $\frac{1-x}{2}-\frac{3-x}{4}\leq\frac{3x+1+\sqrt{1}}{5}$

(e) $\frac{1}{2}(x-2)+2x\leq 3x+1<3(2x-1)-3$

(f) $\frac{2x-5}{5}\leq\frac{x+2}{3}\leq\frac{x+5}{4}+1$

19. $\dfrac{x}{\frac{y}{2}}$ ile $\dfrac{\frac{x}{y}}{2}$ ifadelerini karşılaştırınız.

20. $\forall a,b\in Q^+,\quad \forall n\in\mathfrak{N}^+$ ve $a<b$ için,

$$a<a+\frac{n(b-a)}{n+1}<b$$

olduğunu gösteriniz.

21. $0,\overline{2}+0,\overline{3}-0,\overline{1}+0,\overline{5}$ işlemini yapınız.

22. $2+\dfrac{2+\frac{2+\frac{2}{3}}{3}}{2+\frac{2}{3}}$ işlemini yapınız.

23. $1-\dfrac{1-\frac{1}{1-a}}{1-\frac{1}{1-a}}$ işlemini yapınız.

24. Aşağıdaki aralıkları küme simgesiyle ifade ediniz.

a.	$(1,2)$	b.	$[3,5]$
c.	$[6,7)$	d.	$(-2,0]$
e.	$(1,\infty)$	f.	$(-\infty,-1]$
g.	$[-2,\infty)$	h.	$(-\infty,+\infty)$

25. Aşağıdaki kümelerin belirttiği aralıkları yazınız.

a.	$\{x\|-2\leq x<4\}$	b.	$\{x\|-9<x<-5\}$
c.	$\{x\|3\leq x\leq 5\}$	d.	$\{x\|-1\leq x\leq 1\}$
e.	$\{x\|x>1\}$	f.	$\{x\|1\leq x\leq 1\}$
g.	$\{x\|x\leq\frac{5}{2}\}$	h.	$\{x\|5\leq x\}$
i.	$\{x\|x\geq-\frac{3}{4}\}$	h.	$\{x\|x\in\mathfrak{R}\}$

4
Doğal Sayılar

4.1 Doğal Sayıların Kuruluşu

Doğal sayılar kümesini kurmak için ya *Peano belitlerini* ya da *kümesel yöntemi* seçeriz. Sonuçta ikisi de aynı sistemi kurar. Biz, şimdiye dek kümelerle işlem yaptığımıza göre, doğal sayılar kümesini de kümesel yöntemle oluşturmak daha uygun olacaktır. Zaten, uygulayacağımız yöntemle elde edeceğimiz sistemdem, Peano belitleri önerme olarak çıkarabilir.

Boş ($\emptyset$) kümeyi kullanarak, sonraki bir öncekini içeren aşağıdaki ardışık kümeler dizisini oluşturalım. Diziye ait kümeleri istediğimiz simgelerle gösterebiliriz. Amacımıza daha hızlı ulaşmak için, onları, doğal sayılar için kullandığımız simgelerle gösterelim:

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{\emptyset\} \\
2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \qquad (4.1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Bu kümelerden herbirisi, kendinden önce gelen kümelerin hepsini birer öğe olarak içermektedir. Bu şekilde ard arda istediğimiz kadar küme kurabiliriz. Bu kümelerin kuruluşu sürekli devam ettirilebilir, hiç bir zaman bitirilemez. (4.1) sistemini daha kısa olarak

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0,1\} \\
3 &= \{0,1,2\} \\
4 &= \{0,1,2,3\} \\
&\vdots \\
k &= \{0,1,2,\ldots,k-1\}) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.2}$$

biçiminde yazabiliriz.

Tanım 4.1. *X kümesinin X^+ ile gösterilen ardılı*

$$X^+ = X \cup \{X\} \tag{4.3}$$

eşitliği ile tanımlanır.

$X = \emptyset$ diyelim. (4.3) uyarınca, (4.2) sistemini

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= 0^+ \\
2 &= 1^+ \\
3 &= 2^+ \\
4 &= 3^+ \\
&\vdots \\
r &= (r-1)^+ \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.4}$$

biçiminde yazabiliriz.

(4.1) ile tanımlanan kümelerin her birine bir *doğal sayı* diyeceğiz. Aslında, (4.1), (4.2) ve (4.4) dizileri aynıdır.

Tanım 4.2. *(4.1) dizisinin her kümesi bir doğal sayıdır. Diziye ait bütün kümelerin oluşturduğu küme doğal sayılar kümesidir.*

Ne var ki, diziye ait bütün kümeleri içeren bir kümeyi oluşturmak olanaksızdır. (4.1) sistemine ait kümeleri oluşturan ardışma yönteminde, her doğal sayıya er ya da geç sıra gelecektir. Ama (4.1) sisteminin bütün kümelerini içeren ω kümesini kuran son bir ardıla erişilemeyecektir. Başka bir deyişle, (4.1) sistemine ait kümelerin kuruluşu hiçbir zaman bitirilemeyecektir.

O nedenle, istediğimiz özeliklere sahip ω kümesinin varlığını bir belit (axiom) olarak alacağız. Konuyu biraz daha genelleştirmek için yeni bir kavrama gereksinim duyuyoruz.

Tanım 4.3.

$$\emptyset \in W$$
$$B \in W \to B^{+} \in W$$

özeliklerine sahip W kümesine ardışan küme *denilir.*

Ardışan bir küme bütün doğal sayıları içerir. Ardışma yöntemiyle doğal sayı oluşturma işini asla bitiremarkeyeceğimiz için, ardışan bir kümenin varlığını bir belit olarak kabul edeceğiz.

Sonsuzluk Beliti

Aksiyom 4.4. *Ardışan bir küme vardır.*

Bu belit, ardışan (en az) bir kümenin varlığını söylüyor. Ardışan her küme bütün doğal sayıları içerir.

Doğal Sayı

Aşağıdaki özelikler kolayca görülür:

1. Ardışan iki kümenin arakesiti ardışan bir kümedir.

2. Ardışan kümelerden oluşan her ailenin arakesiti ardışan kümedir.

3. Özel olarak, ardışan bütün kümelerin arakesiti ardışan kümedir.

Bunların kanıtı problem olarak bırakılmıştır (bkz. Problemler 4.1).

Tanım 4.5. *Ardışan bütün kümelerin arakesitine doğal sayılar kümesi, denir.*

Kapsama bağıntısına göre sıralanmış olmak üzere, ardışan kümelerin en küçüğü doğal sayılar kümesidir. Bu kümeyi, ω simgesiyle temsil edeceğiz. (Sayısal problemlerde, çoğunlukla, ω yerine $\mathbb{N}$ simgesini kullanacağız.)

Problemler

1. Ardışan iki kümenin arakesitinin ardışan bir küme olduğunu gösteriniz.

2. Ardışan kümelerden oluşan her hangi bir ailenin arakesitinin de ardışan bir küme olduğunu gösteriniz.

4.2 Sonlu Tümevarım İlkesi

Theorem 4.6. *$W \subset \omega$ altkümesi için*

(a) $0 \in W$

(b) $n \in W \Rightarrow n^+ \in W$

koşulları sağlanıyorsa, $W = \omega$ dır.

Kanıt: Varsayımlar W kümesinin ardışan bir küme olduğunu söylüyor (bkz. Tanım 4.3). ω doğal sayılar kümesi, ardışan her küme tarafından kapsandığından (bkz. Tanım 4.5). $\omega \subset W$ olacaktır. Oysa $W \subset \omega$ verilmiştir. Öyleyse $W = \omega$ dır.

Teoremarkin anlamını sözel olarak ifade edelim:

1. İlk doğal sayıyı içeren,
2. İçerdiği her doğal sayının ardılını da içeren küme doğal sayılar kümesidir.

4.3 Peano Belitleri

Theorem 4.7. *Aşağıdaki özeliklere sahip bir ω kümesi vardır:*

P1. $0 \in \omega$

P2. $n \in \omega$ *ise* $n^+ \in \omega$

P3. $n \in \omega$ *ise* $n^+ \neq 0$

P4. *ω nın bir A altkümesi aşağıdaki iki özeliğe sahipse $A = \omega$ dır:*

(a) $0 \in A$

(b) $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

P5. *$m, n \in \omega$ ve $n^+ = m^+$ ise $m = n$ dir.*

Varlığını kabul ettiğimiz ω kümesinin $P1. - P5.$ Peano koşullarını sağladığı kanıtlanabilir. Biraz uzunca olan bu kanıtlara girmeyeceğiz. İsteyen öğrenciler, bir çok kaynaktan bulabilecekleri bu kanıtları inceleyebilirler.

Problemler

1. Doğal sayıların hiç birisinin ardışan küme olamayacağını gösteriniz.
2. Hiç bir doğal sayı, kendisine ait bir kümenin altkümesi olamaz. Neden?.

3. A, B kümeleri için $A = B$ ise $A^+ = B^+$ olduğunu gösteriniz.

4. p doğal sayı ise $p \notin p$ olduğunu gösteriniz.

5. p, q, r doğal sayıları için aşağıdaki özeliklerin varlığını gösteriniz:

   (a) $q \neq q^+$

   (b) $p \in q$ ise $q \notin p$ olur.

   (c) $q \in p$ ve $p \in r$ ise $q \in r$ olur.

   (d) $p \in q$ ise $p^+ \subset q$ olur.

6. $W \in n$ ve $n \in \omega$ ise $W \in \omega$ olduğunu tüme varımla ispatlayınız.

7. $W^+ \in \omega$ ise $W \in \omega$ olduğunu gösteriniz.

8. $p \in \omega$ ise ya $p = 0$ olduğunu ya da $p = q$ olan bir $q \in \omega$ varolduğunu gösteriniz.

4.4 Doğal Sayıların Sıralanması

Doğal sayılarda varlığını sezgisel olarak bildiğimiz ya da alışkanlıkla kullandığımız *küçük ya da eşit* $\leq$ bağıntısını matematiksel olarak tanımlayacak ve $(\omega, \leq)$ sisteminin *iyi sıralı* olduğunu kanıtlayacağız.

Tanım 4.8. *Doğal sayılar kümesi üzerinde $\leq$ bağıntısı*

$$a \leq b \Longrightarrow (a \in b) \vee (a = b) \tag{4.5}$$

biçiminde tanımlanır.

(4.5) ifadesi, "*a doğal sayısı, b doğal sayısından ya küçüktür ya da eşittir*" diye okunur.
$a \leq b$ ile $b \geq a$ simgeleri eş anlamda kullanılacaktır.
$\leq$ yerine $<$ bağıntısını kullanmak istiyorsak, $a < b$ ifadesini

$$a < b \Longrightarrow (a \leq b) \wedge (a \neq b) \tag{4.6}$$

biçiminde tanımlayabiliriz.
$\leq$ bağıntısının doğal sayılar kümesi üzerinde *iyi sıralama* bağıntısı olduğunu göstermek için, $(\omega, \leq)$ sisteminin önce tikel sıralı bir sistem olduğunu, sonra iyi sıralı bir sistem olduğunu kanıtlaycağız.

Theorem 4.9. *$(\omega, \leq)$ tikel sıralı bir sistemdir.*

KANIT: *Sistemin yansımalı, geçişimli* ve *antisimetrik* olduğunu göstereceğiz.

yansıma: Her öğe kendisine eşit olduğundan, $a \in \omega$ için $a = a$ dır. O halde, (4.5) den $a \leq a$ yazabiliriz.

geçişim: $a, b, c \in \omega$ verilsin. $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise dört olası durum vardır:

$$(a \in b) \wedge (b \in c) \to ((a \in c) \wedge (b \subset c) \to (a \in c))$$
$$(a \in b) \wedge (b = c) \to a \in c$$
$$(a = b) \wedge (b \in c) \to a \in c$$
$$(a = b) \wedge (b = c) \to a = c$$

(4.5) uyarınca, bu dört durumun her biri için $a \leq c$ olacaktır.

antisimetrik: $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise (4.5) uyarınca ya $a = b$ ya da $a \leq b$ ve $b \in a$ olacaktır. İkinci durum varsa $a \subset b$ ve $b \subset a$ çıkar ki bu $a = b$ olmasını gerektirir.

Theorem 4.10. *$a \in \omega$ ise $0 \leq a$ olur.*

KANIT:

$$A = \{a \mid a \in \omega, 0 \leq a\}$$

kümesini düşünelim. *Sonlu Tüme Varım İlkesi* (bkz. `Teoremark` 4.6) uyarınca $A = \omega$ olduğunu göstermeliyiz. $\leq$ bağıntısı yansımalı olduğundan $0 \leq 0$ çıkar. O halde, $0 \in A$ olur. Herhangi bir $a \in A$ seçelim. Varsayımdan $0 \leq a$ olur. $a \in a^+$ olduğundan $a \leq a^+$ yazılır. Böylece $0 \leq a$ ve $a \leq a^+$ elde edilmiş oldu. $\leq$ bağıntısı geçişimli olduğu için

$$(0 \leq a) \wedge (a \leq a^+) \to (0 \leq a^+)$$

olacaktır. Öyleyse, $a^+ \in A$ olur ve *Sonlu Tüme Varım İlkesine* göre $A = \omega$ sonucuna ulaşılır.

Theorem 4.11. *$b < a$ ise $b^+ \leq a$ dir.*

KANIT: b doğal sayı olsun ve

$$A_n = \{a \in \omega \mid (b < a) \to (b^+ \leq a)\}$$

kümesmi tanımlayalım. Sonlu Tüme Varım İlkesine göre $A_n = \omega$ olduğunu göstereceğiz. Tanımdan

$$\begin{aligned} a \notin A_n &\leftrightarrow (b < a) \wedge (\neg(b^+ \leq a)) \\ &\leftrightarrow (b \in a) \wedge (\neg(b^+ \leq a)) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan, özel olarak,

$$0 \notin A_n \leftrightarrow b \in 0 \wedge \neg(b^+ \leq 0)$$

çıkar, ki bu olanaksızdır. Öyleyse $0 \in A_n$ olmalıdır. Şimdi herhangi bir $a \in A_n$ seçelim. Tanımdan $b < a \to b^+ \leq a$ dir. $a^+ \in A_n$ olduğunu göstermek için

$$b < a^+ \to b^+ \leq a \leq a^+$$

olduğunu göstermeliyiz. $b < a^+$ ise $b \in a^+$ dir. O halde, ya $b \in a$ dir ya da $b = a$ dir. Eğer $b = a$ ise $b^+ = a^+$ çıkar ve ispat biter. Eğer $b \in a$ ise $b < a$ olur ve kabulümüzden

$$b^+ \leq a < a^+$$

çıkar ve kanıtlama biter.

Theorem 4.12. $(\omega, \leq)$ *iyi sıralı bir sistemdir.*

KANIT: Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Eğer $(\omega, \leq)$ sistemi iyi sıralı olmasaydı, boş olmayan ve en küçük öğesi var olmayan bir $A \subset \omega$ altkümesi var olacaktı. Şimdi

$$W = \{b \in \omega \,|\, a \in A \Rightarrow b \leq a\}$$

kümesini tanımlayalım. Sonlu Tüme Varım İlkesiyle $W = \omega$ olduğunu göstereceğiz. `Teoremark` 4.10 den $0 \in W$ yazabiliriz. Bir $b \in W$ seçelim. Tanımdan, her $a \in A$ için $b \leq a$ olacaktır. Eğer, herhangi bir $p \in A$ için $b = p$ ise p, A nın en küçük öğesi olur, ki bu kabulümüze aykırıdır. Öyleyse, her $a \in A$ için $b < a$ olacaktır. `Teoremark` 4.11 den, her $a \in A$ için $b^+ \leq a$ yazabiliriz, ki bu $b^+ \in W$ olmasını gerektirir. Demek ki $W = \omega$ dır. A nın *en küçük öğesi* olmadığından $W \cap A = \emptyset$ çıkar. Öyleyse $A = \emptyset$ olmalıdır.

Aritmetiğin kurulması için doğal sayıların kurulması ve onun üzerinde işlemlerin tanımlanması yeterlidir. Ondan sonra $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin ve $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin kurulması ve dört işlemin onlar üzerine genişletilmesi kolaydır. Bu işler cebir, analiz ve topoloji derslerinde yapılır. O nedenle, bu genişlemeleri burada ayrıntılı anlatmaya gerek görmüyoruz. Yalnızca tam sayılar kümesi ile rasyonel sayılar kümesinin kuruluşunu söylemekle yetineceğiz.

4.5 *Tam Sayıların Kuruluşu*

Tam sayılar, iki doğal sayının farkı ya da toplamı olarak çok farklı biçimlerde yazılabilir. Örneğin, 7 tam sayısını

$$\begin{aligned} 7 &= -121 - (-128) & &= -1 - (-6) = 0 + 7 & &= 1738 - 1731 \\ &= 17 - 10 & &= 2 + 5 = 20 - 13 & &= 3709 - 3702 \\ &= \ldots \end{aligned} \tag{4.7}$$

gibi çok değişik biçimlerde yazabiliriz. Tam sayıları öyle kurmalıyız ki, yukarıdaki gibi farklı yazılışlara izin versin ve onları tek bir tam sayı olarak kabul etsin. Bunu yapmak kolaydır. $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere, iyi bilinen

$$m - n = p - q \Leftrightarrow m + q = n + p \tag{4.8}$$

bağıntısını düşünelim. Şimdi, tam sayıların ne olduğunu bilmediğimizi var sayıp, yukarıdaki (4.8) bağıntısının sol yanını unutalım. $m - n$ yerine (m, n) sıralı ikilisini ve $p - q$ yerine (p, q) sıralı ikilisini koyarak, bağıntıyı

$$(m, n) \approx (p, q) \Leftrightarrow m + q = n + p \tag{4.9}$$

biçiminde yeniden yazalım. Bunun $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir *denklik bağıntısı* olduğu kolayca gösterilir.

Tanım 4.13. *(4.9) bağıntısının denklik sınıfları kümesine* tam sayılar kümesi *denilir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.*

Demek ki, doğal sayılar kümesi biliniyorken, tam sayılar kümesini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerindeki (4.9) denklik bağıntısının denklik sınıfları olarak kurabiliyoruz. O nedenle, (4.7) biçiminde yazılan sayılar aynı denklik sınıfı içindedirler.

(4.9) denklik bağıntısının tanımladığı denklik sınıflarını

$$[(a, b)] = \{(x, y) \mid (a, b) \approx (x, y)\} \tag{4.10}$$

biçiminde göstereceğiz.

4.6 Doğal Sayılarda Aritmetik

Doğal sayılarda Eşitlik

Tanım 4.14. *$m = \natural(A)$ ve $n = \natural(B)$ olmak üzere, m, n doğal sayılarının birbirlerine eşit oluşunu $m = n$ simgesiyle gösterecek ve*

$$m = n \quad \Longrightarrow \quad \natural(A) = \natural(B) \tag{4.11}$$

bağıntısıyla tanımlayacağız.

Bunu, *"m, n ye eşittir"* ya da *"m eşit n dir"*, diye okuyacağız.

Theorem 4.15. *Aşağıdaki özelikler vardır.*

1.	$m \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m = m$	(Yansıma)
2.	$m, n \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m = n \vee n = m$	(İkileme)
3.	$m, n \in \mathbb{N},\ m = n$	$\Rightarrow$	$n = m$	(Simetri)
4.	$m, n, c \in \mathbb{N},\ m = n \wedge n = c$	$\Rightarrow$	$m = c$	(geçişim)

Doğal Sayılarda Toplama

Tanım 4.16. *a ile b doğal sayılarının toplamı, $a+b$ simgesiyle gösterilir ve*

$$a+b = \natural(A \cup B), \qquad (A \cap B = \emptyset) \tag{4.12}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Sonlu iki kümenin bileşimi sonlu olduğundan, $\natural(A \cup B)$ nicelik sayısı, $\mathbb{N}$ ye aittir. Dolayısıyla, $+$ (toplama) işlemi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye tanımlı ikili işlem olarak

$$+ \ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}, \quad + \ : \ (a,b) \Rightarrow a+b \tag{4.13}$$

biçiminde tanımlıdır.

Toplama İşleminin Özelikleri

Theorem 4.17. *Doğal sayılarda toplama işlemi aşağıdaki özelikleri sağlar:*

1. $m,n \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m+n \in \mathbb{N}$	*(Kapalılık)*
2. $m,n \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m+n = n+m$	*(Yer Değişim)*
3. $m,n,r \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m+(n+r) = (m+n)+r$	*(Birleşme)*
4. $m,n,r \in \mathbb{N},\ m=n$	$\Rightarrow$	$m+r = n+r$	*(Sadeleşme)*
5. $m \in \mathbb{N},\ 0 \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m+0 = 0+m = m$	*(Birim Öğe)*
6. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq 0$	$\Rightarrow$	$m+n \neq 0$	*(Ters Öğe yok)*

KANIT: bkz. Problemler 4.6.

Doğal Sayılarda Çarpma

Tanım 4.18. *m ile n nin çarpımı $m \times n$, $m.n$, mn simgelerinden birisiyle gösterilir ve aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır:*

$$m.n = \natural(A \times B) \tag{4.14}$$

Sonlu iki kümenin kartezyen çarpımı sonlu olduğundan, $|(A \times B)|$ nicelik sayısı, daima $\mathbb{N}$ ye aittir. Dolayısıyla, $\times$ (çarpma) işlemi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye tanımlı bir ikili işlem olarak

$$\times \ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}, \quad \cdot \ : \ (m,n) \hookrightarrow mtimesn \tag{4.15}$$

biçiminde tanımlıdır. $(\times)$ simgesi yerine $(\cdot)$ simgesi de kullanılır.

Çarpma İşleminin Özelikleri

Theorem 4.19. *Doğal sayılarda çarpma işlemi aşağıdaki özelikler sağlar.*

1. $m, n \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m.n \in \mathbb{N}$	*Kapalılık*
2. $m, n \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m.n = n.m$	*Yer Değişim*
3. $m, n, r \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m.(n.r) = (m.n).r$	*Birleşme*
4. $m, n, r \in \mathbb{N},\ m = n$	$\Rightarrow$	$m.r = n.r$	*Sadeleşme*
5. $m \in \mathbb{N},\ 1 \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m.1 = 1.m = m$	*Birim Öğe*
6. $m \in \mathbb{N},\ 0 \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$m.0 = 0.m = 0$	*Yutan Öğe*
7. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq 1$	$\Rightarrow$	$m.n \neq 1$	*Ters öğe yok*

KANIT: bkz. Problemler 4.6.

Dağılma Kuralları

Theorem 4.20. *Doğal sayılarda çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özeliği vardır.*

Bunun simgelerle ifadesi şöyledir.

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad a.(b + c) = a.b + a.c \qquad \text{(soldan dağılma)}$$
$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad (b + c).a = b.a + c.a \qquad \text{(sağdan dağılma)}$$

KANIT: bkz. Problemler 4.6.

Problemler

1. Eşitliğin Teoremark 4.15 ile verilen özeliklerini sağlayınız.

2. Toplama işleminin, Teoremark 4.17 ile verilen özelikleri kanıtlayınız.

4.7 *Rasyonel Sayılar*

Tam sayılarda olduğu gibi rasyonel sayıların da

$$\ldots = \frac{-1}{-2} = \frac{-4}{-8} = \frac{-12}{-24} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24} = \ldots \tag{4.16}$$
$$\ldots = \frac{-12}{-24} = \frac{-8}{-16} = \frac{-3}{-6} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{11}{22} = \frac{9}{18} = \ldots \tag{4.17}$$

gibi birden çok biçimde yazılabildiğini biliyoruz. Tam sayılarda yaptığımız gibi, rasyonel sayıları öyle kurmalıyız ki, yukarıdaki gibi farklı yazılışlara izin versin ve onları tek bir raqsyonel sayı olarak kabul etsin. Bunu yapmak kolaydır. $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, iyi bilinen

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \leftrightarrow mq = np \tag{4.18}$$

bağıntısını düşünelim. Şimdi, rasyonel sayıların ne olduğunu bilmediğimizi var sayıp, yukarıdaki (4.18) bağıntısının sol yanını bilinenler cinsinden yazalım.

$\frac{m}{n}$ yerine (m,n) sıralı ikilisini ve $\frac{p}{q}$ yerine (p,q) sıralı ikilisini koyarak, bağıntıyı

$$(m,n) \approx (p,q) \Leftrightarrow mq = np \tag{4.19}$$

biçiminde yeniden yazalım. Bunun $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 4.21. *(4.19) bağıntısının denklik sınıfları kümesine* rasyonal sayılar kümesi *denilir ve* $\mathbb{Q}$ *ile gösterilir.*

Demek ki, tam sayılar kümesi biliniyorken, rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerindeki (4.19) denklik bağıntısının denklik sınıfları olarak kurabiliyoruz. *toplama, çıkarma, çarpma, bölme* işlemleri ile *sıralama bağıntısı*, (4.19) ile verilen denklik sınıfları kümesi üzerinde kolayca tanımlanır.
Pratikte rasyonel sayılarla işlem yaparken, denklik sınıflarını değil, işleme giren her bir denklik sınıfından seçilecek birer temsilci öğeyi kullanırız.

İyi Tanımlılık

Rasyonel sayıların farklı yazılışlarıyla işlem yaparken hep aynı sonuca ulaşırız. Örneğin,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$
$$\frac{3}{6} + \frac{12}{16} = \frac{120}{96} = \frac{5}{4}$$

işlemleri aynı sonucu verir.
Bunu genelleştirebiliriz:
Denklik sınıfları üzerinde tanımlanan bir işlemin, denklik sınıflarını temsil etmek üzere seçilecek öğelere bağlı olup olmadığı uygulamada önem taşır. Denklik sınıfları üzerinde işlem yaparken denklik sınıflarından hangi temsilcileri seçersek seçelim, hep aynı sonuca ulaşmalıyız. Bu özelik, işlemin *iyi tanımlı* olduğu anlamına gelir. Değilse, işlem yapan kişiler farklı temsilciler seçebileceğinden, işlemin sonucu farklı çıkar. Böyle bir durum istenmez.

Tanım 4.22. *Denklik sınıfları kümesinde tanımlı bir işlem, denklik sınıfını temsil etmek üzere seçilen temsilciye bağlı değilse, o işlem* iyi tanımlıdır.

Bu kavramı biraz açmakta yarar var. Örneğin, rasyonel sayılar kümesi üzerinde

$$m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{olmak üzere} \quad f(\frac{m}{n}) = m \tag{4.20}$$

bağıntısını düşünelim. (4.20) kuralına göre

$$
\begin{aligned}
f(\frac{3}{4}) &= 3 \\
f(\frac{6}{8}) &= 6 \\
f(\frac{12}{16}) &= 12 \\
f(\frac{75}{100}) &= 75 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olacaktır. Oysa $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{75}{100} = \ldots$ olduğundan (4.20) le verilen f bir fonksiyon değildir. İyi tanımlı olması için, $\frac{3}{4}$ rasyonel sayısının denklik sınıfından seçilecek her temsilci $\frac{m}{n}$ sayısı için $f(\frac{m}{n})$ değerleri aynı olmalıdır.

Uyarı 4.23.

İyi tanımlı fonksiyon denilince, sanki iyi tanımlı olmayan fonksiyon varmış izlenimi doğmaktadır. Aslında, (4.20) kuralı bir fonksiyon tanımı değildir. Fonksiyon tanımlı ise, zaten iyi tanımlıdır; *kötü tanımlı fonksiyon* yoktur. O nedenle, *iyi tanımlı fonksiyon* deyiminin fonksiyon tanımının titizlikle yapılmadığı eski zamanlardan kalmış bir terim olduğu açıktır. Ama sık sık cebirde ve analizde karşınıza çıkabilir.

4.8 Alıştırmalar

1. m, n, r doğal sayıları için, aşağıdaki özelikleri kanıtlayınız

1) $(m < n) \vee (m = n) \vee (m > n)$			(Üç Hal Kuralı)
2) $(m < n) \wedge (n < r)$	$\Rightarrow$	$m < r$	(geçişim)
3) $m < n$	$\Rightarrow$	$m + r < n + r$	(Toplamda Sadeleşme)
4) $(m < n) \wedge (r < s)$	$\Rightarrow$	$m + r < n + s$	Yan yana Toplama)
5) $m < n \vee (r > 0)$	$\Rightarrow$	$m.r < n.r$	(Çarpmada Sadeleşme)

2. m, n sıfırdan farklı iki doğal sayı ise, aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz.

   (a) $m^m.m^n = m^{m+n}$

   (b) $m^n.n^n = (m.n)^n$

   (c) $(m^m)^n = m^{mn}$.

3. m ile n iki doğal sayı ve $m \in n^+$ ise ya $m \in n$ ya da $m = n$ olduğunu gösteriniz.

4. Ardılları eşit olan iki doğal sayı birbirlerine eşittir; yani

$$(m, n \in \omega) \wedge (m^+ = n^+) \Rightarrow m = n$$

olur. Gösteriniz.

5. Bölme işleminin yer değişim özeliğinin olmadığını gösteriniz.
6. Bölme işleminin birleşme özeliğinin olmadığını gösteriniz.
7. Bölme işleminin toplama üzerine dağılma özeliğinin olmadığını gösteriniz.
8. Çarpma işleminin bölme islemi üzerine dağılma özeliğinin olmadığını gösteriniz.

5
Operatörler

İşlemler

5.1 Operatör Nedir?

İlkokulden beri sayılar üzerinde *toplama, çıkarma, çarpma* ve *bölme* işlemlerini yapmayı öğrendik. Karşılaştığımız problemleri çözerken *yer değişme, birleşme, dağılma* kuralları ile *birim öğe, ters öğe* gibi kavramları kullanmayı öğrendik. Bütün bunları yaparken, dört işlemin herbirinin bir operatör olduğunu, *yer değişme, birleşme, dağılma* gibi özeliklerin operatörlerin özelikleri olduğunu öğrenmemiş olabiliriz.
Matematikteki kavramları mümkün olduğu kadar soyutlaştırmak ve genelleştirmek isteriz. Soyut bir kümede yaptığımız işleri, somut kümelere kolayca uygulayabiliriz. Operatörler için de benzer iş yapılır. Sayı kümeleri üzerindeki işlemleri soyut kümelere taşırız. Orada elde edeceğimiz genel kurallar, somut durumlara, özel olarak da sayı kümelerine uygulanabilir.

Birli Operatörler

Birli İşlemler

Tanım 5.1. *Boş olmayan bir kümeden kendisine tanımlı olan her fonksiyon, bir birli operatördür.*

Örnek 5.2.

1. $\mathbb{Z}$ Tam Sayılar Kümesi olmak üzere, $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}$ ye tanımlı $f(x) = -x$ fonksiyonu birli bir işlemdir.

2. Sıfırdan farklı Rasyonel Sayılar Kümesinden kendisine tanımlı $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu birli bir işlemdir.

İkili Operatörler

İkili İşlemler

Tanım 5.3. *Boş olmayan X kümesi için $X \times X$ kartezyen çarpımından X kümesine tanımlı her fonksiyon ikili operatördür.*

$X \neq \emptyset$ ve $X \subset Y$ ise, her

$$f : X \times X \Rightarrow Y$$

fonksiyonu, X üzerinde *ikili işlem*'dir.

Örnek 5.4. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *kartezyen çarpımından* $\mathbb{R}$ *kümesine tanımlı*

$$(x, y) \rightsquigarrow x + y \tag{5.1}$$

bağıntısı, *toplama* diye adlandırılan ikili işlemdir.

Örnek 5.5. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *kartezyen çarpımından* $\mathbb{N}$ *kümesine tanımlı*

$$(m, n) \rightsquigarrow mn \tag{5.2}$$

bağıntısı, *çarpma* diye adlandırılan ikili işlemdir.

n-li Operatörler

Tanım 5.6. *$X \neq \emptyset$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere X kümesinin n kez kendisiyle kartezyen çarpımından X kümesine tanımlı her fonksiyon n-li işlemdir.*

Bunu simgelerle gösterirsek,

$$f : \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n-kez} \Rightarrow X \tag{5.3}$$

fonksiyonuna, X kümesi üzerinde *n-li işlem*'dir, denilir. Matematikte, çoğunlukla birli ve ikili operatörleri kullanırız. Hangi türden oldukları işlevlerine göre belirli olacağı için, birli işlem, ikili işlem terimleri yerine, kısaca, *işlem* diyeceğiz. Bu kısaltma bir karışıklık yaratmayacaktır.

S-Çarpma işlemi

Tanım 5.7. *S, G kümeleri verilsin. $S \times G$ kartezyen çarpımından G kümesine tanımlı bir dönüşüme S-çarpma işlemi denilir.*

Örnek olarak vektör uzaylarındaki skaler çarpmayı gösterebiliriz.

Gösterimler

Matematiğin her dalında ikili operatörlerin rolü büyüktür. Operatörler, fonksiyonların özel bir türüdür. Bir fonksiyonun operatör (işlem) olduğunu belirtmek için, onu fonksiyonlar için kullandığımız $f, g, h, \ldots$ gibi harflerle değil; özel bir simge ile belirtiyoruz.
Operatörler için çok kullanılan $+$, $-$, $\times$, $\cdot$, $\div$ simgelerine alışığız. Ama cebirde bunların dışında $\star$. $\circ$, $\oplus$, $\ominus$, $\otimes$, $\odot$, $\square, \cdots$ gibi farklı simgeler de kullanılır.
X kümesi üzerinde $\otimes$ işleminin tanımlı olması demek,

$$\otimes : X \times X \Rightarrow X$$

fonksiyonunun tanımlı olması demektir.
$\otimes$ işlemi, her $(x, y) \in X \times X$ sıralı çiftini bir tek $z \in X$ öğesine eşleyecektir. Çoğunlukla, z görüntüsünü $x \otimes y$ simgesiyle göstereceğiz:

$$\otimes : (x, y) \rightsquigarrow x \otimes y = z$$

Bunu *"x işlem y eşit z"* diye okuyacağız. Başka bir deyişle, $(x, y) \rightsquigarrow \otimes[(x, y)]$ gösterimi yerine $(x, y) \rightsquigarrow x \otimes y$ gösterimini kullanacağız.

Tanım 5.8. *Üzerinde bir ya da daha çok işlem tanımlı bir X kümesi, işlemlerle birlikte bir* matematiksel yapı*'dır. Bu yapıyı, örneğin, üzerinde üç operatör tanımlı X kümesini $(X, \oplus, \ominus, \otimes)$ biçiminde sıralı bir üçlü olarak göstereceğiz.*

5.2 *İşlemlerin Özelikleri*

Aşağıdaki örneklerde ele alınan kümelerin boş olmadığını varsayacağız.

Kapalılık

Uyarı 5.9.

Bir kümenin bir işleme kapalı olması kavramı, operatörün bir fonksiyon olarak tanımlanmadığı durumda ortaya çıkar. Bunu bir örnekle açıklamak yararlı olabilir.
Tam sayılar kümesi üzerinde kök alma işlemini düşünelim. $\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$ olur, ama $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ kümesi kök alma işlemine kapalı değildir. Bu kitapta, operatörü bir fonksiyon olarak tanımladığımız için, kök alma işleminin zaten bir fonksiyon olarak $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı olmadığı açıktır. Dolayısıyla, Bir küme üzerinde tanımlı bir operatörden söz ederken *kümenin işleme kapalı olması* deyimi, fonksiyon (işlem) tanımımız uyarınca, gereksizdir. Çünkü işlem tanımlı ise, zaten kapalılık özeliği sağlanacaktır.

Gene de, oparatörü fonksiyon olarak tanımlamayan kaynakların, *"işleme kapalılık"* deyimi ile neyi ifade ettiklerini açıklamak yararlı olabilir.

Bir fonksiyon olarak tanımlanmayan $\otimes$ operatörü X kümesi üzerinde işlem yapıyor olsun. $\otimes$ operatörünün görüntü kümesi bazen X kümesine eşit olur; bazen de X kümesinden büyük olur. Bu iki durumu birbirinden ayırmak gerekir.

Tanım 5.10. *$\otimes$ işleminin görüntü kümesi X kümesine eşitse, 'X kümesi $\otimes$ işlemine* kapalıdır*', denilir.*

Bunu simgelerle ifade edersek,

$$\otimes : \; X \times X \Rightarrow X$$

ise, 'X kümesi $\otimes$ işlemine kapalıdır'.

Bu durumda,

$$\forall x, y \in X \quad \text{için} \quad x \otimes y = z \in X$$

olur. (Tabii, bu durumda $\otimes$ işlemi bir fonksiyon olur.)

Tanım 5.11. *$\otimes$ işleminin görüntü kümesi, X kümesininden büyükse, "X kümesi $\otimes$ işlemine* kapalı değildir,*" denilir.*

Örneğin, doğal sayılar kümesi çrpma işlemine kapalıdır, ama çıkarma ve bölme işlemlerine kapalı değildir.

Birim Öğe

Tanım 5.12. *X kümesi üzerinde $\otimes$ işlemi tanımlı olsun. Her $x \in X$ için,*

$$x \otimes e = x = e \otimes x$$

eşitliğini sağlayan bir $e \in X$ varsa, e öğesine, $\otimes$ işlemine göre birim (etkisiz) öğe, *denilir.*

Sayı kümeleri üzerinde toplama işleminin birimi 0, çarpma işleminin birimi 1 dir.

Ters Öğe

Tanım 5.13. *$\otimes$ işlemi X kümesinde tanımlı ve e birim öğesi var olsun. $x \in X$ için,*

$$x \otimes y = e = y \otimes x$$

eşitliğini sağlayan $y \in X$ öğesi varsa, y öğesine $\otimes$ işlemine göre, x öğesinin tersi*dir, denilir.*

Bazı işlemler için ters öğe olmayabilir.

Sayı kümeleri üzerinde, toplama işlemine göre, bir x öğesinin tersi $-x$; çarpma işlemine göre $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ dir.

Sayı kümelerinden edindiğimiz alışkanlıkla, soyut kümeler üzerinde tanımlı olup $(+)$ işlemine benzeyenlere *toplama işlemi*; $(\cdot)$ işlemine benzeyenlere de *çarpma işlemi*, diyeceğiz. Dolayısıyla, bir x öğesinin toplamsal tersi $-x$; çarpımsal tersi x^{-1} simgesiyle gösterilecektir.

Yutan Öğe

Tanım 5.14. *X kümesi üzerinde tanımlı bir $\otimes$ işlemi için*

$$\forall x(x \in X) \Rightarrow x \otimes u = u \otimes x = u \tag{5.4}$$

olacak biçimde bir $u \in X$ varsa, u ya $\otimes$ işleminin yutan öğesi *denilir.*

Örnek 5.15. *Sayı kümeleri üzerinde* çarpma *işleminin yutan öğesi* 0 *sayısıdır. Gerçekten her x sayısı için $x.0 = 0.x = 0$ olur.*

Yer Değişim

Tanım 5.16. *X kümesi üzerinde tanımlı $\otimes$ işlemi, her $x, y \in X$ için,*

$$x \otimes y = y \otimes x$$

şitliğini sağlıyorsa, $\otimes$ işleminin yer değişim *(takas - komutatiflik) özeliği vardır, denilir.*

Örnekler:

1. Sayı kümeleri üzerinde tanımlı toplama $(+)$ ve çarpma $(.)$ işlemlerinin değişme özeliği vardır. Örnekse, $4 \times 3 = 3 \times 4$.

2. Çıkarma $(-)$ ve bölme $(\div)$ işlemlerinin değişme özeliği yoktur. Örnekse, $4 \div 3 \neq 3 \div 4$.

Birleşme Özeliği

Tanım 5.17. *X kümesinde tanımlı $\otimes$ işlemi her $x, y, z \in X$ için,*

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

eşitliğini sağlıyorsa, $\otimes$ işleminin birleşme özeliği *vardır, denilir.*

Sayı kümeleri üzerinde toplama ve çarpma işlemleri birleşme özeliğine sahiptir; ama çıkarma ve bölme işlemlerinin birleşme özeliği yoktur.

$$(3+5)+4 = 3+(5+4)$$
$$(3-5)-4 \neq 3-(5-4)$$

Dağılma Özeliği

Tanım 5.18.

(a) X kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri tanımlı olsun. $\forall x, y, z \in X$ için,

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \;\oplus\; (x \otimes z) \tag{5.5}$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine *soldan dağılma* özeliği vardır, denilir.

(b)

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \;\oplus\; (y \otimes z) \tag{5.6}$$

eşitliği varsa $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine *sağdan dağılma* özeliği vardır, denilir.

(c) Hem soldan, hem sağdan dağılma özeliği varsa, $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine *dağılma özeliği* vardır, denilir.

Sayı kümeleri üzerinde çarpmanın, toplama üzerine dağılma özeliği vardır, ama, toplamanın çarpma işlemi üzerine dağılma özeliği yoktur.

5.3 *Tablo Gösterimi*

İşlemlerin Tablo İle Gösterimi

İşlemin üzerinde tanımlı olduğu kümenin öğe sayısı az ise, işlem sonuçlarını bir tablo ile göstermek, görsel algılamayı kolaylaştırır. İlkokulda öğrendiğimiz çarpım tabloları buna iyi örnektir.

Örnek 5.19.

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesi üzerinde $\odot$ işlemi

$$\begin{aligned}
(a, a) &\quad\Rightarrow\quad a \odot a = a \\
(a, b) &\quad\Rightarrow\quad a \odot b = a \\
(c, f) &\quad\Rightarrow\quad c \odot f = c \\
(d, e) &\quad\Rightarrow\quad d \odot e = b \\
(e, d) &\quad\Rightarrow\quad e \odot d = b
\end{aligned}$$

kuralları ile verilsin. A nın öğelerini, aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi, yatay ve düşey sıralayarak, işlem sonuçlarını, işleme giren öğeleri içeren yatay satır ile düşey kolonun arakesitine konuşlandırıyoruz.

$\odot$	a	b	c	d	e	f
a	**a**	a	a	a	a	a
b	a	**b**	a	b	b	b
c	a	a	**c**	a	c	c
d	a	b	a	**d**	b	d
e	a	b	c	b	**e**	e
f	a	b	c	d	e	**f**

köşegen

Bu tabloda, ikili işlemin ilk öğesi satırların solundan, ikinci öğesi kolonlardan seçilir.

$(A, \odot)$ sistemi için,

1. A kümesinin, $\odot$ işlemine göre kapalı olduğu,
2. $\odot$ işleminin yer değişim özeliğine sahip olduğu,
3. $\odot$ işleminin birleşme özeliğine sahip olduğu,

tablodan kolayca çıkarılabilir.

5.4 *Modular Aritmetik*

Saatler, günler, aylar, mevsimler gibi zamanı gösteren ölçülerin belirli bir üstsınırı aşmadığını, üstsınıra gelince tekrar başa döndüğünü biliyosunuz. Duvardaki saat daima 0-12 arasında bir zaman gösterir. 12 yi vurunca 0 olur. Haftanın günleri *Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar* diye sırayla değişir. *Pazar*'dan sonra daima *Pazartesi* yeniden başlar. *Aralık* ayı sona erince *Ocak* ayı başlar. *Bahar, Yaz, Güz, Kış* mevsimleri birbirini izler.
Bütün bu işlemler, farklı bir aritmetik sergiler. Bu aritmetiğe *Modular Aritmetik* denilir. Modular aritmetik, zaman ölçülerinde yapılan işlemleri sistemleştirir, onu genel bir matematik sistem içine koyar. Bu bölümde Modular Aritmetiğin temellerini ele alacağız.

Tanım 5.20. *p tam sayısının q tam sayısını kalansız böldüğünü (tam böler) göstermek için $p|q$ simgesini kullanılır:*

$$p|q \Longrightarrow \exists k(k \in \mathbb{Z})(q = pk)$$

Karşıt olarak, p tam sayısının q tam sayısını kalansız bölmediğini (tam bölmez) göstermek için $p \mid q$ simgesi kullanılır.

Theorem 5.21. *$p, q, m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ üzerinde*

$$\mu = \{(p, q) : m \mid (q - p)\}$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

KANIT: Denklik bağıntısı olması için, μ bağıntısı *yansımalı, simetrik ve geçişimli* olmalıdır.

yansıma: $q - q = 0$ ve $m|0$ olduğundan,

$$q \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad m \mid (q-q) \Rightarrow (q,q) \in \mu$$

çıkar.

simetri: $p, q \in \mathbb{Z}$ için,

$$m \mid (q-p) \Rightarrow m \mid (p-q)$$

olduğundan, $[(p,q) \in \mu \Rightarrow (q,p) \in \mu]$ çıkar.

geçişim: $p, q, r \in \mathbb{Z}$ için,

$$\big(m \mid (q-p) \wedge m \mid (r-q)\big) \Rightarrow m \mid (r-p)$$

olduğunu gösterirsek,

$$[(p,q) \in \mu \;\wedge\; (q,r) \in \mu] \Rightarrow (p,r) \in \mu$$

çıkacaktır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} m \mid (q-p) \wedge m \mid (r-q) \quad &\Rightarrow \quad (\exists a, b \in \mathbb{Z})(q-p=ma) \wedge (r-q=mb) \\ &\Rightarrow \quad (q-p)+(r-q) = ma+mb \quad \text{dır.} \\ &\Rightarrow \quad q-p+r-q = m(a+b) \\ &\Rightarrow \quad r-p = mk \qquad (a+b=k \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow \quad m \mid (r-p) \end{aligned}$$

olur.

Yansıma, simetri ve geçişim özelikleri sağlandığına göre, μ denklik bağıntısıdır.

Kalan Sınıfları

Her denklik bağıntısının, ait olduğu kümeyi denklik sınıflarına ayırdığını biliyoruz (Bölüm **??**).
μ , tam sayılar kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğuna göre, $\mathbb{Z}$ kümesini denklik sınıflarına böler. μ nağıntısının denklik sınıflarını belirleyebiliriz.
Belirlenecek denklik sınıflarına, cebir derslerinde *kalan sınıfları* denilir. Bu adın verilmesi doğaldır. Çünkü bir n tam sayısı m tam sayısına bölündüğünde kalanlar

$$0, 1, 2, 3, \ldots, (m-2), (m-1) \tag{5.7}$$

sayılarından birisidir.
Cebir derslerinde iyi bilinen *Bölme Algoritması*'na göre, n tam sayısı, 1 den büyük bir bir m tam sayısına bölünürse,

$$n = m.r + k \tag{5.8}$$

eşitliğini sağlayan r ve k tam sayıları vardır. Bu eşitlikte m ye *bölen*, r ye *bölüm*, k ya *kalan* denilir. Bölen ve kalan arasında $0 \leq k < m$ eşitsizliği olduğundan,

$$\begin{aligned} n = m.r + k \quad &\Rightarrow \quad n - k = m.r \\ &\Rightarrow \quad m \mid (n - k) \\ &\Rightarrow \quad (n, k) \in \mu \end{aligned}$$

yazılabilir ki bu, n sayısının k ya denk olduğunu söyler ki bu da n ile k sayılarının aynı denklik (kalan) sınıfında olduğu anlamına gelir. Demek ki, n tam sayısının k ya denk olması için her ikisinin aynı kalan sınıfına ait olmaları gerekir. Bu durumu

$$n \equiv k \quad (mod \quad m) \tag{5.9}$$

simgesiyle gösterecek ve *"m modülüne göre, n* sayısı, *k sayısına denktir"*, ya da *"n denk k modulo m"* diye okuyacağız.
Özetle, k sayısı, n tam sayısının m ye bölünmesiyle elde edilen kalandır ve (5.9) bağıntısı *yansımalı, simetrik ve geçişimli* bağıntıdır.
n tam sayısı, m ile bölündüğünde k kalanı $0, 1, 2, 3, \cdots, m-1$ sayılarından birisidir ve yalnızca birisidir. k ya denk olan bütün n tam sayılarının oluşturduğu denklik sınıfı,

$$\overline{k} = \{n \mid n \ \equiv \ k \ (mod \ m) \tag{5.10}$$

dir. Olası bütün denklik sınıfları,

$$\mathbb{Z}/m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \cdots, \overline{m-1}\} \tag{5.11}$$

dir.
(5.11) denklik sınıflarının kümesine m nin *kalan sınıfları* denilir ve, yukarıda yazıldığı gibi, $\mathbb{Z}/m$ simgesiyle ya da $\mathbb{Z}_m$ simgesiyle gösterilir.

Örnek 5.22. *$\mathbb{Z}/4$ kalan sınıflarını bulunuz.*

ÇÖZÜM: 4 ün kalan sınıfları, $\mathbb{Z}/4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ dür. Bunlar, $n \in \mathbb{Z}$ tam sayısının 4 sayısına bölünmesinden elde edilen kalan sınıflarıdır:

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{\ldots, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \ldots\} \\ \overline{1} &= \{\ldots, -15, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots\} \\ \overline{2} &= \{\ldots, -14, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, \ldots\} \\ \overline{3} &= \{\ldots, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \ldots\} \end{aligned}$$

Modular Aritmetiğin Kuralları

Theorem 5.23. *Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.*

$$\begin{aligned} p \;\equiv\; q \;(mod\; m) \quad &\Longrightarrow \quad m|(q-p) && (5.12)\\ p,q \in \overline{k} \quad &\Longrightarrow \quad \overline{p} = \overline{q} && (5.13)\\ p \in \overline{q} \quad &\Longrightarrow \quad q \in \overline{p} && (5.14) \end{aligned}$$

Theorem 5.24. *$p, q, r, m \in \mathbb{Z}$ ve $m > 1$ için,*

$$p \equiv q \;(mod\; m) \quad \Rightarrow \quad (p \mp r) \equiv (q \mp r)(mod\; m)$$

olur.

KANIT: Tanımdan hemen çıkar.

Theorem 5.25. *$a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$ ve $m > 1$ ise,*

$$(a \equiv b(mod\; m)) \;\wedge\; (c \equiv d(mod\; m)) \;\Rightarrow\; (a \pm c) \equiv (b \pm d)(mod\; m) \tag{5.15}$$

olur.

KANIT:

$$\begin{aligned} a \equiv b \quad (mod \quad m) \quad &\Rightarrow \quad m \mid a - b\\ &\Rightarrow \quad \exists p \in \mathbb{Z}, a - b = mp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \equiv d \quad (mod \quad m) \quad &\Rightarrow \quad m \mid c - d\\ &\Rightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Z}, c - d = mq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left.\begin{array}{l} a - b = mp \\ c - d = mq \end{array}\right\} \quad &\Rightarrow \quad (a + c) - (b + d) = m(p + q)\\ &\Rightarrow \quad (a + c) - (b + d) = mk \quad (p + q = k \in \mathbb{Z})\\ &\Rightarrow \quad m \mid (a + c) - (b + d)\\ &\Rightarrow \quad a + c \equiv b + d \quad (\text{mod} \quad m) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \quad (mod \quad m) \\ c \equiv d \quad (mod \quad m) \end{array}\right\} \Rightarrow (a + c) \equiv (b + d) \quad (mod \quad m)$$

çıkar.

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \quad (mod \quad m) \\ c \equiv d \quad (mod \quad m) \end{array}\right\} \Rightarrow (a - c) \equiv (b - d) \quad (mod \quad m)$$

olduğu benzer yolla gösterilebilir.

Toplama

MODULAR ARITMETIKTE TOPLAMA İŞLEMI

Kalan sınıfları üzerinde toplama işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 5.26. *$\overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{Z}/m$ ise,*

$$\overline{p} \oplus \overline{q} = \overline{p+q}$$

dır.

Burada, p ve q yerine, $p_1 \in \overline{p}$ ve $q_1 \in \overline{q}$ olmak üzere herhangi p_1, q_1 sayıları alınabilir. Toplama işlemi, kalan sınıflardan seçilen temsilciye bağlı değildir. Neden?

Örnek 5.27.

$$\overline{-29}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{17} \in \mathbb{Z}/4 \text{ için,}$$

$$\overline{17} \oplus \overline{4} = \overline{17+4} = \overline{21} = \overline{1}, \qquad \overline{-29} \oplus \overline{5} = \overline{-29+5} = \overline{-24} = \overline{0}$$

olur.

İşlemin Doğruluğunu Sağlama

9 ATARAK İŞLEMIN DOĞRULUĞUNU SAĞLAMA

$p+q=r$ işlemi doğru ise, eşitliğin iki yanının $(mod\ 9)$ için değerleri de eşit olmalıdır. Bu özelik, ilkokulda öğrendiğiniz, 9 atarak sağlama yönteminin dayanağı olan kuraldır.

$$\begin{array}{r} 734 \\ +\quad 89 \\ \hline 823 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 734 \equiv 5 \text{ (mod 9)} \\ 89 \equiv 8 \text{ (mod 9)} \\ 8+5 \equiv 4 \text{ (mod 9)} \\ 823 \equiv 4 \text{ (mod 9)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 4 & & 4 \\ & 8 & \end{array}$$

Bu sağlama işleminde, $\mathbb{Z}/9$ içinde,

$$\overline{734} \oplus \overline{89} = \overline{734+89} = \overline{823} \quad \Longrightarrow \quad \overline{5} \oplus \overline{8} = \overline{4}$$

olduğu gösterilmiş oldu.

Theorem 5.28. *$x, y, z, m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$ için,*

$$x \equiv y \ (mod\ m) \quad \Rightarrow \quad xz \equiv yz \ (mod\ m)$$

olur.

KANIT: Tanımdan hemen görülür.

Theorem 5.29. *$x, y, z, w, m \in \mathbb{Z}$ ve $m > 1$ ise,*

$$[(x \equiv y \ (mod\ m)) \ \wedge \ (z \equiv w \ (mod\ m))] \quad \Rightarrow \quad x.z \equiv yw \ (mod\ m)$$

olur.

Kanıt: Aşağıdaki bağıntılardan çıkar.

$$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{m} &\Rightarrow m \mid (x-y) \\ &\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}, (x-y) = mp \\ &\Rightarrow x = y + mp \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \equiv w \pmod{m} &\Rightarrow m \mid (z-w) \\ &\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}, (z-w) = mq \\ &\Rightarrow z = w + mq \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x = y + mp) \wedge (z = w + mq) &\Rightarrow xz = (y+mp)(w+mq) \\ &\Rightarrow xz = yw + myq + mpw + m^2pq \\ &\Rightarrow xz - yw = m\underbrace{(yq + pw + mpq)}_{k \in \mathbb{Z}} \\ &\Rightarrow xz - yw = mk \\ &\Rightarrow m \mid (xz - yw) \\ &\Rightarrow xz \equiv yw \pmod{m} \end{aligned}$$

Örnek 5.30. $23 \equiv 5$ *(mod 6) ve* $-18 \equiv 0$ *(mod 6) için,*

$$\left.\begin{array}{l} 23.(-18) = -414 \equiv 0 \pmod{6} \\ (5).0 = 0 \equiv 0 \pmod{6} \end{array}\right\} \Rightarrow 23.(-18) \equiv (5).0 \pmod{6}$$

olur.

Theorem 5.31. *$x, y, z, m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$ ve $n > 0$ ise,*

$$(x \equiv y \ (mod\ m)) \quad \Rightarrow \quad x^n \equiv y^n \ (mod\ m)$$

dir.

[Kanıt: $n = 1$ için bağıntı verilmiştir. $n = 2$ için $z = x$ ve $w = y$ alınarak, önceki teorem uygulanırsa bağıntı elde edilir. Genel durum için tümevarım yöntemini uygulayabiliriz.

$$(x \equiv y \ (mod\ m)) \quad \Rightarrow \quad x^{n-1} \equiv y^{n-1} \ (mod\ m)$$

olduğunu varsayalım. Tekrar $z = x$ ve $w = y$ alınarak, önceki teorem uygulanırsa

$$\big(x \equiv y \ (mod\ m)\big) \quad \Rightarrow \quad x^n \equiv y^n \ (mod\ m)$$

elde edilir.

Çarpım

KALAN SINIFLARI ÜZERINDE ÇARPIM İŞLEMI
$\mathbb{Z}/m$ üzerinde çarpma işlemi tanımlayabiliriz.

Tanım 5.32. *$\overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{Z}/m$ için*

$$\overline{p} \otimes \overline{q} = \overline{p.q} \tag{5.16}$$

dır.

Örnek 5.33.

$\overline{-9}, \overline{22} \in \mathbb{Z}/7$ için $\overline{-9} \otimes \overline{22} = \overline{-9.22} = \overline{-198} = \overline{2}$ dir.
$x.y = z$ işlemi doğru ise, eşitliğin iki yanının $(mod\ 9)$ için değerleri de eşit olur. Bu özelik, çarpım işleminde, 9 atarak sağlama yönteminin dayanağıdır.

Örnek 5.34.

$$\begin{array}{rr} & 247 \\ \times & 54 \\ \hline & 988 \\ + & 1235 \\ \hline & 13338 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 247 \equiv 4 \text{ (mod 9)} \\ 54 \equiv 0 \text{ (mod 9)} \\ 0.4 \equiv 0 \text{ (mod 9)} \\ 13338 \equiv 0 \text{ (mod 9)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{array}$$

Yapılan sağlamada $\mathbb{Z}/9$ içinde,

$$\overline{247} \otimes \overline{54} = \overline{247 \times 54} = \overline{13338} \quad \Longrightarrow \quad \overline{4} \otimes \overline{0} = \overline{0}$$

olduğu gösterilmiş oldu.

5.5 *Alıştırmalar*

1. $A = \{-i, -1, 0, 1, i\}$ kümesi üzerinde,

$$1 * 1 = 1, (-1) * (-1) = 1, 1 * i = i, i * 1 = i, i * i = -1$$

eşlemeleri ile $*$ işlemini tablo üzerinde gösteriniz.

2. $\mathbb{Q}$ Rasyonel Sayılar Kümesi üzerinde,

$$x, y \in \mathbb{Q} \quad \text{için} \quad x \diamond y = x + y - xy$$

bağıntısıyla tanımlanan işlemi

(a) Yer değişim özeliğine sahip midir?
(b) Birleşme özeliğine sahip midir?

(c) Bu işleme göre $\mathbb{Q}$ içinde birim öğe var mıdır?

(d) Bu işleme göre tersi var olan öğeler var mıdır?

3. $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı $m \diamond n = m^n + 1$ işleminin yer değişme ve birleşme özeliklerinin olup olmadığını araştırınız.

4. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $a \circ b = a^b - ab$ işlemi veriliyor. $(2 \circ 3) \circ 4$ işleminin sonucu nedir?

5. A üzerinde tanımlı bir $\star$ işlemine göre, her öğenin tersi varsa, $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

6. Doğal Sayılar kümesinin çarpma işlemine kapalı olduğunu gösteriniz

7. Doğal Sayılar kümesinin çıkarma işlemine kapalı olmadığını gösteriniz.

8. $\mathbb{Z}_7$ kümesinde $(3x^2 + 2x + 1)(4x^3 + 2x^2 + x + 3)$ işlemini yapınız.

9. $4.7^{322} + 5.5^{347} + 5.4^{367} + 3.453$ sayısının birler basamağındaki rakamı bulunuz.

10. $\mathbb{Z}_m$ kümesinde x'in toplamaya göre tersi $-x$, çarpmaya göre tersi x^{-1} ile gösteriliyor. $\mathbb{Z}_5$ kümesinde $2(-2)^7 + 4^{-2}.3^{234} + (8^{-1})^6(-3)^7$ işlemini yapınız.

11. Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur?

a.	$4 \mid 12345$	b.	$7 \mid 64382$	c.	$8 \mid 53916$
c.	$13 \mid 29643$	e.	$17 \mid 277543$	f.	$26 \mid 87037216$

12. $\mathbb{Z}/6$ kalan sınıfında toplama ve çarpma tablolarını oluşturunuz.

13. $\mathbb{Z}/5$ kümesinde, $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ denklemlerinin çözüm kümesini bulunuz.

14. $-13 \equiv 12 \pmod 5$ olduğunu gösteriniz.

15. $3^{33} \equiv x \pmod 5$ eşitliğini sağlayan en küçük x sayısını bulunuz.

16. 4897^{97} sayısının birler basamağındaki sayı nedir?

17. Bir tam sayının 2 ile tam bölünebilmesi için, gerekli ve yeterli koşul, birler basamağındaki rakamın çift olmasıdır. Kanıtlayınız.

18. Bir tam sayının 3 ile tam bölünebilmesi için, gerekli ve yeterli koşul, basamaklarındaki rakamların toplamının 3 ün bir katı olmasıdır. Kanıtlayınız.

19. n tam sayısının birler basamağındaki rakam ile onlar basamağındaki rakamın iki katının toplamı 4 ün bir katı ise, n sayısı 4 ile tam bölünür. Kanıtlayınız.

20. Birler basamağında 0 ya da 5 olan her doğal sayı, 5 ile tam bölünür. Kanıtlayınız.

21. Bir tam sayının 9 ile tam bölünebilmesi için, gerekli ve yeterli koşul, basamaklarındaki rakamların toplamının 9 un bir katı olmasıdır. Kanıtlayınız.

22. $(3^{27} + 5^{35} + x \equiv 1 \pmod 8)$ denklemini çözünüz.

6
Karmaşık Sayılar

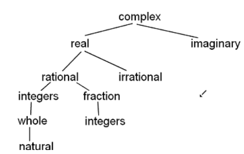


Figure 6.1: Karmaşık Sayının Düzlemsel Gösterimi

Karmaşık sayılar gerçel sayıların genişlemesiyle elde edilen daha büyük bir kümedier. Genişleme şu gereksemeden doğmuştur: $x^2 = +1$ denklemimin çözümü $+1, -1$ sayılarıdır ve $\mathbb{R}$ içindedir. Ama $x^2 = -1$ denklemimin çözümü $\mathbb{R}$ içinde yoktur. Özellikle elektromanyetik teoride bütün ikinci derece denklemlerin çözüm kümesine gerekseme doğar. O nedenle $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini bütün ikinci derece denklemlerin köklerini içerecek büyüklüğe genişletmek gereği vardır. Bu genişleme kolay yapılır.

$$x^2 = -1$$

denkleminin çözümü olarak $+i$ ve $-i$ sayıları tanımlanır.

Tanım 6.1.

$$\sqrt{-1} = +i$$

denilir. Bu bir tanımdır. $+i$ sayısına karmaşık sayıların birim öğesi denilir.

6.1 Karmaşık Sayılar

Belli türden denklemleri çözebilmek için bazı sayı kümelernin yetersiz kaldığını; bu tür denklemlere çözüm bulmak için sözkonusu sayı kümelerinin genişletilerek daha büyük sayı kümeleri elde edildiğini biliyoruz. Örneğin,

$x + 3 = 0$ gibi bir denklem doğal sayılarda çözülemeyince, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ genişletilerek tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ oluşturulmuştur.

$3x + 4 = 0$ gibi bir denklem $\mathbb{Z}$'de çözülemeyince, bu küme genişletilerek rasyonel sayılar kümesi $(\mathbb{Q})$ oluşturulmuştur.

$x^2 - 7 = 0$ gibi bir denklem $\mathbb{Q}$'da çözülemeyince, bu küme irrasyonel sayılarla genişletilerek gerçel (reel) sayılar kümesi $\mathbb{R}$ oluşturulmuştur.

Gerçel (real) sayılar kümesi ile sayı ekseninin noktalarının bire bir eşlendiğini hatırlayınız.
$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözerken,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ve

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac > 0 &\quad \text{ise, denklemin gerçel iki kökü vardır} \\ b^2 - 4ac = 0 &\quad \text{ise, denklemin gerçel ve eşit iki kökü vardır} \\ b^2 - 4ac < 0 &\quad \text{ise, denklemin gerçel kökü yoktur} \end{aligned}$$

kurallarını anımsayınız.
Dikkat ederseniz, üçüncü olasılıkta negatif sayıların karekökü söz konusudur. Bu sayılar, $\mathbb{R}$'nin elemanı değildir.
Örneğin, $x^2 + 3 = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ içinde çözümü yoktur. Çünkü her gerçel sayının karesi pozitiftir; dolayısıyla $x^2 = -3$ denklemini sağlayan hiçbir gerçel sayı yoktur.
Öyleyse $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin genişletilerek, içinde bu tür denklemlerin de çözülebildiği daha büyük bir sayı sistemi oluşturmaya gerek vardır.
$x^2 + 1 = 0$ denklemini sağlayan $\sqrt{-1}$ sayısına *sanal (imajiner) sayı birimi* denir ve $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$ biçiminde gösterilir.

6.2 *Gerçel ve Sanal Kısımlar*

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $a + ib$ biçimindeki sayılara

karmaşık (kompleks) sayılar

denir.
Karmaşık sayıyı genellikle z ve bu sayıların oluşturduğu kümeyi $\mathbb{C}$ ile göstereceğiz.

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in R\}$$

dir. $z = a + ib$ karmaşık sayısında;
a'ya bu sayının gerçel (reel) kısmı denir ve $ge(z)$ ile gösterilir. b'ye bu sayının sanal (imajiner) kısmı denir ve $san(z)$ $[Im(z)]$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} ge(z) = a &\Rightarrow [san(z) = b \wedge z = ge(z) + i.san(z) \\ san(z) = 0 &\Rightarrow z \in \mathbb{R}\, [\mathbb{R} \subset \mathbb{C}] \\ ge(z) = 0 &\Rightarrow z = o + bi \Leftrightarrow z = bi \end{aligned}$$

Örnek 6.2.

$z = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$ karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulalım:

$$z = \frac{1}{2} + i(-\frac{2}{3}) \quad \text{ise}$$
$$san(z) = -\frac{2}{3}$$

olur.

6.3 *Karmaşık sayıların Eşitliği*

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olsun.

$$a + ib = c + id \Longrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

dir.

Örnek 6.3.

$z_1 = 3x - i\frac{1}{2}$ ve $z_2 = -36 + (y+1)i$ sayılarının eşit olabilmesi için x ve y'nin ne olacağını bulalım:

$$3x + i(-\frac{1}{2}) = -36 + i(y+1)$$

$$3x = -36; \qquad y + 1 = -\frac{1}{2}$$
$$x = -12; \qquad y = -\frac{3}{2}$$

bulunur.

Örnek 6.4.

$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{y^2}i$ sayısının karmaşık sayı olabilmesi için x ve y nin ne olacağını bulalım:

Verilen sayının karmaşık sayı olabilmesi için,

$$\frac{x}{x-1}, \frac{1}{y^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \qquad x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \quad \text{ve} \quad x \in \mathbb{R}$$
$$y^2 \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \quad \text{ve} \quad y \in \mathbb{R}$$

olmalıdır.

Örnek 6.5.

$4x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:
$\Delta = (-2)^2 - 4.4.1 = 4 - 16 = -12 < 0$ olduğundan, denklemin karmaşık sayı olan iki kökü vardır:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2.4}$$

eşitliğinden

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{-1}.\sqrt{12}}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{8}\sqrt{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

çıkar. Benzer şekilde x_2 de hesaplanabilir ve

$$S = \{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i), \quad \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)\}$$

bulunur.

6.4 Sanal Birimin Kuvvetleri

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, i'nin kuvvetleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$i = \sqrt{-1}$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2.i = -i$
$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^5 = i^4.i = i$	$i^6 = i^4.i^2 = -1$
$i^7 = i^4.i^3 = -i$	$i^8 = i^4.i^4 = 1$	$i^9 = (i)^{4.2}.i = i$
$i^{10} = (i)^{4.2}i^2 = -i$	$i^{11} = (i)^{4.2}i^3 = -i$	$i^{12} = i^{4.3} = 1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$i^{4n+1} = i$	$i^{4n+2} = -1$	$i^{4n+3} = -i$
$i^{4n} = 1$		

Örnek 6.6.

i^{-27} sayısını hesaplayalım.

$$i^{-27} = i^{-(4\times 6+3)} = \frac{1}{i^{4.6}.i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{(-i)i} = \frac{i}{1} = i$$

bulunur.

Örnek 6.7.

$$\frac{3 - i^{412}}{1 - i^{210}}$$

ifadesini sadeleştirelim:

$$\begin{aligned}
\frac{3 - i^{412}}{1 - i^{210}} &= \frac{3 - i^{4\times 103}}{1 - i^{4\times 52}.i^2} \\
&= \frac{(3 - (1))}{1 - 1.(-1)} \\
&= \frac{2}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur.

6.5 Geometrik Gösterim

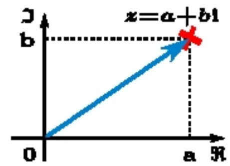


Figure 6.2: Karmaşık Sayının Düzlemsel Gösterimi

Karmaşık sayılar ile analitik düzlemin noktaları bire bir eşlenebilir. Bu eşlemede, $x + yi$ sayısına (x, y) noktası karşılık getirilir. Şekilde, $0 + 0i$ sayısı, $O(0, 0)$ noktası ile, $x + 0i$ sayıları Ox ekseni ile, bütün $0 + yi$ sayıları, Oy ekseni ile eşlenir. Ox eksenine gerçel (reel) eksen, Oy eksenine *sanal (imajiner)* eksen denir. Yukarıda belirtildiği gibi karmaşık sayılarla bire bir eşlenen düzleme, *karmaşık düzlem* diyeceğiz.

6.6 Karmaşık Sayının Eşleniği

Şekil 6.3'ü inceleyiniz. $x + yi$ ve $x - yi$ sayılarından birine diğerinin *eşleniği* denir. z karmaşık sayısının eşleniğini $\bar{z}$ biçiminde göstereceğiz.

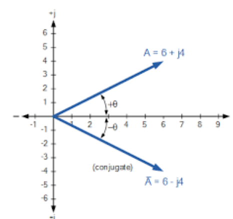


Figure 6.3: Karmaşık Eşlenik

$$\bar{z} = \overline{(x + yi)} = x + (-y)i = x - yi$$

dir. Şekil dikkatle incelendiğinde bir karmaşık sayı ile eşleniğinin, gerçel eksene (Ox eksenine) göre simetrik oldukları görülür.

Theorem 6.8. *Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği kendisidir.*

İspat: $z = x + yi$ karmaşık sayısını düşünelim.

$$(\bar{z})^- = [(x + yi)^-]^- = [x - yi]^- = x + yi = z$$

olur. Örneğin,

$$z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i \Rightarrow \overline{(\bar{z})} = 1 + 2i$$

Örnek 6.9.

Aşağıda verilen karmaşık sayıların eşleniklerini bulalım.

a) $1 - \frac{1}{2}i$ c) 203 e) $\sqrt{-16} + 3$
b) $\sqrt{2} + i$ d) $\sqrt{-7}$ f) $7 - \sqrt{-9} + \sqrt{-4}$

Çözümler:

a) $1 - \frac{1}{2}i$'nin eşleniği $1 + \frac{1}{2}i$'dir.

b) $\sqrt{2} + i$'nin eşleniği $\sqrt{2} - i$'dir.

c) 203'ün eşleniği 203 tür.

d) $\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$'nin eşleniği $-\sqrt{7}i$'dir.

e) $\sqrt{-16} + 3 = 3 + 4i$'nin eşleniği $3 - 4i$'dir.

f) $7 - \sqrt{-9} + \sqrt{-4} = 7 - 3i + 2i = 7 - i$'nin eşleniği $7 + i$'dir.

6.7 Mutlak Değer (modül)

Karmaşık düzlem üzerinde $z = x + yi$ sayısına karşılık gelen nokta Z olsun. ZAO dik üçgeninde,

$$| OZ |^2 = | x |^2 + | y |^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

veya

$$| z | = | x + yi | = \sqrt{x^2 + y^2}$$

yazılır.

Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına uzaklığına bu sayının *modülü* veya *mutlak değeri* denir.

$z = x + yi$ sayısının modülü $| z |$ ile gösterilir. $| z | = \sqrt{x^2 + y^2}$ dir.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ ve $| z | \geq 0$ dır.

Örnek 6.10.

$z = 3 - 4i$ sayısının modülünü bularak karmaşık düzlemde gösterelim:

$| z | = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

olur.

Örnek 6.11.

olduğunu gösterelim:

$z = a + bi$ olsun. $| z | = \sqrt{a^2 + b^2}$ dir.

$$| z | = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 + 0i = 0$$

ve

$$z = 0 \Rightarrow z = 0 + 0i \Rightarrow | z | = \sqrt{0^2 + 0^2} \Rightarrow | z | = 0$$

bulunur.

Örnek 6.12.

$z = -9i$ sayısının modülünü bulalım.

$|z| = | - 9i| = \sqrt{8 - 9)^2} = 9$ olur.

6.8 Toplama ve Çıkarma

İki karmaşık sayı $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı i'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. Bu nedenle,

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Yandaki şekli inceleyiniz.

Örnek 6.13.

$z_1 = 2 - 3i$ ve $z_2 = 1 + 2i$ ise $z_1 + z_2$ ve $z_1 - z_2$ toplam ve farklarını bularak karmaşık sayılar düzleminde gösterelim.

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (2 - 3i) + (1 + 2i) \\
&= (2 + 1) + (-3 + 2)i \\
&= 3 - i \\
z_1 - z_2 &= (2 - 3i) - (1 + 2i) \\
&= (2 - 1) + (-3 - 2)i \\
&= 1 - 5i
\end{aligned}$$

Yandaki şekil üzerinde, karmaşık sayıların toplam ve farkının geometrik yorumunu yapınız.

6.9 Toplama Çıkarmanın özelikleri

Kapalılık Özeliği

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ ve } z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di \text{ olsun}$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

bulunur. $a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + c), (b + d) \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$(z_1 + z_2) \in \mathbb{C}$$

olur. O halde, karmaşık sayılar kümesi toplama işlemine göre *kapalıdır.*

Etkisiz (birim) Eleman Varlığı

$$z_1, 0 \in \mathbb{C}\ ,\ z_1 = a + bi \text{ ve } 0 = 0 + 0i \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned}
z_1 + 0 &= a + bi + 0 + 0i; \\
&= (a+0) + (b+0)i \\
&= a + bi \\
&= z_1 \\
0 + z_1 &= 0 + 0i + a + bi \\
&= (0+a) + (0+b)i \\
&= a + bi \\
&= z_1
\end{aligned}$$

olur. O halde, sıfır, karmaşık sayılarda toplama işlemine göre *etkisiz (birim) eleman*dır.

Ters Eleman Varlığı

$z \in \mathbb{C}$ ve $z = a + bi$ ise $-z = -a - bi$ diye tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
z + (-z) &= (a+bi) + (-a-bi) \\
&= (a-a) + (b-b)i \\
&= 0 + 0i \\
&= 0 \\
(-z) + (z) &= (-a-bi) + (a+bi) \\
&= (-a+a) + (-b+b)i \\
&= 0 + 0i \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde, toplama işlemine göre, *her elemanın tersi* vardır.

Birleşme Özeliği

$z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, $z_3 = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= [(a+bi) + (c+di)] + (x+yi) \\
&= [(a+c) + (b+d)i] + (x+yi) \\
&= [(a+c) + x] + [(b+d) + y]i \\
&= [a + (c+x)] + [b + (d+y)[i \\
&= a + bi + [(c+x) + (d+y)i] \\
&= z_1 + (z_2 + z_3)
\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılarda toplama işleminin *b*irleşme özeliği vardır.
$(\mathbb{C}, +)$ sistemi kapalılık, etkisiz eleman, ters eleman ve birleşme özelikleri olduğu için *grup*tur.

Değişme Özeliği

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 + a + bi$, $z_2 = c + di$ olsun.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a+bi) + (c+di) \\ &= (a+c) + (b+d)i \\ &= (c+a) + (d+b)i \\ &= (c+di) + (a+bi) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin *değişme özeliği* vardır. Sonuç olarak,
$(\mathbb{C}, +)$ sistemi *değişmeli bir grup*tur.

6.10 *Alıştırmalar*

1. Köklerinden biri $1 - 2i$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

2. $2i^6 + \left(\frac{1}{(-i)^3}\right) + 6i^{-5} - 2i$ sayısını $a + ib$ şeklinde yazınız.

3. $\frac{5}{i^2} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}}$ sayısını bulunuz.

4. $(1+i)^{14}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

5. $(3 - 2i) = u(1+i)$ ise u sayısını bulunuz.

6. $P(x) = 3x^{17} - x^8 + 2$ ise $P(i)$'yi bulunuz.

7. $z = x + yi$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise $(z - \overline{z})$ ve $(\overline{z} - z)$ karmaşık sayılarını bulunuz.

8. Aşağıdaki ifadeleri $a + ib$ biçiminde yazınız.

$$\begin{aligned} i^{16} &= ? \\ \sqrt{-64}+\sqrt{-5}-\sqrt{-25} &= ? \\ 5\sqrt{-121} &= ? \\ \sqrt{-7}.5\sqrt{-3} &= ? \\ 12\sqrt{5}\sqrt{-\frac{4}{5}} &= ? \\ \frac{3}{15\sqrt{-1}} &= ? \\ 5\sqrt{-3}+\sqrt{-9} &= ? \\ \frac{1}{7}\sqrt{-243}-8\sqrt{-28}-\frac{2}{3}\sqrt{-63} &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^{19} &= ? \\ \sqrt{-\frac{1}{3}} &= ? \\ 3\sqrt{-60} &= ? \\ \sqrt{-27}\sqrt{-\frac{1}{3}} &= ? \\ \frac{12\sqrt{-15}}{16\sqrt{-5}} &= ? \\ \frac{10}{\sqrt{-5}} &= ? \\ (i\sqrt{3})^4 &= ? \end{aligned}$$

9. Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.
   a) $\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}-\frac{1}{i^6}$ b) $4i+6i^2-i^3+2i^4+3i^5$
   c) $\sqrt{-\frac{x}{3}}+\sqrt{-\frac{x}{9}}-\sqrt{-\frac{x}{27}}$ d) $\sqrt{-4x^4}-\sqrt{-9x^4}-\sqrt{100x^4}$

10. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
    a) $x^2-2x+10=0$ b) $x^2-x+1=0$ c) $x^2-x+3=0$
    d) $2y^2=3y-4$ e) $\frac{t^2}{2}+\frac{3t}{5}=-\frac{3}{10}$ f) $7u^2+5u=-1$

11. $z_1=3-m+ni$ ve $z_2=(m-2n)i$ sayılarının eşit olması için m ve n kaçtır?

12. Aşağıdaki işlemleri yapınız.
    a) $(17+\frac{1}{2}i)+(17-\frac{1}{2}i)$ d) $\frac{i}{2}(1-\sqrt{9})$
    b) $6+(2-i)$ e) $(5+\sqrt{-4})+(1-4i)$
    c) $(3+2i)+i$ f) $(i^2-i)+(i^4-i^3)$

6.11 *Çarpma*

İki karmaşık sayı $z_1=a+bi$ ve $z_2=c+di$ olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı i'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. İki polinomun çarpımı işlemi ile dağılma ve birleşme özeliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi).(c+di) \\ &= a(c+di)+bi(c+di) \\ &= ac+adi+bci+bdi^2 \quad "i^2=-1" \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

bulunur.

Örneğin,

$z_1 = (3+i)$ ve $z_2 = 1+2i$ ise $z_1.z_2$ yi bulalım:
vspace*5.0cm

$$z_1.z_2 = (3+i)(1+2i) = (3.1-1.2)+(3.2+1.1)i = 1+7i$$

Theorem 6.14. *Her $z = x+yi$ karmaşık sayısı için $\mid z \mid^2 = z.\bar{z}$ dir.*

İspat:

$$\begin{aligned} z.\bar{z} &= (x+yi)(x-yi) \\ &= x^2+y^2 \\ &= (\sqrt{x^2+y^2})^2 \\ &= \mid z \mid^2 \end{aligned}$$

6.12 Çarpımın Özelikleri

Kapalılık Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ olsun.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

olur. $(ac-bd) \in \mathbb{R}$ ve $(ad+bc) \in \mathbb{R}$ olduğu için iki karmaşık sayının çarpımı yine bir karmaşık sayıdır.
Karmaşık sayılar kümesi çarpma işlemine göre *kapalıdır.*

Etkisiz (birim) Eleman Varlığı

$z_1, 1 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a+bi$, $1 = 1+0i$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} z_1.1 &= (a+bi)(1+0i) \\ &= (a.1-b.0)+(a0+b.1)i \\ &= a+bi = z_1 \end{aligned}$$

bulunur. Ohalde, $1 = 1+0i$ sayisi karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre *etkisiz (birim) eleman*dır.

Ters Eleman Varlığı

z karmaşık sayının çarpma işlemine göre tersi z^{-1} ile gösterilsin.

$$z.z^{-1} = 1$$

olmalıdır. Şimdi bu eşitliği sağlayan z^{-1} sayısını belirleyeceğiz:

$z = a + bi$ ise

$$\begin{aligned} z.z^{-1} = 1 &\implies (a+bi).z^{-1} = 1 \\ &\implies z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{z} \\ &\quad \text{"Pay ve paydayı } a - bi \text{ ile çarpalım."} \\ &\implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &\implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \end{aligned}$$

bulunur. $z^{-1} \in \mathbb{C}$ olduğu açıktır. Son eşitliği kullanarak sağlama yapabiliriz:

$$\begin{aligned} z.z^{-1} &= (a+bi).[\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i] \\ &= \underbrace{(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2})}_{1} + \underbrace{(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2})}_{0}i \\ z.z^{-1} &= 1 + 0i \\ z.z^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Sıfır hariç, karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre *her elemanın tersi* vardır.

Birleşme Özeliği

$z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned} (z_1.z_2).z &= [(a+bi)(c+di)].(x+yi) \\ &= [(ac-bd)+(ad+bc)i](x+yi) \\ &= [(ac-bd).x-(ad+bc)y]+[(ac-bd)y+(ad+bc)x]i \\ &= (acx-bdx-ady-bcy)(acy-bdy+adx+bcx)i \\ &= [a(cx-dy)-b(dx+cy)]+[a(cy+dx)+b(cx-dy)]i \\ &= (a+bi)[(cx-dy)+(cy+dx)i] \\ &= z_1.(z_2.z) \end{aligned}$$

bulunur.

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin

birleşme özeliği

vardır.

Değişme Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ olsun. Gerçel sayılarda dağılma, birleşme ve çarpma işlemine göre değişme özeliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi).(c+di) \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i \\ &= (ca-db) + (da+cb)i \\ &= (c+di).(a+bi) \\ &= z_2.z_1 \end{aligned}$$

bulunur.
Karmaşık sayılarda çarpma işlemine göre

değişme özeliği

vardır.
Sonuç olarak, $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ sistemi çarpma işlemine kapalıdır; etkisiz elemanı vardır; her elemanın tersi vardır; birleşme ve değişme özeliklerini sağlar. Öyleyse, sistem

değişmeli bir grup

tur.

Dağılma Özeliği

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinin varlığını gösterelim:
$z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned} z_1.(z_2+z) &= (a+bi)[(c+di)+(x+yi)] \\ &= (a+bi)[(c+x)+(d+y)i] \\ &= [a(c+x)-b(d+y)] + [a(d+y)+b(c+x)]i \\ &= (ac+ax-bd-by) + (ad+ay+bc+bx)i \\ &= [(ac-bd)+(ad+bc)i] + [(ax-by)+(ay+bx)i] \\ &= z_1.z_2 + z_1.z \end{aligned}$$

bulunur. Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özeliği vardır. Benzer şekilde, sağdan dağılma özeliğinin varlığı da gösterilebilir.
Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine *d*ağılma özeliği vardır.
O halde $(\mathbb{C} - 0, +, \cdot)$ sistemi bir *cisim*dir.

Çarpma İşleminde Kısaltma Kuralı

Theorem 6.15. *$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_3 \neq 0$ ve $uw = vw$ ise $z_1 = z_2$ dir.*

İspat: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ ve $z_3 = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned} uw &= (a+bi)(x+yi) \\ &= (ax-by)+(ay+bx)i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} vw &= (c+di)(x+yi) \\ &= (cx-dy)+(cy+dx)i \end{aligned}$$

olacaktır. $uw = vw$ olması için

$$(ax-by)+(ay+bx)i = (cx-dy)+(cy+dx)i$$

olmalıdır. Buradan,

$$(ax-by-cx+dy)+(ay+bx-cy-dx)i = 0$$

çıkar. Sol yanın eşleniği ile çarparsak

$$(ax-by-cx+dy)^2+(ay+bx-cy-dx)^2 = 0$$

ya da

$$[(a-c)x+(d-b)y]^2+[(a-c)y+(b-d)x]^2 = 0$$

yazabiliriz. Bu ifadedeki bütün sayılar gerçel ve $z_3 = x + yi \neq 0$ olduğundan, son eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$a = c \quad \text{ve} \quad b = d$$

olmasıdır. Öyleyse,

$$z_1 = z_2$$

olur.

6.13 *Bölme*

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_2 \neq 0$ olsun.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$

"Pay ve paydayı, paydanın eşleniği ile çarpalım".

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(ac-bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac-bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}$$

olur.
İki karmaşık sayının birbirine bölümünü elde etmek için paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

Örnek:

$$\frac{7+3i}{5-2i}$$

işlemini yapalım:

$$\begin{aligned}\frac{7+3i}{5-2i} &= \frac{(7-3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}\\ &= \frac{(35-6)+(14+15)i}{5^2+2^2}\\ &= \frac{29+29i}{29}\\ &= 1+i\end{aligned}$$

Bölme işlemini ters eleman yardımıyla şöyle tanımlayabiliriz:
$z_1 = a+bi$ ve $z_2 = c+di$ ve $z_2 \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

dir.
İki karmaşık sayının birbirine bölümü; bölenin tersi ile bölünenin çarpımına eşittir.

Theorem 6.16. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *ise, aşağıdaki bağıntılar vardır.*

$$\begin{aligned}|\, uv \,| &= |\, z_1 \,| \,.\, |\, z_2 \,|\\ |\, \frac{z_1}{z_2} \,| &= \frac{|\, z_1 \,|}{|\, z_2 \,|} \quad (z_2 \neq 0)\\ |\, z_1 + z_2 \,| &\leq |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,|\\ |\, z_1 \,| - |\, z_2 \,| &\leq |\, z_1 + z_2 \,|\end{aligned}$$

Bu teoremin ispatı öğrenciye bırakılmıştır.

6.14 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeleri $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a+ib$ biçiminde yazınız.
   a) $(3+4i)(4i-3)$
   b) $(6i-1)(1+6i)$
   c) $(1+\sqrt{-7})^2$

d) $(3-5i)^2$

e) $(-2+5i)(4+3i)$

f) $(5-2i)(3+4i)$

g) $\sqrt{-9}-3)(2-\sqrt{-1})$

h) $(\sqrt{-25}+2)(\sqrt{-16}-2)$

2. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

(a) $\frac{4+i}{2-3i}$

(b) $\frac{3+i}{5i}$

(c) $\frac{1-\sqrt{-7}}{i}$

(d) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{-3}}$

(e) $\frac{5-\sqrt{-7}}{\sqrt{-7}}$

(f) $\frac{i}{1+i}$

(g) $\frac{i^5+1}{i^5}$

(h) $\frac{i^3-1}{i^3}$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
a) $x^2-2ix-4=0$ b) $ix^2+5x-4i=0$

4. $z=2-i$ ise $z^{-1}-i$ bulunuz.

5. $z=1-i$ ise $z^2 \cdot z^{-1}$ ifadesini bulunuz.

6. $\mid z^2 \mid = \mid z \mid^2$ olduğunu gösteriniz.

7. $z=2-3i$ ise z^{-1}'i bulunuz.

8. $(2+3i)\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$ sayısını $a+ib$ şeklinde yazınız.

9. $z=\left(\frac{i}{3-i}\right)\left(\frac{1}{2+3i}\right)$ sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.

10. $|z|=|\overline{z}|$ olduğunu gösteriniz.

6.15 Geometrik Yorumlar

Toplama İşleminin Geometrik Yorumu

Karmaşık iki sayı $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun. z_1 ve z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntülerine, sırayla, A ve B diyelim.

Yandaki şekilde görüldüğü gibi $OACB$ paralel kenarını çizelim. Şekilde taralı olan,

$$\overset{\Delta}{ODB} \cong \overset{\Delta}{AEC} \quad \text{(A.K.A. eşlik kuralı)}$$

dir. Bu üçgenlerin eşliğinden yararlanarak $\mathbb{C}$ noktasının koordinatları $(a + c, b + d)$ olur. Yani C noktası,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

Şekli dikkatle inceleyecek olursak aşağıdaki sonucu çıkarırız.

İki karmaşık sayının mutlak değerleri toplamı, bu sayıların toplamının mutlak değerinden küçük olamaz.

Üçgen eşitsizliği diye bilinen bu gösterimin sembolle ifadesi şöyledir:

$$| z_1 | + | z_2 | \geq | z_1 + z_2 |$$

Çıkarma İşleminin Geometrik Yorumu

Yandaki şekli inceleyiniz. $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ olsun. z_1, z_2 ve $-z_2$ sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntülerine, sırasıyla, A, B ve P diyelim. Toplama işlemine benzer şekilde hareket edilerek, R noktasının koordinatları, $(a - c, b - d)$ bulunur. Yani R noktası,

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$$

sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür. Şekilden de kolayca görüleceği gibi, şu sonucu yazabiliriz:

İki karmaşık sayının mutlak değerlerinin farkı, farklarının mutlak değerinden büyük olamaz.

Bunun sembolle ifadesi şöyledir:

$$| z_1 | - | z_2 | \leq | z_1 - z_2 |$$

6.16 İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık

$z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ iki karmaşık sayı olsun. Bu sayılar arasındaki uzaklık, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri arasındaki uzaklık olarak tanımlanır. Dolayısıyla,
$z_1 = x_1 + iy_1$'in görüntüsü $A(x_1, y_1)$
$z_2 = x_2 + iy_2$'in görüntüsü $B(x_2, y_2)$
ise

$$| z_1 - z_2 | = | AB | = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

olur. Tabii,

$$| z_1 - z_2 | = | z_2 - z_1 |$$

olduğunu görmek kolaydır.
Ayrıca z_1, z_2, z_3, z herhangi karmaşık sayılar olmak üzere aşağıdaki özelikler sağlanır:

1. $|z_1^+ z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$
3. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$
4. $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$
5. $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
7. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

Örnek 6.17.

$z_1 = 1 + i$ ve $z_2 = 1 - i$ sayıları arasındaki uzaklığı bulalım.

$$\left.\begin{array}{lll} z_1 = 1 + i'nin & \text{görüntüsü} & A(1,1) \\ z_2 = 1 - i'nin & \text{görüntüsü} & B(1,-1) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow | z_1 - z_2 | = \sqrt{(1-1)^2 + (1+1)^2} = 2$$

bulunur.

Örnek 6.18.

$\{z :\mid z-1+i \mid = 2, z \in \mathbb{C}\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösterelim:
$z = x + iy$ olsun.

$$\begin{aligned}
& \mid z-1+i \mid = 2 \\
\Rightarrow \quad & \mid x+iy-1+i \mid = 2 \\
\Rightarrow \quad & \mid (x-1)+i(y+1) \mid = 2 \\
\Rightarrow \quad & \mid \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 2 \\
\Rightarrow \quad & (x-1)^2+(y+1)^2 = 4
\end{aligned}$$

bulunur. O halde, verilen denklemi sağlayan karmaşık sayılar, merkezi $(1,-1)$ ve yarıçapı 2 olan çember üzerindeki karmaşık sayılardır. Şekli inceleyiniz.

Örnek 6.19.

$$\{z :\mid z-1+i \mid \leq 2, z \in \mathbb{C}\}$$

kümesini karmaşık düzlemde gösterelim.

$$\mid z-1+i \mid \leq 0 \Rightarrow \mid z-(1-i) \mid \leq 2$$

$(1-i)$ sayısının görüntüsü $M(1,-1)$ olduğundan z sayılarının kümesi M merkezli $r=2$ yarıçaplı dairedir. Yukarıda sağdaki şekle bakınız.

6.17 Kutupsal Gösterim

Sıfırdan farklı bir karmaşık sayı $z = a + ib$ olsun. Bu sayının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsünü orijine birleştiren doğru parçasına r ve r nin Ox ekseni ile oluşturduğu açının ölçüsüne θ diyelim. Şekildeki dik üçgenden,

$$\begin{aligned} \mid z \mid &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \sin\theta &= \frac{b}{\mid z \mid} \quad \text{veya} \quad b = \mid z \mid \sin\theta \\ \cos\theta &= \frac{a}{\mid z \mid} \quad \text{veya} \quad a = \mid z \mid \cos\theta \end{aligned}$$

yazılır. a ve b yerine değerleri konularak,

$$z = a + ib = \mid z \mid \cos\theta + i \mid z \mid \sin\theta = \mid z \mid (\cos\theta + i\sin\theta)$$

veya

$$\mid z \mid = r \quad \text{yazılırsa} \quad z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

elde edilir. Bu biçimdeki gösterime, karmaşık sayıların

kutupsal (veya trigonometrik) gösterimi

denir.

Sıfırdan farklı $z = a + ib$ karmaşık sayısı için,

$$\cos\theta = \frac{a}{\mid z \mid} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \frac{b}{\mid z \mid}$$

eşitliklerini sağlayan θ gerçel sayısına z nin

argümenti

denir ve $arg(z) = \theta$ veya $arg(a + ib) = \theta$ biçiminde gösterilir.
$0 \leq \theta < 2\pi$ ise θ ya karmaşık sayının *esas argümenti* denir ve Arg(z) ile gösterilir.

Mutlak değeri ve argümenti verilen bir karmaşık sayı kolayca bulunur.

Karmaşık sayının mutlak değer ve argümentine bu sayının

kutupsal koordinatları

denir ve $(\mid z \mid, \theta)$ veya (r, θ) biçiminde gösterilir.

Karmaşık sayı, θ argümenti radyan cinsinden ve $k \in Z$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} z = a + ib &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] \end{aligned}$$

biçiminde de yazılabileceğini unutmayınız.

$$\mid z \mid = r \quad ve \quad (\cos\theta + i\sin\theta) = cis\theta = e^{i\theta}$$

gösterimini kullanırsak,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta = e^{i\theta}$$

kısaltmasını yazabiliriz.

Örnek 6.20.

$z = 1 + i\sqrt{3}$ sayısının argüment ve esas argümentini bulalım.

$$\mid z \mid = r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

bulunur. Mutlak değer yardımıyla,

$$z = 2(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

yazılır.

Karmaşık sayının kutupsal biçimi düşünülerek, $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$\begin{aligned} \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Rightarrow \quad arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

bulunur. θ için eşitliği sağlayan en küçük pozitif gerçel sayı $\frac{\pi}{3}$ olduğundan, z sayısının esas argümenti $\frac{\pi}{3}$ radyandır.

z sayısını kutupsal biçimde yazalım:

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 2cis60^0$$

veya $k \in z$ olmak üzere,

$$z = 2[\cos(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)] = 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)2e^{i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)}$$

ya da

$$z = 2[\cos(60^0 + k360^0) + i\sin(60^0 + k360^0)] = 2cis(60^0 + k360^0) = 2e^{i(60^o + k360^o)}$$

olur.

z 'nin esas argümentinin, OAB üçgeni yardımıyla bulunabileceğini görünüz.

Örnek 6.21.

Kutupsal koordinatları $(4, 225^0)$ olan karmaşık sayıyı bulalım:

$$\begin{aligned}
z &= 4cis225^0 \\
&= 4(\cos 225^0 + i \sin 225^0) \\
&= 4[(-\cos 45^0) + i(-\sin 45^0)] \\
&= 4\left[(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + i(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right] \\
&= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \\
&= -2\sqrt{2}(1+i)
\end{aligned}$$

1. $(1+i)^{14}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.
2. $(3-2i) = z_1(1+i)$ ise z_1 sayısını bulunuz.

6.18 Kutupsal Çarpma ve Bölme

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ve $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ karmaşık sayılarının çarpımını ve bölümünü bulalım.

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1.r_2[(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= r_1.r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \\
z_1.z_2 &= r_1.r_2cis(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}$$

olur.
Benzer şekilde

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.\bar{z}_2 = \frac{r_1}{r_2}cis(\theta_1 - \theta_2)$$

bulunur.
Yukarıdaki eşitliklerden,

$$\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

ve

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

sonuçlarını çıkarırız.

Örnek 6.22.

$z_1 = 2(\cos 70^0 + i\sin 70^0)$, $z_2 = 3(\cos 50^0 + i\sin 50^0)$ olmak üzere $z_1.z_2$ yi bulalım:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= 2.3cis(70^0+50^0) \\ &= 6(\cos 120^0 + i\sin 120^0) \\ &= 6(-\cos 60^0 + i\sin 60^0) \\ &= 6(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= -3+3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Örnek 6.23.

$\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$ ve $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ ise $\arg(\frac{z_1}{z_2})$yi bulalım:

$$\begin{aligned} \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Çarpma İşleminin Geometrik Yorumu

$$z_1 = a+ib = r_1 cis\theta_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

ve

$$z_2 = c+id = r_2 cis\theta_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

olsun. z_1 ile z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri sırasıyla A ve B olsun. Ox ekseni üzerinde $\mid OC \mid = 1$ birim uzunluk olacak şekilde C noktası alalım. $m(\hat{C}) = m(\hat{B})$ ve $m(\widehat{COA}) = m(\widehat{BOD})$ olacak şekilde açılar çizip $A\overset{\Delta}{O}C$ ne benzer $D\overset{\Delta}{O}B$ elde edelim.

$$\begin{aligned} A\overset{\Delta}{O}C \sim D\overset{\Delta}{O}B &\Rightarrow \frac{\mid OD \mid}{\mid OA \mid} = \frac{\mid OB \mid}{\mid OC \mid} \\ &\Rightarrow \frac{\mid OD \mid}{\mid z_1 \mid} = \frac{\mid z_2 \mid}{1} \\ &\Rightarrow \mid OD \mid = \mid z_1 \mid . \mid z_2 \mid \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $\widehat{COA} = \theta_1$, $\widehat{COB} = \theta_2$ ve $\widehat{COD} = \theta_1 + \theta_2$ olduğundan $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$ çarpımı, karmaşık düzlemde D noktası ile temsil edilir. Yani D noktası, $z_1.z_2$ sayısının, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

Bölme İşleminin Geometrik Yorumu

$z_1 \neq 0$ olmak üzere iki karmaşık sayı

$$z_1 = a + ib = r_1 cis\theta_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

ve

$$z_2 = c + id = r_2 cis\theta_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

olsun. z_1 ve z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri sırasıyla A ve B olsun. $\mid OC \mid = 1$ birim uzunluk olmak üzere $A\overset{\Delta}{O}C$ ne benzer $B\overset{\Delta}{O}D$ çizelim.

$$A\overset{\Delta}{O}C \sim B\overset{\Delta}{O}D \Rightarrow$$

$$\frac{\mid DO \mid}{\mid CO \mid} = \frac{\mid BO \mid}{\mid AO \mid} \Rightarrow \mid DO \mid = \frac{\mid z_2 \mid}{\mid z_1 \mid}$$

bulunur. Öte yandan

$$\widehat{COD} = \theta_2 - \theta_1, \mid \frac{z_2}{z_1} \mid = \mid OD \mid = \frac{r_2}{r_1}$$

olduğu açıktır. O halde,

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} cis(\theta_2 - \theta_1) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

bölümü, karmaşık düzlemde D noktası ile temsil edilir. Yani D noktası $\frac{z_2}{z_1}$ sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

6.19 DeMoivre Formülü

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx) = e^{inx}$$

6.20 Karmaşık Sayıların Kuvvetleri

$z = rcis\theta$ olsun.

$$\begin{aligned} z^2 &= z.z = rcis\theta.rcis\theta; & z^3 &= z^2.z = r^2cis2\theta.rcis\theta \\ z^2 &= r^2cis(\theta+\theta) & z^3 &= r^3cis(2\theta+\theta) \\ z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i\cos 2\theta) & z^3 &= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde devam edilerek $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

elde edilir.

Theorem 6.24. *$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için,*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

dır. Bu eşitliğe De Moivre eşitliği *denir.*

Örnek 6.25.

$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{75}$ karmaşık sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{75} &= (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{75} \\ &= \cos\frac{75\pi}{3} + i\sin\frac{75\pi}{3} \\ &= \cos 25\pi + i\sin 25\pi \\ &= \cos(\pi + 12.2\pi) + i\sin(\pi + 12.2\pi) \\ &= -1 + i0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 6.26.

$(1+i)^{18}$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$$|\ 1+i\ | = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} (1+i)^{18} &= (\sqrt{2})^{18}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^{18} = 2^9(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{18} \\ &= 2^9(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}) \\ &= 2^9(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

bulunur.

6.21 *Karmaşık sayıların Kökleri*

$z_1 = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sayısının n-inci $(n \in \mathbb{N}^+)$ kuvvetten köklerini $\sqrt[n]{z_1}$ ile göstereceğiz. Bu kökler

$$z = \sqrt[n]{z_1} \Leftrightarrow z^n = z_1$$

bağıntısını sağlayan z sayılarıdır.
Örneğin, karesi -2 olan bir gerçel sayı olmadığını biliyoruz; ama karesi -2 olan karmaşık sayıları bulabiliriz:

$$(\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

$$(-\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

O halde, $\sqrt{2}i$ ve $-\sqrt{2}i$ sayıları -2'nin karekökküdür.
Bu örnekteki gibi özel çözüm her zaman mümkün değildir. Karmaşık sayıların köklerini bulmak için, De Moivre teoremini kullanacağız

Theorem 6.27.

$$z_1 = rcis\theta \quad ve \quad n \in N^+ \quad için$$

$$z^n = z_1$$

denklemini sağlayan z sayıları şunlardır:

$$r^{1/n} cis\frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

İspat:

$z^n = z_1$ denkleminde $z_1 = rcis\theta$ değerini yerine koyup De Moivre teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned} z^n &= rcis\theta \\ z &= [rcis\theta]^{1/n} \\ z &= r^{1/n}cis[\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)] \\ z &= \sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{aligned}$$

bulunur.
$z^n = z_1$ denklemini sağlayan z sayılarına z_1 sayısının n-inci kuvvetten kökü denir. Köklerin modülleri eşit ve $\sqrt[n]{r}$ dir. Agümentleri ise birbirlerinden farklı olup

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \frac{\theta + 4\pi}{n}, \cdots, \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$

dir. Görüldüğü gibi, verilen bir z_1 karmaşık sayısının n-inci kuvvetten n tane kökü vardır. Bu kökler karmaşık düzlemde, merkezi orijinde olan $\sqrt[n]{\mid z_1 \mid}$ yarıçaplı çember üzerinde eşit aralıklarla sıralanır.

Örnek 6.28.

z_1 sayısını kutupsal biçimde yazalım. $k \in Z$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|\, z_1 \,| &= \sqrt{1+3} = 2 \\
z_1 &= 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) \\
z_1 &= 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)
\end{aligned}$$

olur. Kareköklere z diyelim. k bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned}
z^2 &= z_1 \\
z^2 &= 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \\
z &= 2^{1/2} cis[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)] \\
z &= \sqrt{2} cis(\frac{\pi}{6} + k\pi)
\end{aligned}$$

$k = 0$ için

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2} cis \frac{\pi}{6} \\
z_1 &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}) \\
&= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)
\end{aligned}$$

$k = 1$ için

$$\begin{aligned}
z_2 &= \sqrt{2} cis(\frac{\pi}{6} + \pi) \\
&= \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}) \\
&= \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 6.29.

$z^3 - i = 0$ denkleminin köklerini bulalım. $k = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
z^3 = i \quad &\Rightarrow \quad z^3 = cis(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\
&\Rightarrow \quad z = cis[\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)] \\
&\Rightarrow \quad z = [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})]
\end{aligned}$$

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned} z_1 &= [\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}] \\ z_1 &= (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\ z_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \end{aligned}$$

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} z_2 &= [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})] \\ z_2 &= (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) \\ z_2 &= (-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\ z_2 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i) \end{aligned}$$

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned} z_3 &= [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})] \\ z_3 &= (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) \\ z_3 &= (0 - i) \\ z_3 &= -i \end{aligned}$$

bulunur.
Köklerin görüntülerinin ağırlık merkezi orijinde olan düzgün çokgenin köşeleri olduğunu grafikten görünüz.
Söylenenleri özetlersek;
$z = r)cos\theta + isin\theta$ sayısının n tane kökü şunlardır:
$z_k = \sqrt[n]{r}\left(cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

Örnek 6.30.

$z_1 = 8 + 6i$ sayısının kareköklerini bulunuz.
Bu sayıyı kutupsal biçimde yazmak için trigonometrik cetvelden değerler bulmak zorunda kalacağız. Bundan sakınmak amacıyla, kutupsal koordinatları kullanmadan, karekökleri tanıma uyacak biçimde bulmaya çalışalım:

$z = x + iy$ ve $z^2 = z_1$ olsun.

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = 8+6i \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi = 8+6i \\ & \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{x} \end{array} \right. \end{aligned}$$

çıkar. Elde edilen sistemi çözelim:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 8 &\Rightarrow x^2 - (\frac{3}{x})^2 = 8 \\ &\Rightarrow x^4 - 9 - 8x^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x^2+1)(x^2-9) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \quad \text{olamaz} \\ &\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x_1 = 3 & \text{için} & y_1 = 1 \\ x_2 = -3 & \text{için} & y_2 = -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

bulunur. Ohalde $z_1 = 3 + i$ ve $z_2 = -3 - i$ olacaktır.

6.22 *Alıştırmalar*

1. $$z = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2 (2 - i)$$
   sayısının mutlak değerini bulunuz.
2. $z_1 = \mid z_1 - 1 \mid + 2i$ eşitliğini doğrulayan z_1 karmaşık sayısını bulunuz.
3. $\mid z - 1 \mid - \mid z + 2i \mid = 0$ eşitliğini doğrulayan z karmaşık sayılarının görüntülerini bulunuz.
4. $z_1 = 1 + 2i$ ve $z_2 = 3 - i$ sayıları arasındaki uzaklığı bulunuz.
5. $\{z : \mid z - i \mid \leq 3, z \in \mathbb{C}\}$ kümesini karmaşık sayılar düzleminde belirtiniz.
6. $\{z : \mid z + 1 - 2i \mid \leq \mid z + 4 \mid, z \in \mathbb{C}\}$'ni karmaşık sayılar düzleminde belirtiniz.
7. $z = 1 - \sqrt{3}i$ sayısını kutupsal biçimde yazınız.
8. $z_1 = 4(\cos 200^0 + i \sin 200^0)$ ve $z_2 = 2(\cos 110^0 + i \sin 110^0)$ ise z_1/z_2 sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

9. $\arg[z - 1 + i] = 60^0$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri kümesini gösteriniz.

10. $A = \frac{(cis\frac{\pi}{6})^4 (cis\frac{\pi}{2})^3}{(cis\frac{\pi}{4})^5}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

11. $z = (1 - i)^{64}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

12. Aşağıdaki şekilde görüntüleri verilen z_1 ve z_2'nin çarpımı olan sayıyı bulunuz.

13. $z = +i$ sayısının kareköklerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.

14. Kutupsal koordinatları $(2, 135^0)$ olan karmaşık sayıyı $a + ib$ biçiminde yazınız.

15. $4 \cdot (1 + \sqrt{3})i$ sayısının küpköklerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.

16. $z^4 = 1 + i$ denklemini çözünüz

17. Aşağıdaki denklemleri çözünüz ve kompleks düzlemde grafiklerini çiziniz:

    (a) $|z - 4 + 3i| = 5$

    (b) $|z + 3i| = 2$

    (c) $Im(z) = -2$

    (d) $Re(z) = 2$

    (e) $Re(1 + i\overline{z}) = 3$

    (f) $z^2 + (\overline{z})^2 = 2$

18. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz ve kompleks düzlemde grafiklerini çiziniz:

    (a) $Re(z) < -1$

    (b) $Re(z) > 3$

    (c) $-1 \leq Im(z) \leq 2$

(d) $|z - i| > 1$

(e) $Re(z^2) > 0$

(f) $2 < |z - i| < 4$

19. $4 \leq z\overline{z} < 9$ eşitsizliğini çözünüz ve kompleks düzlemde grafiklerini çiziniz:

20. $z = \sqrt{3} + i$ ise z^{1996} sayısını bulunuz.

21. deMoivre formülünü kullanarak;

$$sin3\theta = 3sin\theta - 4sin^3\theta$$
$$cos3\theta = 4sin^3\theta - 3cos\theta$$

olduğunu gösteriniz.

22. $\overline{z}^2 = 4$

23. $Re(z^2) = |\sqrt{3} - i|$ denklemini çözünüz.

24. $|z - (3 - 6i)| = 5$ denklemini çözünüz.

25. $z = \frac{1}{(1+i)(1-2i)(1+3i)}$ ise $Re(z)$ ve $Im(z)$'yi bulunuz.

26. $x^8 = -32$ denklemini çözünüz.

27. $x^5 = 1$ denklemini çözünüz.

28. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ sayısını bulunuz.

29. $z^3 + i = 0$ denklemini çözünüz.

30. $f, g : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$ birer fonksiyon ve

$$f : z \Rightarrow z + 1; \quad g : z \Rightarrow \overline{z}$$

ise $(g \circ f)(i)$'yi bulunuz.

7
Denklemler

7.1 İkinci Dereceden Denklemler

İkinci dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki her açık önermeye **ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem** denir. Bir açık önermeyi doğrulayan (eğer varsa) x gerçek sayılarına **denklemin kökleri**, tüm köklerin oluşturduğu kümeye denklemin **çözüm kümesi** veya **doğruluk kümesi,** çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de **denklemi çözme** denir.
$a, b, c \in \mathbb{R}$ sayılarına ikinci dereceden **denklemin katsayıları** denir.
Burada, daima $a \neq 0$ dır $b = 0$ veya $c = 0$ olabilir.
$b = 0$ ve $c = 0$ ise denklem;

$$ax^2 = 0$$

$b \neq 0$ ve $c = 0$ ise denklem;

$$ax^2 + bx = 0$$

$b = 0$ ve $c \neq 0$ ise denklem;

$$ax^2 + c = 0$$

biçimini alır. Bu tür denklemler ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin özel durumlarıdır.

$ax^2 = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü

$$\begin{aligned} ax^2 = 0 &\implies x^2 = 0 \quad (a \neq 0) \\ &\implies x.x = 0 \\ &\implies x = 0 \quad oxveya \quad x = 0 \\ &\implies x_1 = x_2 = 0 \end{aligned}$$

olur. Buna göre denklemin birbirine eşit gerçek iki (iki kat) kökü vardır. Çözüm kümesi şudur: Ç =

$$\{0\}$$

Örnek:

$$-\frac{7}{8}x^2 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$$\begin{aligned} -\frac{7}{8}x^2 = 0 &\implies x^2 = 0 \\ &\implies x.x = 0 \\ &\implies x_1 = 0 \quad oxveya \quad x_2 = 0 \\ &\implies x_1 = x_2 = 0 \end{aligned}$$

Ohalde, çözüm kümesi şudur: Ç =

$$\{0\}$$

$ax^2 + bx = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü

$$\begin{aligned} ax^2 + bx = 0 \implies & \quad x(ax+b) = 0 \\ \implies & \quad x = 0 \quad oxveya \quad ax + b = 0 \\ \implies & \quad x = 0 \quad oxveya \quad ax = -b \\ \implies & \quad x_1 = 0 \quad oxveya \quad x_2 = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$= \{0, -\frac{b}{a}\}$$

Örnek:

$$5x^2 - 4x = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4x = 0 &\implies x(5x-4) = 0 \\ &\implies x = 0 \quad oxveya \quad 5x - 4 = 0 \\ &\implies x_1 = 0 \quad oxveya \quad x_2 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$= \{0, \frac{4}{5}\}$$

olur.

$ax^2 + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü

$$\begin{aligned} ax^2 + c = 0 &\implies ax^2 = -c \\ &\implies x^2 = -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

a ve c aynı işaretli ise $-\frac{c}{a} < 0$ olacağından denklemin gerçek kökleri yoktur. $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi

$$= \{\}$$

olur.

a ve c ters işaretli ise $-\frac{c}{a} > 0$ olacağından denklemin ox$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ve ox$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ gibi gerçek iki kökü vardır. Çözüm kümesi

$$= \{\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\}$$

olur.

Örnekler:

1. $27x^2 + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} 27x^2 + 3 = 0 &\implies 27x^2 = -3 \\ &\implies x^2 = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Karesi $(-\frac{1}{9})$ a eşit olan hiç bir gerçek sayı yoktur. Bu durumda denklemin çözüm kümesi

$$= \{\}$$

olur.

2. $4x^2 - 16 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16 = 0 &\implies 4x^2 = 16 \\ &\implies x^2 = 4 \end{aligned}$$

$(-2)^2 = 4$ ve $2^2 = 4$ olduğundan istenen koşula uyan iki tane $x \in \mathbb{R}$ sayısı vardır ve bu sayılar -2 ve 2 dir. Çözüm kümesi

$$= \{-2, 2\}$$

olur.

$ax^2 + bx + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü

Örnekler:

1. $x^2 - 4x - 21 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Verilen denkleme x in katsayısının yarısının karesini bir ekleyip, bir çıkaralım.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 21 = 0 &\implies x^2 - 4x + (-\frac{4}{2})^2 - (-\frac{4}{2})^2 - 21 = 0 \\ &\implies x^2 - 4x + 4 - 4 - 21 = 0 \\ &\implies (x+2)^2 - 25 = 0 \\ &\implies (x+2)^2 - 5^2 = 0 \\ &\implies (x+2+5)(x+2-5) = 0 \\ &\implies (x+7)(x-3) = 0 \\ &\implies x+7 = 0 \quad oxveya \quad x-3 = 0 \\ &\implies x_1 = -7 \quad oxveya \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

bulunur. Ohalde, çözüm kümesi şöyledir:

$$= \{-7, 3\}$$

2. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}
6x^2 - 5x + 1 = 0 &\implies 6[x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}] = 0 \\
&\implies 6[x^2 - \frac{5}{6}x + (\frac{-5}{12})^2 - (\frac{-5}{12})^2 + \frac{1}{6}] = 0 \\
&\implies 6[x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{25}{144} - \frac{25}{144} + \frac{1}{6}] = 0 \\
&\implies 6[(x - \frac{5}{12})^2 - \frac{1}{144}] = 0 \\
&\implies 6(x - \frac{5}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2] = 0 \\
&\implies 6(x - \frac{5}{12} + \frac{1}{12})(x - \frac{5}{12} - \frac{1}{12}) = 0 \\
&\implies 6(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) = 0 \\
&\implies x - \frac{1}{3} = 0 \quad oxveya \quad x - \frac{1}{2} = 0 \\
&\implies x_1 = \frac{1}{3} \quad oxveya \quad x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Çözüm kümesi

$$= \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$$

olur.

3. $3x^2 - 2x + 7 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}
3x^2 - 2x + 7 &\implies 3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}) = 0 \\
&\implies 3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{7}{3}) = 0 \\
&\implies 3[(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{20}{9}] = 0 \\
&\implies (x - \frac{1}{3})^2 + \frac{20}{9} = 0
\end{aligned}$$

$\frac{20}{9} > 0$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(x - \frac{1}{3})^2 \geq 0$ olduğundan, bu iki ifadenin toplamı hiç bir gerçek sayı için sıfır olmaz. Bu nedenle verilen denklemin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi, Ç =

$$\{\}$$

olur.

Şimdi genel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\implies a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=0 \\ &\implies a[x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}]=0 \\ &\implies a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}]=0 \\ &\implies a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]=0 \end{aligned}$$

$a \neq 0$ olduğundan

$$ax^2+bx+c=0$$

denkleminin kökleri ile

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \tag{1}$$

denkleminin kökleri aynıdır.
(1)denkleminde $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için.

$$(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0 \quad oxve \quad 4a^2>0$$

olduğundan (1) denklemini doğrulayan x gerçek sayısının bulunması için gerek ve yeter koşul

$$b^2-4ac \geq 0$$

olmasıdır.

1. $b^2-4ac>0$ ise (1) denklemi

$$(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\mid a\mid})^2=0$$

veya

$$(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\mid a\mid})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\mid a\mid})=0 \tag{2}$$

biçiminde yazılır.
$a \neq 0$ olduğuna göre, $a>0$ veya $a<0$ dır.
$a>0 \Rightarrow\mid a\mid= a$ olacağından (2) denklemi

$$(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})=0$$

veya

$$(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})=0 \tag{3}$$

biçimini alır. Buradan,

$$x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ve

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olur. Yada iki kök birleştirilerek,

$$\mathbf{x_{1:2}} = \frac{\mathbf{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}}{\mathbf{2a}}$$

bulunur.

$a < 0 \Rightarrow \mid a \mid = -a$ olacağından (2) denklemi

$$(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2(-a)})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2(-a)}) = 0$$

ya da

$$(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) = 0$$

biçimini alır. Bu denklem ise (3) denklemine denktir. Yani çözüm kümeleri aynıdır.

Bu durumda,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminini çözüm kümesi Ç =

$$\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\}$$

olur.

2. $b^2 - 4ac = 0$ ise $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ olacağından (1) denklemi,

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$$

biçimini alır.

$$\begin{aligned}
(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = 0 \quad oxveya \quad x + \frac{b}{2a} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{b}{2a} \quad oxveya \quad x_2 = -\frac{b}{2a} \\
&\Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda denklemin birbirine eşit gerçek iki kökü (iki kat kök yada çakışık iki kökü) vardır.
Çözüm kümesi, Ç =

$$\{-\frac{b}{2a}\}$$

olur.

3. $b^2 - 4ac < 0$ ise $4ac - b^2 > 0$ olacağından (1) denklemi

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \tag{4}$$

biçimini alır.

$\frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ olacağından (4) ifadesi daima sıfırdan büyüktür. Bu eşitliği doğrulayan hiç bir x gerçek sayısı bulunamaz. Denklemin $\mathbb{R}$ içindeki çözüm kümesi Ç =

$$\{\}$$

olur.

İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin gerçek köklerinin varlığının $\mathbf{b^2 - 4ac}$ sayısına bağlı olduğunu gördük. Bu sayıya denklemin **diskriminantı** denir ve Δ ile gösterilir.

Öğrendiklerimizi özetliyecek olursak:

1. $\Delta > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır. Bunlar,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad oxve \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

'dır.

2. $\Delta = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirine eşit iki gerçek kökü (çakışık iki kökü veya iki kat kök) vardır. Bunlar,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

'dır.

3. $\Delta < 0$ ise $ax^2 + bx + c$ denkleminin gerçek kökleri yoktur. Bu denklemin gerçek sayılardaki çözüm kümesi ϕ dir.

Örnekler:

1. $6x^2 - 13x + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.
Önce verilen denklemin diskriminantını bulalım.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-13)^2 - 4.6.5 \\ &= 169 - 120 \\ &= 49 > 0 \end{aligned}$$

olduğundan denklemin birbirinden farklı ve gerçek iki kökü vardır.Bu kökler,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)+\sqrt{49}}{2.6} = \frac{13+7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)-\sqrt{49}}{2.6} = \frac{13-7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, çözüm kümesi, Ç =

$$\{\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\}$$

olur.

2. $9x^2 + 12x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (12)^2 - 4.9.4 \\ &= 144 - 144 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin eşit iki kökü (iki kat kök) vardır. Bunlar

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2.9} = -\frac{2}{3}$$

tür. Çözüm kümesi, Ç =

$$\{-\frac{2}{3}\}$$

olur.

3. $2x^2 - 3x + 7 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4.2.7 \\ &= 9 - 56 \\ &= -47 < 0 \end{aligned}$$

olduğundan denklemin gerçek kökleri yoktur. Çözüm kümesi, Ç =

$$\{\}$$

olur.

4. $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(a+b)]^2 - 4ab \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (a-b)^2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(a+b)+\sqrt{(a-b)^2}}{2ab} = \frac{(a+b)+(a-b)}{2ab} = \frac{2a}{2ab} = \frac{1}{b}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(a+b)-\sqrt{(a-b)^2}}{2ab} = \frac{(a+b)-(a-b)}{2ab} = \frac{2b}{2ab} = \frac{1}{a}$$

Ç =

$$\{\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\}$$

olur.

5. $mx^2 - (2m+3)x + m + 1 = 0$ denkleminin birbirine eşit gerçek iki kökü olması için m nin alacağı değeri bulalım.

Denklemin birbirine eşit gerçek iki kökü olması için,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac = 0 &\Rightarrow [-(2m+3)]^2 - 4m(m+1) = 0 \\ &\Rightarrow 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 4m = 0 \\ &\Rightarrow 8m + 9 = 0 \\ &\Rightarrow m = -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

olur.

6. $(m-3)x^2 + 2mx + 5m - 1 = 0$ denkleminin köklerinden birinin (2) olması için m nin alacağı değeri bulalım.

(2) denklemin bir kökü olduğuna göre, denklemi sağlar. O halde,

$$\begin{aligned} (m-3).2^2 + 2m.2 + 5m - 1 = 0 &\Rightarrow 4m - 12 + 4m + 5m - 1 = 0 \\ &\Rightarrow 13m - 13 = 0 \\ &\Rightarrow 13m = 13 \\ &\Rightarrow m = 1 \end{aligned}$$

olur.

7. $mx^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ denkleminin gerçek iki kökünün olması için m nin alacağı değerler kümesini bulalım.

Denklemin gerçek iki kökünün olması için, $\Delta > 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^2 - 4.m(-1) > 0 \quad &\Rightarrow \quad 4 + 4m > 0\\ &\Rightarrow \quad 4m > -4\\ &\Rightarrow \quad m > -1\end{aligned}$$

buna göre, Ç =

$$\{m \mid m > -1, m \in \mathbb{R}\}$$

olur.

Örnek 7.1.

1. Aşağıdakilerden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olanları işaretleyiniz.

a) $(x+6)(x-3) = 0$	b) $(x^2+2)(x-3) = 0$
c) $-3x^2 + 5 = 0$	d) $2^{4x} - 16 = 0$
e) $x(x+2) = 0$	f) $x + \frac{3}{x} - 1 = 0$
g) $(x-2)(x+1) = x^2 + 3$	h) $(3x-1)^2 - 1 = 0$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\frac{5}{7}x^2 = 0$	b) $(5a+3)x^2 = 0$
c) $3x^2 + x + 4 = 4 + x$	d) $5x^2 + 3x = x(x+3)$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $5x^2 - 45x = 0$	b) $2x^2 + \frac{2}{5}x = 0$
c) $\frac{3x^2}{7} = \frac{x}{14} - \frac{x^2}{2}$	d) $(2x-1)(3x+7) = 5x - 7$
e) $(5x - \frac{3}{4})(5x + \frac{3}{4}) = 2(5x - \frac{9}{32})$	f) $(\sqrt{3}x - 2)(\sqrt{3}x + 3) = -6$

4. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x^2 - 16 = 0$	b) $x^2 - 25 = 0$
c) $3x^2 - 243 = 0$	d) $3x^2 + 75 = 0$
e) $7x^2 - 11x = 3x^2 + 53$	f) $(5x-2)(5x+2) = 12$
g) $\frac{3(x^2-8)}{2} - \frac{10}{3} = \frac{2(x^2-3)}{3}$	h) $(a-b)^2x^2 = a^2 - b^2$

5. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x^2 - 16x + 39 = 0$	b) $6x^2 + 19x + 10 = 0$
c) $x^2 - 2x - 11 = 0$	d) $49x^2 - 70x - 74 = 0$
e) $3x^2 - 4x + 7 = 0$	f) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
g) $\frac{4}{25}x^2 + 2x + \frac{25}{4} = 0$	h) $(4x-3)^2 = (8x-6)(7x-2)$

6. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $2\sqrt{2}x^2 - 4x - 3\sqrt{2} = 0$

   b) $\sqrt{3}x^2 - 7x + 2\sqrt{3} = 0$

   c) $x^2 - (\sqrt{5} - 4)x - 7 - 5\sqrt{5} = 0$

   d) $3(3 - 2\sqrt{3})x^2 - 6(2 + \sqrt{3})x - 3 - 2\sqrt{3} = 0$

7. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x - b^2 + a^2 = 0$

   b) $x^2 - (1 + a + b)x + a + b = 0$

   c) $2(a - b)x^2 + (b^2 - a^2 - 2)x + a + b = 0$

   d) $2abx^2 - (2a^2 - b^2 + 3ab)x + a^2 - b^2 = 0$

   e) $15abx^2 - (12a^2 + 25b^2)x + 20 = 0$

8. $x^2 - (2m + 1)x + 2m = 0$ denkleminin iki kat kökü olması için m nin alacağı değeri bulunuz.

9. $6x^2 + (7m - 3)x + 2m^2 - 3m - 9 = 0$ denkleminin köklerinin birbirine eşit olması için m nin alacağı değeri bulunuz.

10. $mx^2 - (2m - 3)x + m - 2 = 0$ denkleminin gerçek iki kökü olması için m nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

11. $(2m + 1)x^2 - (4m + 5)x + 2m + 7 = 0$ denkleminin gerçek kökleri olmaması için m nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

12. $6x^2 + mx + m + 1 = 0$ denkleminin bir kökünün $\frac{4}{3}$ olması için m nin alacağı değeri bulunuz.

7.2 *Dönüştürme*

İkinci Dereceden Bir Denkleme Dönüştürülebilen Denklemlerin Çözümü

Bazı denklemler ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem biçiminde olmadığı halde, bunların üzerinde bazı işlemler yaparak ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem biçimine getirerek çözeriz.

7.3 *Polinomların Çarpımı*

Polinomların Çarpımı veya Bölümü Biçimindeki Denklemlerin Çözümü

$P(x)$ ve $Q(x)$ birinci veya ikinci dereceden birer polinom olmak üzere,

a) $P(x).Q(x) = 0 \Longrightarrow P(x) = 0$ veya $Q(x) = 0$

b) $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Longrightarrow P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0$

dır.

Örnekler: 1.

$$\begin{aligned}(4x+3)(x^2-9x+14)=0 &\implies 4x+3=0 \vee x^2-9x+14=0\\ &\implies 4x=-3 \vee x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2}\\ &\implies x=-\frac{3}{4} \vee x=2 \vee x=7\end{aligned}$$

denklemin çözüm kümesi, Ç =

$$\{-\frac{3}{4},2,7\}$$

olur.

2. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=0 &\implies x^2-5x+6=0 \wedge x^2-8x+15\neq 0\\ &\implies (x=2\vee x=3)\wedge(x\neq 3\wedge x\neq 5)\end{aligned}$$

buna göre denklemin çözüm kümesi, Ç =

$$\{2\}$$

olur.

3. $\frac{2x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x-3}-\frac{3}{2}=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım. Denklemdeki paydaların en küçük ortak katı

$$2(x+2)(x-3)$$

tür. Buradan

$$\frac{2x+1}{\underset{2(x-3)}{x+2}}-\frac{x+3}{\underset{2(x+2)}{x-3}}-\frac{3}{\underset{(x+2)(x-3)}{2}}=0$$

$$\frac{2(x-3)(2x+1)-2(x+2)(x+3)-3(x+2)(x-3)}{2(x+2)(x-3)}=0$$

$$\frac{-x^2-17x}{2(x+2)(x-3)}=0$$

çıkar. Son eşitliğin sağlanması için

$$-x(x+17)=0\wedge 2(x+2)(x-3)\neq 0$$

$$(x=0\vee x=-17)\wedge(x\neq -2\wedge x\neq 3)$$

olmalıdır. Ohalde, denklemin çözüm kümesi, Ç =

$$\{-17,0\}$$

olur.

7.4 Değişken değiştirme

Yardımcı Bilinmeyen Kullanılarak Çözülebilen Denklemler
$ax^4 + bx^2 + c = 0$ biçimindeki denklemler.
Bu tür denklemleri çözmek için $x^2 = t$ dönüşümü yapılırsa
ox$at^2 + bt + c = 0$ biçiminde ikinci dereceden bir denklem elde edilir.
t nin bulunan değerlerinin karekökleri (varsa) verilen denklemin kökleridir.

Örnek:

1. $x^4 - x^2 - 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.
$x^2 = t$ diyelim.

$$\begin{aligned} t^2 - t - 12 = 0 \quad &\Rightarrow \quad t = -3 \vee t = 4 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = -3 \vee x^2 = 4 \\ &\Rightarrow \quad c_1 = \{\} \vee c_2 = \{-2, 2\} \end{aligned}$$

verilen denklemin çözüm kümesi,

$$= c_1 \cup c_2 = \{-2, 2\}$$

olur.

2. $(\frac{x}{2x-3})^2 - \frac{5x}{2x-3} + 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.
$\frac{x}{2x-3} = t$ diyelim.

$$\begin{aligned} t^2 - 5t + 6 = 0 \quad &\Rightarrow \quad t_1 = 2 \vee t_2 = 3 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x}{2x-3} = 2 \vee \frac{x}{2x-3} = 3 \\ &\Rightarrow \quad x = 4x - 6 \vee x = 6x - 9 \\ &\Rightarrow \quad x = 2 \vee x = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

bulunur.
Denklemin çözüm kümesi Ç =

$$\{2, \frac{9}{5}\}$$

olur.

3. $2x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} - 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.
$x^{\frac{1}{3}} = t$ diyelim.

$$\begin{aligned} 2x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - 5 = 0 \wedge x^{\frac{1}{3}} = t \quad &\Rightarrow \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0 \wedge t \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad t = \frac{1}{2} \vee t = 2 \\ &\Rightarrow \quad x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \vee x^{\frac{1}{3}} = 2 \\ &\Rightarrow \quad (x^{\frac{1}{3}})^3 = (\frac{1}{2})^3 \vee (x^{\frac{1}{3}})^3 = 2^3 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{8} \vee x = 8 \end{aligned}$$

verilen denklemin çözüm kümesi Ç =

$$\{\frac{1}{8}, 8\}$$

olur.

4. $2^{x+1} + 2^{x-1} - \frac{10}{2^{x-2}} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} 2.2^x + \frac{2^x}{2} - \frac{10.2^2}{2^x} = 0 \wedge 2^x = t \quad &\Rightarrow \quad 2t + \frac{t}{2} - \frac{40}{t} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 5t^2 - 80 = 0 \wedge 2t \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad t = \pm 4 \\ &\Rightarrow \quad 2^x = 4 \vee 2^x = -4 \\ &\Rightarrow \quad 2^x = 2^2 \vee 2^x = -4 \\ &\Rightarrow \quad c_1 = \{2\} \vee c_2 = \phi \end{aligned}$$

verilen denklemin çözüm kümesi, Ç =

$$c_1 \cup c_2 = \{2\}$$

olur.

7.5 *Köklü denklemler*

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ türündeki denklemleri çözmek için eşitliğin iki tarafının verilen kök kuvvetini alarak denklemi kökten kurtarırız. Elde edilen yeni denklemi çözerek köklerini buluruz. Kuvvet alma işlemi sırasında yabancı kökler girebileceğinden bulunan kök veya köklerin verilen denklemi sağlayıp sağlamadığı mutlaka, kontrol edilmelidir.

Örnekler:

1. $x + \sqrt{x^2 + 16x - 80} = 10$ denkleminin çözüm kümesini bulalım. Verilen denklemi $\sqrt{x^2 + 16x - 80} = 10 - x$ biçiminde yazarak köklü ifadeyi eşitliğin bir yanında yalnız bırakalım.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 16x - 80} = 10 - x \quad &\Rightarrow \quad (\sqrt{x^2 + 16x - 80})^2 = (10 - x)^2 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + 16x - 80 = 100 - 20x + x^2 \\ &\Rightarrow \quad 36x = 180 \\ &\Rightarrow \quad x = 5 \end{aligned}$$

$x = 5$ in verilen denklemi sağlayıp sağlamadığına bakalım.

$$5 + \sqrt{5^2 + 16.5 - 80} = 10 \Rightarrow 10 = 10$$

Buna göre, verilen denklemin çözüm kümesi, Ç =

$$\{5\}$$

olur.

2. $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+2}=1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Verilen eşitliğin sağlanması için,

$$\begin{aligned} 4x+1\geq 0 \wedge x+2\geq 0 &\Rightarrow x\geq -\frac{1}{4} \wedge x\geq -2 \\ &\Rightarrow x\geq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+1}=1+\sqrt{x+2} &\Rightarrow (\sqrt{4x+1})^2=(1+\sqrt{x+2})^2 \\ &\Rightarrow 4x+1=1+2\sqrt{x+2}+x+2 \\ &\Rightarrow 3x-2=2\sqrt{x+2} \\ &\Rightarrow (3x-2)^2=(2\sqrt{x+2})^2 \\ &\Rightarrow 9x^2-12x+4=4x+8 \\ &\Rightarrow 9x^2-16x-4=0 \\ &\Rightarrow x=-\frac{2}{9} \vee x=2 \end{aligned}$$

bulunur. x 'in bulunan bu değerleri $x\geq -\frac{1}{4}$ koşuluna uygun olduğundan, verilen denklemin çözüm kümesi, Ç =

$$\{-\frac{2}{9},2\}$$

olur.

3. $3x^2+5+3\sqrt{3x^2-14x+15}=14x$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Verilen denklemi

$$3x^2-14x+5+3\sqrt{3x^2-14x+15}=0$$

biçiminde yazalım ve eşitliğin her iki tarafına (10) ekleyelim.

$$3x^2-14x+15+3\sqrt{3x^2-14x+15}=10$$

olur.

$$\sqrt{3x^2-14x+15}=t \quad (t\geq 0) \quad oxdiyelim$$

$$t^2+3t=10 \vee t^2+3t-10=0$$

olur.

$$t^2+3t-10=0 \Longrightarrow t=2 \vee t=-5$$

bulunur.

$t=-5<0$ olduğundan istenen koşula uymaz.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2-14x+15}=2 &\Rightarrow 3x^2-14x+15=4 \\ &\Rightarrow 3x^2-14x+11=0 \\ &\Rightarrow x=1 \vee x=\frac{11}{3} \end{aligned}$$

bulunur.
Denklemin çözüm kümesi,

$$= \{1, \frac{11}{3}\}$$

olur.

7.6 *Mutlak Değer*

Mutlak Değer İçeren Denklemlerin Çözümü

Bu tür denklemleri çözerken, mutlak değer işareti arasındaki ifadenin hangi aralıkta pozitif hangi aralıkta negatif olacağını belirlememiz gerekir. Bu işlem, mutlak değer işaretini hangi koşullara göre kaldırabileceğimizi belirler.
Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Örnekler:

1. $x^2 - \mid 2x-3 \mid = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

a)

$$\begin{aligned} 2x-3<0 &\Rightarrow x<\frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \mid 2x-3 \mid = -(2x-3) \quad \textit{oxolduundan}, \\ x^2 - \mid 2x-3 \mid = 0 &\Rightarrow x^2 - [-(2x-3)] = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 1 \vee x = -3 \end{aligned}$$

bulunur.
Bu değerler $x < \frac{3}{2}$ koşuluna uygun olduğundan verilen denklemin kökleridir.

b)

$$\begin{aligned} 2x-3 \geq 0 &\Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \mid 2x-3 \mid = 2x-3 \quad \textit{oxolduundan}, \\ x^2 - \mid 2x-3 \mid = 0 &\Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin çözüm kümesi ϕ dir. Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi, Ç =

$$\{-3, 1\}$$

olur.

2. $x \mid x-1 \mid = 12$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

a)

$$\begin{aligned} x-1<0 &\Rightarrow x<1 \\ &\Rightarrow \mid x-1 \mid = -x+1 \quad \textit{oxolduundan}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \mid x-1 \mid = 12 &\Rightarrow x(-x+1) = 12 \\ &\Rightarrow x^2 - x + 12 = 0 \end{aligned}$$

Ç =

$$\{\}$$

olur.

b)

$$\begin{aligned} x-1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \\ &\Rightarrow \mid x-1 \mid = x-1 \quad oxolduundan, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \mid x-1 \mid = 12 &\Rightarrow x(x-1) = 12 \\ &\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \\ &\Rightarrow x = -3 \vee x = 4 \end{aligned}$$

bulunur.

$x = -3$ sayısı $x \geq 1$ koşuluna uymadığından, denklemin bir kökü değildir. Verilen denklemin çözüm kümesi, Ç =

$$\{4\}$$

olur.

Örnek 7.2.

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $(x-1)(2x-3)(9x^2-15x+4) = 0$

   b) $3(3x-2)(4x^2-9)(x^2-5x+6) = 0$

   c) $(6x-2)(2x-5) = (3x-1)^2$

   d) $\frac{25}{4}(2x+3)^2 - 18x = 27$

   e) $(3x^2+5x+2)^2 = (3x^2-6x-2)^2$

   f) $x^2(x^2-9) + 36 = 4x^2$

   g) $x^4 - x^3 + x^2 - x = 0$

   h) $3x^3 + 3x = x^2 + 1$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a) $\frac{4}{x-2} + 3 = \frac{2}{x+2}$

   b) $4 + \frac{9}{x^2} = \frac{12}{x}$

   c) $\frac{x}{x+1} - \frac{2x+5}{x^2+4x+3} = 3$

   d) $\frac{2x-1}{x^2-x-12} + \frac{x+2}{x^2+x-6} = 0$

e) $\frac{x-3}{x^2-x-2} + \frac{2x-7}{x^2-3x+2} = \frac{x}{x^2-1}$

f) $\frac{1-2x}{1-x} = \frac{3x}{2x+1} + \frac{x^2+11}{2x^2-x-1}$

3. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

b) $4x^6 - 2x^3 - 1 = 0$

c) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$

d) $6x^{-2} = x^{-1} + 1$

e) $(x-1)^{1/2} - 2(x-1)^{1/4} = 15$

f) $(x^2-1)^2 + 24 = 11(x^2-1)$

g) $(x^2+3x)^2 + 8 = 6x^2 + 18x$

h) $(x + \frac{4}{x})^2 + 20 = 9(\frac{x^2+4}{x})$

k) $(\frac{x-1}{x+3})^2 + 3 = 4(\frac{1-x}{x+3})$

l) $(\frac{x+1}{x+2})^2 - 8 + 2(\frac{x+1}{x+2}) = 0$

m) $(2x - \frac{1}{x})^2 + 6x - \frac{3}{x} = 4$

n) $\frac{x^2+8}{x} + \frac{54x}{x^2+8} = 15$

o) $2^{2x} - 3.2^{x+2} - 32 = 0$

p) $3^x + 3^{-x+5} = 4.3^2$

4. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x + \sqrt{x-2} - 4 = 0$

b) $\sqrt{2x-6} + x = 3$

c) $3x = \sqrt{7x-10}$

d) $3\sqrt{3x} - 3 = 2x$

e) $\sqrt[3]{x-3} - 1 = 2$

f) $\sqrt[4]{\frac{x}{3}} - 1 = 2$

g) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3} = 1$

h) $\sqrt{3x-3} + \sqrt{x-3} = 4$

k) $\sqrt{5x-1} + \sqrt{4(x-1)} = 5$

l) $\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+4} - 8 = 0$

m) $\sqrt{2x+7} - \sqrt{x+3} = 1$

n) $\sqrt{x-8} - \sqrt{x} = 2$

o) $\sqrt{3y^2+4y+2} - 1 = 2y$

p) $\sqrt{3x+8} - \sqrt{3(1-2x)} = 2$

r) $x^2 - 8x + 12 = 7\sqrt{x(x-8)}$

s) $3x^2 + 5 = 14x + 2\sqrt{3x^2 - 14x + 20}$

t) $5x^2 - 32x + 105 = 14\sqrt{5x^2 - 32x + 60}$

5. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x^2 =\mid 28 - 3x \mid$ b) $4x \mid x - 2 \mid -4 = 7$

c) $x \mid 2x - 3 \mid + \mid 3x - 4 \mid +4 = 0$ d) $x^2 - 4 \mid x \mid = 21$

7.7 *Köklerle Katsayılar Arasındaki Bağıntılar*

İkinci Dereceden Bir Denklemin Kökleriyle Katsayıları Arasındaki Bağıntılar

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin diskriminantı pozitif ise, yani

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

ise, denklemin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad oxve \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dır.

Şimdi bu köklerle denklemin a, b, c katsayıları arasında bazı bağıntılar kuracağız.

Köklerin Toplamı:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Köklerin Çarpımı:

$$\begin{aligned} x_1.x_2 &= (\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a})(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}) \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Köklerin Farkının Mutlak Değeri:

$$\begin{aligned} \mid x_1 - x_2 \mid &= \mid \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \mid \\ &= \mid \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \mid \\ &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\mid a \mid} \end{aligned}$$

Örnekler:

1. $4x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin

a) Köklerinin toplamını,

b) Köklerinin çarpımını,

c) Köklerin farkının mutlak değerini

bulalım.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ &= -\frac{(-5)}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1.x_2 &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4.4.1 \\ &= 25 - 16 \\ &= 9 \\ \mid x_1 - x_2 \mid &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\mid a \mid} \\ &= \frac{\sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2. $7x^2 + 5x - 3 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = \frac{2}{7}$ olduğuna göre, diğer kökünü bulalım.

Verilen denklemin kökleri $x_1 = \frac{2}{7}$ ve x_2 olduğuna göre, köklerin toplamını yazalım.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad &\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{5}{7} \\
&\Rightarrow \quad \frac{2}{7} + x_2 = -\frac{5}{7} \\
&\Rightarrow \quad x_2 = -\frac{5}{7} - \frac{2}{7} \\
&\Rightarrow \quad x_2 = -1
\end{aligned}$$

olur.

3. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek iki kökü x_1, x_2 olsun.

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ b) $x_1^2 + x_2^2$ sayılarını a, b, c sayılarına bağlı olarak hesaplayalım.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2} \\
&= \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \\
&= -\frac{b}{c}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\
&= (-\frac{b}{a})^2 - 2\frac{c}{a} \\
&= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \\
&= \frac{b^2 - 2ac}{a^2}
\end{aligned}$$

7.8 *Kökleri Verilen Denklemi Bulma*

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemi Bulma

Bu bölümde, çözüm kümesi $\{x_1, x_2\}$ olan ikinci dereceden denklemin bulunmasını inceleyeceğiz.

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

denkleminin gerçek iki kökü x_1, x_2 olsun (1) denkleminin

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$$

biçiminde yazılabileceğini biliyoruz. Buradan, $a \neq 0$ olduğundan,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

veya

$$x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (2)$$

olur.

(1) ve (2) denklemleri denktir. Yani, çözüm kümeleri aynıdır.

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = S$$

$$\frac{c}{a} = x_1.x_2 = P$$

değerleri, (2) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

veya

$$x^2 - Sx + P = 0$$

denklemi elde edilir.

Sıfırdan farklı her a gerçek sayısı için,

$$x^2 - Sx + P = 0$$

denklemi ile

$$a(x^2 - Sx + P) = 0$$

denklemleri denktir. Buna göre, $\{x_1, x_2\}$ kümesini çözüm kümesi kabul eden

$$a(x^2 - sx + p) = 0$$

denklemi bir tane değildir. a'nın her değeri için, böyle, ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemlerin hepsinin çözüm kümeleri aynıdır.

$$x^2 - Sx + P = 0$$

denklemi, bu denklemlerin bir temsilcisidir.

Örnekler:

1. Kökleri $x_1 = 3$ ve $x_2 = -7$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım.

$$S = x_1 + x_2 = 3 + (-7) = -4$$

$$P = x_1x_2 = 3.(-7) = -21$$

bulunur. Bu değerler

$$x^2 - Sx + P = 0$$

eşitliğinde yerlerine yazılırsa;

$$x^2 - (-4)x + (-21) = 0$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

olur.

2. Çözüm kümesi $\{3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}\}$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım.

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2} \quad oxve \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} S = x_1 + x_2 &= (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = 6 \\ P = x_1.x_2 &= (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) \\ &= 3^2 - (2\sqrt{2})^2 \\ &= 9 - 8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. İstenilen ikinci dereceden denklem,

$$x^2 - Sx + P = 0$$

dan

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

olur.

3. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Bunları bulmadan, kökleri $(kx_1 + h)$ ve $(kx_2 + h)$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım.

$$\begin{aligned} S &= (kx_1 + h) + (kx_2 + h) \\ &= k(x_1 + x_2) + 2h \\ &= k(-\frac{b}{a}) + 2h \\ P &= (kx_1 + h)(kx_2 + h) \\ &= k^2 x_1 x_2 + khx_2 + khx_1 + h^2 \\ &= k^2.x_1 x_2 + kh(x_1 + x_2) + h^2 \\ &= k^2 \frac{c}{a} + kh(-\frac{b}{a}) + h^2 \end{aligned}$$

bulunur. İstenilen ikinci dereceden denklem,

$$x^2 - Sx + P = 0$$

eşitliğinden

$$x^2 - [k(-\frac{b}{a}) + 2h]x + (k^2\frac{c}{a} - kh\frac{b}{a} + h^2) = 0$$

veya

$$ax^2 - (-kb + 2ah)x + (k^2c - khb + ah^2) = 0$$

bulunur.

4. $2x^2 - 16x + 30 = 0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökleri $2x_1 + 5$ ve $2x_2 + 5$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım:

Bulunacak denklemin kökleri $\alpha = 2x_1 + 5$ ve $\beta = 2x_1 + 5$ olsun.

$$\begin{aligned}
S &= \alpha + \beta = (2x_1 + 5) + (2x_2 + 5) \\
&= 2(x_1 + x_2) + 10 \\
P &= \alpha.\beta = (2x_1 + 5)(2x_2 + 5) \\
&= 4x_1x_2 + 10x_2 + 10x_1 + 25 \\
&= 4x_1x_2 + 10(x_1 + x_2) + 25
\end{aligned}$$

verilen denklemden,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-16}{2} = 8$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{30}{2} = 15$$

bulunur. Bu değerler S ve P de yerine yazılırsa,

$$S = 2.8 + 10 = 26$$

$$P = 4.15 + 10.8 + 25 = 165$$

olur. İstenen denklem ise,

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 26x + 165 = 0$$

dır.

Örnek 7.3.

1. Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerinin toplamını ve çarpımını bulunuz.

   a) $x^2 + 5x + 4 = 0$ b) $-x^2 - 7x + 3 = 0$
   c) $3x^2 - 2x - 11 = 0$ d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{1}{3} = 0$

2. Aşağıdaki denklemleri çözmeden

   a) Köklerin çarpma işlemine göre terslerinin toplamını,

b) Köklerin farkının mutlak değerini

bulunuz.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $14x^2 - 13x + 3 = 0$
c) $3x^2 + x - 14 = 0$ d) $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} = 0$
e) $6x^2 = 11x + 10$ f) $-49x^2 + 35x - 4 = 0$

3. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek iki kökü x_1, x_2 olduğuna göre,

a) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ b) $x_1^3 + x_2^3$
sayılarını a, b, c sayılarına bağlı olarak hesaplayınız.

4. Aşağıdaki denklemleri çözmeden,
a) Köklerin kareleri toplamını,
b) Köklerin karelerinin çarpma işlemine göre terslerinin toplamını bulunuz.

a) $x^2 + 7x - 12 = 0$ b) $5x^2 + 6x - 8 = 0$

c) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$ d) $4x^2 - 9x + 3 = 0$

e) $-x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ f) $-x^2 + \frac{7}{6}x = \frac{10}{3}$

5. Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerin küpleri toplamını bulunuz.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - 5x = 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ d) $x^2 - \frac{2}{3}x - 2 = 0$

e) $2x^2 + 3x - 15 = 0$ f) $-x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} = 0$

6. Aşağıdaki çözüm kümeleri verilen ikinci dereceden denklemleri bulunuz.

a) $\{2, 5\}$ b) $\{3, -5\}$

c) $\{4\}$ d) $\{-3, \sqrt{3}\}$

e) $\{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$ f) $\{5 + 2\sqrt{7}, 5 - 2\sqrt{7}\}$

g) $\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\}$ h) $\{\frac{a+b}{a}, \frac{b}{a+b}\}$

7. $10x^2 - 7x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. Bu denklemi çözmeden, kökleri

a) $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}$ b) $\frac{3}{x_1}, \frac{3}{x_2}$

d) $\frac{x_1}{5}, \frac{x_2}{5}$ e) $x_1 + 2, x_2 + 2$
olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

8. $3x^2 - 19x + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. Bu denklemi çözmeden, kökleri

   a) $5x_1 + 4, \quad 5x_2 + 4$ b) $3x_1 - 2, \quad 3x_2 - 2$

   olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

9. $2x^2 - 3x + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. Bu denklemi çözmeden,

   a) $7x_1x_2^2 - 5x_1^3 + 7x_1^2x_2 = 5x_2^3$ b) $(4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$

   ifadelerini hesaplayınız.

10. $2(m-1)x^2 + 5(m+2)x + 3m + 2 = 0$ denkleminin kökleri toplamı 3 olduğuna göre m'yi bulunuz.

11. $(m-2)x^2 - mx + 2 = 0$ denkleminin kökleri arasında $x_1 - 3x_2 = 1$ bağıntısı olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

12. $(2m-5)x^2 - (m-2)x + m^2 + 9m - 4 = 0$ denkleminin kökleri çarpımının 2 olması için m ne olmalıdır?

13. $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ denkleminin kökleri arasında $x_1 = x_2$ bağıntısı olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

14. $(m-3)x^2 - 2(m-2)x - 2(m+3) = 0$ denkleminin kökleri arasında $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{8}$ bağıntısı olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

15. $x^2 - (2m-5)x + 2m - 3 = 0$ denkleminin köklerinin kareleri toplamının 11 olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

16. $(3m+2)x^2 + 5(m+2)x + 2(m-1) = 0$ denkleminin köklerinden birinin, diğer kökün çarpma işlemine göre tersine eşit olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

17. $(2m-3)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ denkleminde köklerin karelerinin çarpma işlemine göre tersleri toplamının 3 olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

18. $(7m-6)x^2 - (3m+1)x + m - 4 = 0$ denkleminin kökleri arasında $2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 0$ bağıntısı olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

19. $(1-2m)x^2 + mx + 7m - 8 = 0$ denkleminin kökleri arasında $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3) = 2$ bağıntısı olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

20. $mx^2 + (3m-8)x + 2m = 0$ denkleminin kökleri arasında $2(x_1^2 + x_2^2) = 5x_1x_2$ bağıntısının olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

7.9 İkinci Dereceden Denklemlerin İncelenmesi

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Bir Denklemin Köklerini Bulmadan, Köklerinin Varlığının ve İşaretinin İncelenmesi

Daha önce $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümünü gördük. Şimdi, bu denklemi çözmeden köklerle katsayılar arasındaki bağıntılardan yararlanarak köklerinin varlığını ve işaretlerini belirlemeye çalışalım. Bunun için, verilen denklemde $\mathbf{\Delta}, \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ nın işaretlerini incelememiz gerekir.

1. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

ise, denklemin gerçek kökleri olmadığından, köklerinin işareti de söz konusu değildir.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

ise, denklemin birbirine eşit gerçek iki kökü (yada iki kat bir kökü) vardır. Bu iki kat kökün $(x_1 = x_2)$ işareti $-\frac{b}{a}$ sayısının işaretine bağlıdır.

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x_1 = x_2 < 0$
b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$
c) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x_1 = x_2$
dir.

3. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

ise, denklemin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır. Denklemin kökleri x_1, x_2 ve $x_1 < x_2$ olsun.

a) $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ise, kökler çarpımı negatif olduğu için, kökler ters işaretlidir. Yani $x_1 < 0 < x_2$ dir.

b) $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ ise, kökler çarpımı pozitif olduğundan iki kök de aynı işaretlidir. Köklerin artı işaretli mi yoksa eksi işaretli mi olduğu $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ sayısının işaretine bağlıdır.

I) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$
II) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 < 0$
dır.

c) $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = 0$ ise, köklerden biri sıfırdır. Diğer kökün işareti $-\frac{b}{a}$ sayısının işaretine bağlıdır.

I) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 = x_1 < x_2$
II) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 = 0$
dır.

Yukarıdaki öğrendiklerimizi aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz.

$\Delta < 0$	Denklemin gerçek kökleri yoktur		
$\Delta = 0$	$x_1.x_2 = \frac{c}{a} > 0$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$	$0 < x_1 = x_2$
		$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$	$x_1 = x_2 < 0$
	$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 0$		$x_1 = x_2 = 0$
$\Delta > 0$	$x_1.x_2 = \frac{c}{a} < 0$		$x_1 < 0 < x_2$
	$x_1.x_2 = \frac{c}{a} > 0$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$	$0 < x_1 < x_2$
		$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$	$x_1 < x_2 < 0$
	$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = 0$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$	$0 = x_1 < x_2$
		$x_2 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$	$x_1 < x_2 = 0$

Örnekler:

1. $x^2 - 5x - 2 = 0$ denklemini çözmeden köklerinin varlığını ve işaretini inceleyelim.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.(-2) = 33 > 0$ olduğundan,
   denklemin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır.
   $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -2 < 0$ olduğundan,
   kökler ters işaretlidir. Yani,
   $x_1 < 0 < x_2$ dir.
2. $-6x^2 + 19x - 10 = 0$ denklemini çözmeden köklerinin varlığını ve işaretini inceleyelim.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (19)^2 - 4(-6)(-10) = 121 > 0$ olduğundan,
   denklemin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır.

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} > 0$$

Ohalde, kökler aynı işaretlidir.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{19}{6} > 0$$

olduğu için kökler pozitif işaretlidir.
$0 < x_1 < x_2$
dir.

Örnek 7.4.

1. Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerinin varlığını ve işaretini inceleyiniz.
   a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $3x^2 + 17x - 5 = 0$

   c) $2x^2 - x - 1 = 0$ d) $-9x^2 - 2x + 11 = 0$

   e) $3x^2 - 5x = 0$ f) $m^2x^2 - 3mx + 13 = 0$
2. $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m - 5 = 0$ denkleminin köklerinin varlığını ve sayısını m'nin alacağı değerlere göre inceleyiniz.

7.10 Denklem Sistemleri

İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler ve Denklem Sistemleri

a, b, c sayılarından en az biri sıfırdan farklı ve $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$$

biçimindeki denkleme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir. Bu denklemi sağlayan (x, y) gerçek sayı ikililerinin kümesine de denklemin **çözüm kümesi** adı verilir.

İki bilinmeyen içeren birinci dereceden en az iki denklemin oluşturduğu sisteme, birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi dediğimizi anımsayınız. Eğer bu denklemlerden en az bir tanesi ikinci dereceden ise, bu sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Bu tür denklem sistemlerini çözerken, verilen denklemlerden yararlanarak, yeni denklemler aranır. İki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümü ile ilgili aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Örnekler:

1. $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 6, \\ x + y + 2\sqrt{3} = 0 \end{array}\right\}$ sisteminin çözüm kümesini bulalım:

$x + y + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = -x - 2\sqrt{3}$ olur. Birinci denklemde y yerine $-x - 2\sqrt{3}$ değerini yazalım.

$$\begin{aligned} x^2 + (-x - 2\sqrt{3})^2 = 6 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 - 6 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

olur.

$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -(-\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$ bulunur. Verilen sistemin çözüm kümesi şudur: Ç =

$$\{(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$$

2.

$$5x^2 + 3y^2 = 15 \qquad (1)$$

$$3x^2 - 7y^2 = -2 \qquad (2)$$

sisteminin çözüm kümesini bulalım:

(1) denkleminin her iki yanını 7, (2) denkleminin her iki yanını 3 sayısı ile çarpalım.

$$\begin{aligned} 35x^2 + 21y^2 &= 105 \\ {}_{+}9x^2 - 21y^2 &= -6 \\ \hline 44x^2 &= 99 \\ x &= \pm\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

bulunan x in bu değerini (1) denklemde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} 5.\frac{9}{4} + 3y^2 = 15 \quad &\Rightarrow \quad 3y^2 = \frac{15}{4} \\ &\Rightarrow \quad y^2 = \frac{5}{4} \\ &\Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Sistemin çözüm kümesi,

$$= \{(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}), (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}), (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})\}$$

olur.

3.

$$3x - y^2 = -2 \tag{1}$$

$$2x^2 + 5y^2 = 3 \tag{2}$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.
$3x - y^2 = -2 \Rightarrow y^2 = 3x + 2$ olur. y^2 nin bu değerini (2)nci denklemde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5(3x+2) = 3 \quad &\Rightarrow \quad 2x^2 + 15x + 7 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_{1.2} = \frac{-15 \pm 13}{4} \\ &\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x_2 = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 = -\frac{1}{2} \quad oxiin \quad y^2 = 3(-\frac{1}{2}) + 2 \quad &\Rightarrow \quad y^2 = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$x_2 = -7$ için $y^2 = 3(-7) + 2 \Rightarrow y^2 = -19$
bulunur. Buna göre, $x = -7$ için bir $y \in \mathbb{R}$ yoktur. Sistemin çözüm kümesi, Ç =

$$\{(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\}$$

olur.

Örnek 7.5.

1. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $3x + 4y = 11$ b) $\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}y = \frac{7}{2}$

$x + 7y = 3$ $\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}y = -\frac{5}{3}$

c) $x + y = 3$ d) $3y - 2x = 3$

$x - y = 3$ $x + y = -4$

$x - 2y = 3$ $x + 3y = -6$

e) $xy = -4$ f) $2x^2 + xy + y^2 = 9$

$2x - y = 9$ $-x + 2y = 1$

g) $9x^2 + 16y^2 = 100$ h) $3x^2 - 4y^2 = 42$

$x^2 + y^2 = 8$ $2x^2 + 3y^2 = \frac{27}{4}$

i) $x^2 + y^2 = 29$ j) $x^2 - y^2 = 3$

$xy = 10$ $xy = 2$

k) $x^2 + y^2 + xy = 1$ l) $x^2 - 2(y - x) = 23$

$x^2 + y^2 - x - y = 0$ $x^2 - y = 19$

m) $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 5$ n) $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 1$

$2x - y = 1$ $4x - y = 0$

o) $x^2 + y^2 + 3xy - 11 = 0$ p) $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 1$

$x^2 + y^2 - xy = 3$ $3xy + y = 2x$

r) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ s) $| 2x - 3 | = 7$

$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ $5x^2 - 7y^2 = 90$

t) $| x + y | = 4$ u) $| 3x - y | = 13$

$| x - y | = 4$ $| 2x - 5y | = 4$

7.11 Eşitsizlikler

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c > 0; \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0; \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

biçimindeki açık önermelere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir. Eşitsizliği sağlayan x gerçek sayılarının kümesine **eşitsizliğin çözüm** (doğruluk) **kümesi**, çözüm kümesini bulma işlemine de **eşitsizliği çözme** denir.

İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir eşitsizliği çözmek demek, $f(x) = ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin işaretini inceleyerek eşitsizliği sağlayan aralığı bulmak demektir.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin,

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] \qquad (1)$$

veya

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}] \qquad (2)$$

biçiminde yazılabileceğini daha önce görmüştük. Buna göre $f(x)$ üçterimlisinin işareti a ile köşeli parantez içindeki ifadenin işaretine bağlıdır.

1. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise;

$$\frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0 \quad oxve \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad oxiin \quad (x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$$

olacağından (2) bağıntısında köşeli parantezin içindeki ifade $\forall x \in \mathbb{R}$ için pozitif olur. Bu durumda $f(x)$ üçterimlisinin işareti a'nın işaretinin aynısıdır. Yani;

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

olur.

Bu durum aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. İnceleyiniz.

x					
$f(x) = ax2 + bx + c$	$\Delta < 0$	$a > 0$	+	+	+
		$a < 0$	-	-	-

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise (1) bağıntısı,

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$$

biçimini alır. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$ olduğundan, $f(x)$ üçterimlisi $x=-\frac{b}{2a}$ için sıfır x in diğer bütün değerleri için a'nın işaretinin aynısıdır. Yani;

$$x=-\frac{b}{2a} \quad oxiin \quad f(-\frac{b}{2a})=0$$

$$x \neq -\frac{b}{2a} \quad oxiin \quad \begin{cases} a>0 \Rightarrow f(x)>0 \\ a<0 \Rightarrow f(x)<0 \end{cases}$$

'dır.

Bu durum aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. İnceleyiniz.

x				$x=-\frac{b}{2a}$	
$f(x)$	$\Delta=0$	$a>0$	+	$\circ$	+
		$a<0$	-	$\circ$	-

3. $\Delta=b^2-4ac>0$ ise,

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin birbirinden farklı gerçek iki kökü vardır. Bu kökleri x_1, x_2 ile gösterelim ve $x_1<x_2$ olsun. Bu durumda (1) bağıntısı,

$$\begin{aligned} f(x)=ax^2+bx+c &= a(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) \\ &= a(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) \qquad (3) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

değerleri (3) bağıntısında yerlerine yazılırsa,

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

olur.

a) $x<x_1<x_2$ ise;

$$\left.\begin{array}{l} x<x_1 \Rightarrow (x-x_1)<0 \\ x<x_2 \Rightarrow (x-x_2)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)>0$$

olur.

Bu durumda, $f(x)$ üçterimlisinin işareti, a'nın işaretinin aynısıdır. Yani;

$$a>0 \Rightarrow f(x)>0$$

$$a<0 \Rightarrow f(x)<0$$

'dır.

b) $x_1 < x < x_2$ ise;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x \Rightarrow (x - x_1) > 0 \\ x < x_2 \Rightarrow (x - x_2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) < 0$$

olur.

Bu durumda, $f(x)$ üçterimlisinin işareti, a'nın işaretinin tersidir. Yani;

$$a > 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$a < 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

dır.

c) $x_1 < x_2 < x$ ise;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x \Rightarrow (x - x_1) > 0 \\ x_2 < x \Rightarrow (x - x_2) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) > 0$$

olur. Bu durumda, $f(x)$ üçterimlisinin işareti, a'nın işaretinin aynısıdır; yani,

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

olur.

d) $f(x)$ üçterimlisi x_1 ve x_2 için sıfır değerini alır.

Yukarıda öğrendiklerimizi aşağıdaki tabloda gösterebiliriz.

x				x_1		x_2	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\Delta > 0$	$a > 0$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
		$a < 0$	-	$\circ$	+	$\circ$	-

Öğrendiklerimizi kısaca özetleyecek olursak;

1. $\Delta < 0$ ise, $\forall x \in \mathbb{R}$ için üçterimlinin işareti a'nın işaretinin aynısıdır.
2. $\Delta = 0$ ise, x'in $x = -\frac{b}{2a}$ dan başka tüm değerleri için üçterimlinin işareti a'nın işaretinin aynısıdır.
3. $\Delta > 0$ ise, ikinci dereceden üçterimlinin işareti, köklerin dışında a'nın işaretinin aynısı, köklerin arasında a'nın işaretinin tersidir.

Örnekler:

1. $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$ ikiterimlisinin işaretini inceleyelim.

$f(x) = ax + b = a(x + \frac{b}{a})$ ikiterimlisinin kökü $-\frac{b}{a}$ dır.

a) $x < -\frac{b}{a} \Rightarrow (x + \frac{b}{a}) < 0$ olacağından, ikiterimlinin işareti a'nın işaretinin tersidir; yani,

$$a < 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$a > 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

olur.

b) $x > -\frac{b}{a} \Rightarrow (x + \frac{b}{a}) > 0$ olacağından, ikiterimlinin işareti a'nın işaretinin aynısıdır.

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

'dır.

Bu durumlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. İnceleyiniz.

x			$-\frac{b}{a}$	
$f(x) = ax + b$	$a > 0$	-	$\circ$	+
	$a < 0$	+	$\circ$	-

2. $f(x) = 2x - 5$ ikiterimlisinin işaretini inceleyelim.

$$\begin{aligned} 2x - 5 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x = 5 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

ikiterimlinin bir köküdür.

$x < \frac{5}{2}$ için ikiterimli $a = 2 > 0$ ile ters işaretli,

$x > \frac{5}{2}$ için ikiterimli $a = 2 > 0$ ile aynı işaretlidir.

Aşağıdaki işaret tablosunu inceleyiniz.

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f(x) = 2x - 5$		-	$\circ$	+	

3) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ üçterimlisinin işaretini inceleyelim.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.3.7 = -59 < 0$ olduğundan,

$f(x)$ üçterimlisinin işareti a'nın işaretine bağlıdır. $a = 3 > 0$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için üçterimlinin işareti daima pozitiftir.

x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x) = 3x^2 - 5x + 7$		+	+	+	

4) $f(x) = -16x^2 + 8x - 1$ üçterimlisinin işaretini inceleyelim.

$\Delta = 8^2 - 4.(-1)(-16) = 0$ olduğundan,

üçterimli $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-32} = \frac{1}{4}$ için sıfır x in diğer bütün değerleri için $a = -16 < 0$ ın işaretinin aynısıdır.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x) = -16x^2 + 8x + 1$		-	$\circ$	-	

5) $f(x) = 2x^2 + x - 6$ üçterimlisinin işaretini inceleyelim.

$\Delta = 1^2 - 4.2.(-6) = 49 > 0$ olduğundan,

$2x^2 + x - 6 = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır.

Bunlar,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 7}{4} = -2$$

dır.

O halde, üçterimli kökler arasında $a = 2 > 0$ ile ters işaretli, kökler dışında aynı işaretlidir.

Üçterimlinin işaret tablosu aşağıdadır. İnceleyiniz.

x	$-\infty$		-2		3/2		$+\infty$
$f(x) = 2x^2 + x - 6$		+	○	-	○	+	

6) $\frac{3}{2}x + 5 < 1 + \frac{1}{2}x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x + 5 < 1 + \frac{1}{2}x \quad &\Rightarrow \quad \frac{3x+10}{2} < \frac{2+x}{2} \\
&\Rightarrow \quad 3x + 10 < 2 + x \\
&\Rightarrow \quad 3x - x < 2 - 10 \\
&\Rightarrow \quad 2x < -8 \\
&\Rightarrow \quad x < -4
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$\frac{3}{2}x + 5 < x + \frac{1}{2}x$		-	○	+	
	çözüm				

Çözüm kümesi, Ç =

$$\{x \mid -\infty < x < -4 \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R}\}$$

dır.

7. $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminde,

$\Delta = (-4)^2 - 4.1.3 = 4 > 0$ olduğundan, kökler $x_1 = 1, x_2 = 3$ tür. Üçterimlisinin işareti aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$		+	○	-	○	+	
	çözüm						çözüm

Eşitsizliğin çözüm kümesi, Ç =

$$\{x \mid -\infty < x \leq 1 \quad \vee \quad 3 \leq x < \infty, \quad x \in \mathbb{R}\}$$

dır.

8. $(3x+5)(x^2 - 8x + 7) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım. $A(x)$ ve $B(x)$ birer polinom olmak üzere $A(x).B(x)$ biçimindeki bir çarpımın işaretini belirlemek için önce her çarpanın ayrı ayrı işareti bulunur. Bunlar bir tabloda alt alta yazılır ve çarpanların işaretlerinin çarpımı, çarpımın işaretini verir.

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x = 7$$

x	$-\infty$		-5/3		1		7		$+\infty$
$3x + 5$		-	○	+		+		+	
$x^2 - 8x + 7$		+		+	○	-	○	+	
$(3x+5)(x^2 - 8x + 7)$		-		+		-		+	

Eşitsizliğin çözüm kümesi, Ç =

$$\{x \mid -\infty < x < -\frac{5}{3} \quad \vee \quad 1 < x < 7, x \in \mathbb{R}\}$$

olur.

9. $\frac{-6x^2+11x-4}{3x^2+4x-15} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$B(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{A(x)}{B(x)}$ ile $A(x).B(x)$ in işaretleri aynıdır. Bir eşitsizliğin paydasını sıfır yapan $x \in \mathbb{R}$ değerleri, eşitsizliğin çözüm kümesinin elemanı olamaz. Çünkü, bu değerler için eşitsizlik tanımsızdır. Bunu belirtmek için sonuçta paydanın köklerinin altına $\|$ simgesini koyacağız.

$$-6x^2 + 11x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = \frac{4}{3}$$

$$3x^2 + 4x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = \frac{5}{3}$$

x	$-\infty$		-3		1/2		4/3		5/3		$+\infty$
$-6x^2+11x-4$		-		-	○	+	○	-		-	
$3x^2+4x-15$		+	○	-		-		-		+	
$\frac{-6x^2+11x-4}{3x^2+4x-15}$		-		+		-		+		-	

Eşitsizliğin çözüm kümesi, Ç =

$$\{x \mid -\infty < x < -3 \vee \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{3} \vee \frac{5}{3} < x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$$

olur.

10. $\frac{5x-8}{4x+5} > \frac{2(x-7)}{4x^2+17x+15}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$$\frac{5x-8}{4x+5} > \frac{2(x-7)}{4x^2+17x+15} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x-8}{4x+5} - \frac{2x-14}{(4x+5)(x+3)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5(x^2+x-2)}{(4x+5)(x+3)} > 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = 1$$

$$(4x+5)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x+5 = 0 \vee x+3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = -\frac{5}{4} \vee x = -3$$

x	$-\infty$		-3		-2		$-\frac{5}{4}$		1		$+\infty$
$5(x^2+x-2)$		+		+	○	-		-	○	+	
$(4x+5)(x+3)$		+	○	-		-	○	-		+	
$\frac{5(x^2+x-2)}{(4x+5)(x+3)}$		+		-		+		-		+	
		çözüm				çözüm				çözüm	

Eşitsizliğin çözüm kümesi,

Ç =

$$\{x \mid -\infty < x < -3 \vee -2 < x < -\frac{5}{4} \vee 1 < x < +\infty, x \in \mathbb{R}\}$$

olur.

11. $\frac{(x^2-7x+12)(x^2-6x+5)}{(-x^2-x+2)(x^2-9)} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım. Bu eşitsizliğin çözüm kümesini önceki örneklerimizde olduğu gibi işaret tablosu yardımıyla bulabiliriz. Daha pratik olarak aşağıdaki yöntemle de bulunabilir.

$A(x), B(x)$ ve $C(x)$ birer polinom olmak üzere, $A(x).B(x).C(x)$ veya $\frac{A(x).B(x)}{C(x)}$ biçimindeki ifadelerin işaretlerini incelerken önce $A(x) = 0, B(x) = 0,$ ve $C(x) = 0$ polinom denklemin gerçek kökleri, küçükten büyüğe doğru tabloya yerleştirilir. $A(x), B(x)$ ve $C(x)$ polinomlarının en büyük dereceli terimlerinin katsayılarının işaretlerinin çarpımı, tabloda en büyük kökün sağına yazılır. Tablo, sola doğru tek katlı köklerde işaret değiştirerek; çift katlı köklerde işaret değiştirmeden devam eder.

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 5$$

$$-x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 1$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = 3$$

Burada 1 ve 3 iki kez elde edildiğinden çift katlı köktür. Polinomların en büyük dereceli terimleri $(x^2), (x^2), (-x^2), (x^2)$ nin katsayılarının işaretleri çarpımı (+)(+)(-)(+)=(-) olduğundan, tabloda en büyük kök 5'in sağındaki işaret (-) dir.

15 x	$-\infty$		-3		-2		1		3		4		5		$+\infty$
$\frac{x^2-7x+12)(x^2-6x+5)}{(-x^2-x+2)(x^2-9)}$		-		+		-		-		-		+		-	

Ç =

$$\{x \mid -3 < x < -2 \quad \vee \quad 4 \leq x \leq 5, x \in R\}$$

olur.

7.12 *Eşitsizlik Sistemleri*

Aynı zamanda gerçeklenen birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme bir **eşitsizlik sistemi** denir. Sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin arakesitine de eşitsizlik sisteminin **çözüm kümesi** denir.

Örnekler:

1. $4x + \frac{5}{2} > 2x - 7$,
   $\frac{3x-1}{2} < x + 1$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım:

$$\begin{aligned} 4x + \frac{5}{2} > 2x - 7 \quad &\Rightarrow \quad 4x - 2x > -7 - \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow \quad 2x > -\frac{19}{2} \\ &\Rightarrow \quad x > -\frac{19}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{2} < x + 1 \quad &\Rightarrow \quad 3x - 1 < 2x + 2 \\ &\Rightarrow \quad 3x - 2x < 2 + 1 \\ &\Rightarrow \quad x < 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{19}{4}$		3		$+\infty$
$4x + \frac{5}{2} > 2x - 7$		-	○	+		+	
$\frac{3x-1}{2} < x + 1$		-		-	○	+	
				çözüm			

Ç =

$$\{x \mid -\frac{19}{2} < x < 3, x \in R\}$$

olur.

2. $x^2 + 2x - 8 > 0$
   $x^2 - 4x + 3 < 0$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım:

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = 2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x = 3$$

	$-\infty$		-4		1		2		3		$+\infty$
$x^2 + 2x - 8$		+	○	-		-	○	+		+	
$x^2 - 4x + 3$		+		+	○	-		-	○	+	
								çözüm			

Ç =

$$\{x \mid 2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$$

olur.

3. $(3m + 1)x^2 - 2(4m + 1)x + 6m + 1 = 0$ denkleminin pozitif işaretli iki kökü olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulalım.

$$\Delta > 0, \quad \frac{c}{a} > 0 \quad \wedge \quad \frac{-b}{a} > 0$$

eşitsizliklerini aynı zamanda doğrulayan m nin değerlerini bulmamız gerekir.

$$\begin{aligned}\Delta &= [-2(4m+1)]^2 - 4(6m+1)(3m+1) \\ &= -4m(m+2)\end{aligned}$$

diskriminantın kökleri $m_1 = 0, m = -2$

$$\frac{c}{a} = \frac{6m+1}{3m+1} > 0$$

$$6m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{6}$$

$$3m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{2(4m+1)}{3m+1} > 0$$

$$4m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

$$3m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

m	$-\infty$		-2		-1/3		-1/4		-1/6		0		$+\infty$
$-4m(m+2)$		-	○	+		+		+		+	○	-	
$\frac{6m+1}{3m+1}$		+		+		-		-	○	+		+	
$\frac{2(4m+1)}{3m+1}$		+		+	○	-	○	+		+		+	
				çözüm						çözüm			

Ç =

$$\{m \mid -2 < m < -\frac{1}{3} \vee -\frac{1}{6} < m < 0, m \in \mathbb{R}\}$$

olur.

Örnek 7.6.

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $-6x + 7 < 2x - 9$ b) $\mid \frac{3}{2}x + 6 \mid \geq 3$

   c) $10 + \frac{4}{3}x \leq -\frac{7}{8} + 5$ d) $19 + \frac{2}{3}x \leq 9 + \frac{1}{3}x$
2. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $x^2 - 3x - 4 < 0$ b) $x^2 + 5x + 6 > 0$

   c) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ d) $x^2 + 2x - 1 \leq 0$

   e) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ f) $-3x^2 - 6x + 4 \leq 0$

   g) $-x^2 - 2x - \frac{6}{5} < 0$ h) $6x^2 - 11x + 3 > 0$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $6x^2 + 8 < 2 - 13x$ b) $\frac{2(6x+13)}{6x^2-25x+14} < \frac{3x+4}{2-3x}$

c) $\frac{5x-3}{3x+8} > \frac{2x-1}{x+2}$ d) $\frac{1}{x^2+2x-3} > \frac{1}{x^2-3x-10}$

e) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8} < 0$ f) $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x-21} > \frac{x^2-4x-21}{x^2-8x+15}$

g) $x^2 - 10x + 12 < 9x^2$ h) $\frac{(x^2+x-12)(9-x^2)(1-x)}{(x^2-x-12)(x^2-4)} > 0$

4. $(2m-3)x^2 + (5m-7)x + 3m - 2 = 0$ denkleminin köklerinin varlığını ve sayısını m'nin alacağı değerlere göre inceleyiniz.

5. $(2m+1)x^2 - 4(m+3)x + 2(2m+3) = 0$ denkleminin gerçek köklerinin olmaması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

6. Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $4x + \frac{5}{2} > 2x - 7$, $\frac{3x-1}{2} < x + 1$

b) $\frac{5x-1}{3} < 0$, $15x^2 - 34x + 15 < 0$

c) $x^2 - 2x - 3 < 0$, $x^2 + x - 2 > 0$

d) $x^2 - 4x < 5$, $x^2 + 3x > 10$

e) $15x^2 - 8x + 1 < 0$, $8x^2 - 6x + 1 \geq 0$

f) $(3x^2 - 8x + 3)^2 < 4(x^2 - 3x - 2)^2$, $4(x^2 - 5x)^2 > 9(x^2 + 4)^2$

g) $6x^2 - 19x + 10 < 0$, $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, $2x^2 - 9x + 9 \leq 0$

h) $(4x-5)^2 > 9(x-1)^2$, $(5x-13)^2 > (3x-7)^2$, $\frac{3}{2x+7} < \frac{1}{x+2}$

7. $(2m-1)x^2 - 2(2m+1)x + 2m - 3 < 0$ eşitsizliğinin daima doğru olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

8. $(m+1)x^2 + 2(2m-1)x + 2m - 1 < 0$ eşitsizliğinin daima doğru olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

9. $(m+1)x^2 + (3m+1)x + 2m + 2 > 0$ eşitsizliğinin daima doğru olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

10. $(2m+1)x^2 - 2(2m+1)x + 4m + 3 > 0$ eşitsizliğinin daima doğru olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

11. $(2m-1)x^2 - 2(2m+1)x + 3m + 5 = 0$ denkleminin ters işaretli iki kökü olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

12. $(1+m)x^2 - 2(2m+5)x + 3m + 5 = 0$ denkleminin ters işaretli iki kökü olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

13. $(4m+1)x^2 - 2(2m-1)x + 3m + 1 = 0$ denkleminin pozitif işaretli iki kökü olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

14. $(3m-4)x^2 - 2(5m-1)x + 5m - 1 = 0$ denkleminin pozitif işaretli iki kökü olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

15. $(2m+1)x^2 - (5m+4)x + 4m = 0$ denkleminin negatif işaretli iki kökü olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

16. $(2m-3)x^2 - 2(3m-4)x + 5m - 6 = 0$ denkleminin negatif işaretli iki kökü olması için m'nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR

$a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlara $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonlar** denir. Bu tür fonksiyonlar,

$$f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \Rightarrow ax^2 + bx + c$$

veya

$$f = \{(x,y) \mid y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c, x \in \mathbb{R} \quad oxve \quad a \neq 0\}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $f(x)$ üçterimlisinin katsayıları olan $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ nin farklı değerleri için değişik fonksiyonlar elde edilir.

Örneğin:

1) $a = -2, b = 3$ ve $c = 1$ ise $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$

2) $a = \sqrt{3}, b = 0$ ve $c = 3$ ise $f(x) = \sqrt{3}x^2 + 3$

3) $a = 1, b = 5$ ve $c = 0$ ise $f(x) = x^2 + 5x$

4) $a = 4, b = 0$ ve $c = 0$ ise $f(x) = 4x^2$

olur.

Bu bölümde ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiklerini çizeceğiz.

$$f = \{(x,y) \mid y = ax^2 + bx + c, a, b, c, x \in \mathbb{R} \quad oxve \quad a \neq 0\}$$

kümesinin elemanları olan ikililere analitik düzlemde karşılık gelen noktalara f **fonksiyonunun grafiği** denir. İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafikleri **parabol** denen eğrilerdir.

$$f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

fonksiyonunda $b = 0$ ve $c = 0$ alınırsa,

$$f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2$$

fonksiyonu elde edilir. *Bu fonksiyonun grafiğini çizelim.*
$y = f(x) = ax^2$ fonksiyonunda x'in her değeri için y'nin aldığı değerler hesaplanabilir. x'in aldığı değişik değerlere karşılık y nin alacağı değerleri gösteren bir tablo yapalım. Buna fonksiyonun değişim tablosu diyeceğiz.
Tablodaki (x, y) ikililerine analitik düzlemde karşılık gelen noktalar yardımıyla f fonksiyonunun grafiği kabaca çizilir.
1. $a > 0$ ise;

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$y = f(x) = ax^2$	$+\infty$	$\searrow$	4a	$\searrow$	a	$\searrow$	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	4a	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $y = f(x) = ax^2 \geq 0$ olduğundan, parabolün kolları OY ekseninin pozitif yönündedir ve fonksiyonun aldığı en küçük değer $x = 0$ için $y = 0$ dır. Buna göre fonksiyonun görüntü kümesi o$xf(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olur. Bu durumda (0,0) noktası parabolün en alt noktasıdır. Bu noktaya **parabolün tepesi** denir.
2. $a < 0$ ise;

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$y = f(x) = ax^2$	$-\infty$	$\nearrow$	4a	$\nearrow$	a	$\nearrow$	0	$\searrow$	a	$\searrow$	4a	$\searrow$	$-\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $y = f(x) = ax^2 \leq 0$ olduğundan, parabolün kolları OY ekseninin negatif yönündedir ve fonksiyonun aldığı en büyük değer $x = 0$ için $y = 0$ dır. Buna göre fonksiyonun görüntü kümesi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ dır. Eğrinin en yüksek noktası olan (0,0) noktasının **parabolün tepesi** olduğunu gördünüz mü?
$y = ax^2$ fonksiyonunun *değişim tablosunu* inceleyiniz.
Burada,

$$x = \pm 1 \quad oxiin \quad y = a$$

$$x = \pm 2 \quad oxiin \quad y = 4a$$

olduğunu görürüz. $(-1, a)$ ile $(1, a)$ ve $(-2, a)$ ile $(2, a)$ noktaları OY eksenine göre simetrik midir? Genel olarak x'in aldığı $(-c)$ ve (c) değerlerine y'nin aynı $(y = ac^2)$ değeri karşılık gelir. Bu da bize $(-c, ac^2)$ ve (c, ac^2) noktalarının OY eksenine göre simetrik olduğunu gösterir. O halde, OY ekseni $(x = 0$ doğrusu$)$ fonksiyonun grafiğinin (parabolün) **simetri eksen**idir.
Örnekler:
1. $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$ ve $a = 2$ için $y = ax^2$ kuralı ile tanımlanmış fonksiyonların grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.
Aşağıdaki Şekilden görüldüğü gibi, $a > 0$ için,

- a büyüdükçe parabolün kolları OY eksenine yaklaşır,

- a küçüldükçe parabolün kolları OY ekseninden uzaklaşır.

2. $y = -\frac{1}{2}x^2; y = -x^2; y = -2x^2$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

$a < 0$ için;

- a büyüdükçe parabolün kolları OY ekseninden uzaklaşır,
- a küçüldükçe parabolün kolları OY eksenine yaklaşır.

Örnek 7.7.

1. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

   a) $y = 4x^2$ b) $y = -4x^2$ c) $y = \frac{1}{4}x^2$

   d) $y = -\frac{1}{4}x^2$ e) $y = \frac{1}{5}x^2$ f) $y = \frac{2}{3}x^2$

2. $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiğinin aşağıdaki noktalardan geçmesi için a ne olmalıdır.

   a) $(-1, 1)$ b) $(1, 2)$ c) $(-2, \frac{3}{4})$

   d) $(2, 4)$ e) $(3, 9)$ f) $(-3, -3)$

3. Aşağıdaki noktalardan, $y = \frac{3}{4}x^2$ fonksiyonun grafiği üzerinde olanları bulunuz.

   a) $(-1, \frac{3}{2})$ b) $(2, 3)$ c) $(3, \frac{3}{4})$ d) $(1, \frac{3}{4})$

4. $\{-3, -1, 0, \frac{1}{3}, 3\}$ kümesinin, $f : R \Rightarrow R, f(x) = 3x^2$ fonksiyonundaki görüntü kümesini bulunuz.

5. $A = \{x :\mid x \mid < 3, x \in \mathbb{R}\}$ ise, $f : A \Rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$\mathbf{f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c}$ Fonksiyonunun Grafiği

Bu tür fonksiyonların grafiklerinin parabol denen eğriler olduğunu biliyoruz. İkinci dereceden bir değişkenli bir fonksiyonun grafiğini çizebilmek için yapılması gerekli işlemleri aşağıdaki biçimde sıralayabiliriz.

- Parabolün tepe noktasının koordinatları bulunur.
- Parabolün koordinat eksenlerini kestiği noktaların (varsa) koordinatları bulunur.
- Fonksiyonun değişim tablosu yapılır.
- Değişim tablosundan yararlanarak fonksiyonun grafiği çizilir.

1.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (I)$$

fonksiyonu,

$$\begin{aligned} y &= a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}] \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

ya da

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$$

biçiminde yazılabilir.

$$x + \frac{b}{2a} = x_1 \quad oxve \quad y - \frac{4ac - b^2}{4a} = y_1 \qquad (II)$$

dersek, verilen fonksiyon,

$$y_1 = ax_1^2$$

biçimini alır.

$y = ax^2$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerinin tepe noktası $(0, 0)$ olan bir parabol olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$x_1 = 0 \quad oxve \quad y_1 = 0$$

değerleri (II) eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \quad oxve \quad y - \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

ya da

$$x = -\frac{b}{2a} \quad oxve \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

olur. Bu da bize $y_1 = ax_1^2$ fonksiyonunun grafiğinin, tepe noktası ox$(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}, \frac{\mathbf{4ac-b^2}}{\mathbf{4a}})$ olan bir parabol olduğunu gösterir.
Denklemi $y = ax^2$ olan parabolün simetri ekseninin $x = 0$ doğrusu olduğunu görmüştük. Buna göre $x_1 = 0$ değerini (II) eşitliğinde yerine yazarsak $\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} = \mathbf{0}$ veya $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$ doğrusu da denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olan parabolün **simetri ekseni** olur.
$a > 0$ ise, grafiğin kolları OY eksininin pozitif yönünde olacağından parabolün tepe noktası en alt noktasıdır. Tepe noktasının ordinatı olan $\frac{4ac-b^2}{4a}$ sayısı da görüntü kümesinin **en küçük** elemanıdır.
$a < 0$ ise; grafiğin kolları OY ekseninin negatif yönünde olacağından parabolün tepe noktası en üst noktasıdır ve tepe noktasının ordinatı olan $\frac{4ac-b^2}{4a}$ sayısı da görüntü kümesinin **en büyük** elemanıdır.
2. Grafiğin OX eksenini kestiği noktalarda $y = 0$ olduğundan,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

olur.
$b^2 - 4ac > 0$ ise, grafik, OX eksinini $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ gibi iki noktada keser.
$b^2 - 4ac = 0$ ise, grafik Ox eksenine teğettir.
$b^2 - 4ac < 0$ ise, grafik Ox eksenini kesmez.
Grafiğin OY eksenini kestiği noktada $x = 0$ olacağından $y = c$ olur. Buna göre grafik OY eksenini $(0, c)$ noktasında keser.
3. $a > 0$ ise;
$\forall x \in \mathbb{R}$ için $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ dır.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$
			Tepe noktası		

$a < 0$ ise;
$\forall x \in \mathbb{R}$ için $a(+\frac{b}{2a})^2 \leq 0$ dır.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$
			Tepe noktası		

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

ifadesinde,

$$r = -\frac{b}{2a} \quad oxve \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

diyecek olursak,
Parabolün denklemi $y = a(x-r)^2 + k$ ve tepe noktası ise $T(r,k)$ olur.

Örnekler:

1. $y = x^2 - 8x + 12$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Grafiğin tepe noktasının koordinatları,

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2} = 4$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4.1.12 - (-8)^2}{4.1} = -4$$

Eğirinin OX eksinini kestiği noktalar,
$y = 0$ için,

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 2 \vee x = 6$$

$$(2,0) \quad oxve \quad (6,0)$$

dır.
Eğrinin OY eksinini kestiği nokta,
$x = 0$ için $y = 12$

$$(0,12)$$

dir.

x	$-\infty$		0		2		4		6		$+\infty$
$y = x^2 - 8x + 12$	$+\infty$	$\searrow$	12	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. $y = f(x) = \frac{-1}{3}x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Eğrinin tepe noktasının koordinatları,

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-\frac{1}{3})} = 3$$

$r = 3$ değeri, verilen fonksiyonda x yerine yazılırsa, tepe noktasının ordinatı bulunur.

$$k = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{1}{3}.3^2 + 2.3 + 3 = 6$$

olur.
Eğrinin eksenleri kestiği noktalar,

$$y = 0 \quad oxiin,$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 3 - 3\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 3 + 3\sqrt{2}$$

$$(3 - 3\sqrt{2}, 0) \quad oxve \quad (3 + 3\sqrt{2}, 0)$$

dır.

$x = 0$ için $y = 3$

olur. Eğri $(0, 3)$ noktasından geçer.

x	$-\infty$		$3-3\sqrt{2}$		0		3		$3+3\sqrt{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	6	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. $y = x^2 + 4x + 4$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Eğirinin tepe noktasının koordinatları,

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$k = (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0$$

olur.

Eğrinin eksenleri kestiği noktalar,

$$y = 0 \quad oxiin \quad x^2 + 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = -2$$

$$x = 0 \quad oxiin \quad y = 4$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

4. $y = -(x-2)^2 + 4$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Parabolün tepe noktasının koordinatları,

$$y = a(x-r)^2 + k$$

ifadesinden

$$r = 2 \quad oxve \quad k = 4$$

olarak bulunur.
Parabolün eksenleri kestiği noktalar,
$y = 0$ için,

$$\begin{aligned} -(x-2)^2 + 4 = 0 &\implies (x-2)^2 = 4 \\ &\implies x - 2 = \pm 2 \\ &\implies x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

$x = 0$ için $y = 4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

5. OX eksinini $A(2,0)$ ve $B(6,0)$ noktalarında, OY eksinini $C(0,12)$ noktasında kesen parabolün denklemini bulalım.
$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği (parabol) A, B ve C noktalarından geçtiğine göre bu noktaların koordinatları parabol denklemini sağlamalıdır.
(1) $A(2,0)$ için $a.2^2 + b.2 + c = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$
(2) $B(6,0)$ için $a.6^2 + b.6 + c = 0 \Rightarrow 36a + 6b + c = 0$
(3) $C(0,12)$ için $a.0^2 + b.0 + c = 12 \Rightarrow c = 12$
(1) ve (2) den,

$$\begin{aligned} 4a + 2b + 12 = 0 \Rightarrow &\quad 2a + b + 6 = 0, \\ 36a + 6b + 12 = 0 \Rightarrow &\quad \mp 6a \mp b \mp 2 = 0 \\ \hline &\quad -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

ve

$$2a + b + 6 = 0 \Rightarrow b = -8$$

bulunur. Parabolün denklemi ise,

$$y = x^2 - 8x + 12$$

olur.

6) Tepe noktası $T(-1,-2)$ olan ve $A(-2,1)$ noktasından geçen parabolün denklemini bulalım.

Parabolün tepe noktasının $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$-\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a \tag{1}$$

$$\frac{4ac-b^2}{4a} = -2 \Rightarrow 4ac - b^2 = -8a \tag{2}$$

$$4ac - b^2 = -8a \wedge b = 2a \Rightarrow 4ac - 4a^2 + 8a = 0 \tag{3}$$

Parabol A noktasından geçtiğine göre, A noktasının koordinatları parabol denklemini sağlar.

$$a(-2)^2 + b(-2) + c = 1 \Rightarrow 4a - 2b + c = 1$$

$$4a - 2b + c = 1 \wedge b = 2a \Rightarrow c = 1$$

olur.

$$\begin{aligned} 4ac - 4a^2 + 8a = 0 \wedge c = 1 \quad &\Rightarrow \quad 4a - 4a^2 + 8a = 0 \\ &\Rightarrow \quad -4a^2 + 12a = 0 \\ &\Rightarrow \quad a = 0 \vee a = 3 \end{aligned}$$

$a = 0$ olamaz. Çünkü, denklem parabol denklemi olamaz.

$$a = 3 \wedge b = 2a \Rightarrow b = 6$$

bulunur.

İstenen parabol denklemi ise,

$$y = 3x^2 + 6x + 1$$

dir.

7. $y = (2m-3)x^2 - (m+5)x + 3m + 4$ fonksiyonunun grafiğinin $A(1,8)$ noktasından geçmesi için m'nin alacağı değeri bulalım. $A(1,8)$ noktası eğri üzerinde bulunduğundan, bu noktanın koordinatları eğri denklemini sağlar. O halde,

$$8 = (2m-3)1^2 - (m+5).1 + 3m + 4 \quad \Rightarrow \quad 4m - 4 = 8$$
$$\Rightarrow \quad m = 3$$

bulunur.

8. $y = (m-2)x^2 - 2mx + m + 2$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanının (-2) olması için m'nin alacağı değeri bulalım ve m'nin değerini yerine yazarak elde edeceğimiz parabolün grafiğini çizelim.

Görüntü kümesinin en küçük (veya en büyük) elemanı tepe noktasının ordinatıdır.

Buna göre; $\frac{4ac-b^2}{4a} = k$ dan,

$$\frac{4(m+2)(m-2) - 4m^2}{4(m-2)} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4m^2 - 16 - 4m^2}{4(m-2)} = -2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{-4}{m-2} = -2$$
$$\Rightarrow \quad m = 4$$

bulunur. Parabolün denklemi ise,

$$y = 2x^2 - 8x + 6$$

olur.

Parabolün tepe noktasının koordinatları,

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2.2} = 2$$
$$k = f(2) = 2.2^2 - 8.2 + 6 = -2$$

Parabolün eksenleri kestiği noktalar,

$x = 0$ için $y = 6$

$y = 0$ için $2x^2 - 8x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1 \vee x = 3$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	6	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

9. $y = mx^2 - 2(m-1)x + m - 3$ fonksiyonunun grafiğinin OX eksenine teğet olması için m'nin alacağı değeri hesaplayalım ve m'nin

bulduğumuz değerini yerine yazarak, fonksiyonunun grafiğini çizelim.
Fonksiyonun grafiğinin OX eksenine teget olması için $\Delta = 0$ olmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned}[-2(m-1)]^2 - 4m(m-3) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4m+4=0 \\ &\Rightarrow \quad m=-1\end{aligned}$$

bulunur. Ohalde, parabolün denklemi

$$y = -x^2 + 4x - 4$$

olur. Parabolün tepe noktasının koordinatları:

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

$$k = f(2) = 0$$

Parabolün eksenleri kestiği noktalar:
$x = 0$ için $y = -4$
$y = 0$ için $-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$

x	$+\infty$		0		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Örnek 7.8.

1. $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

   a) $y = x^2 - 4$ b) $y = 2x^2 + 3x$
   c) $y = x^2 + 2$ d) $y = -4x^2 + 1$
   e) $y = -x^2 + 4x$ f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

2. $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = (x-2)^2$ b) $y = -2(x+3)^2$
c) $y = (6x+1)^2$ d) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$
e) $y = x^2 - 7x + 10$ f) $y = -x^2 + 4x - 3$
g) $y = 6x^2 - 5x + 1$ h) $y = -2x^2 + 8x - 5$
k) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$ l) $y = -(x + \frac{3}{2})^2 - 2$
m) $y = -2(x-3)^2 + 2$ n) $y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 10$

3. Aşağıda tepe noktası T ile üzerindeki bir A noktası verilen parabollerin denklemini yazınız.

   a) $T(6,1)$, $A(0,-8)$ b) $T(-3,4)$ $A(-2,9)$
   d) $T(2,1)$, $A(5,19)$ c) $T(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ $A(-1,-5)$

4. Aşağıdaki noktalardan geçen parabollerin denklemlerini yazınız.

   a) $A(-1,0), B(3,0), C(0,3)$ b) $A(-1,0), B(1,0), C(0,-1)$
   c) $A(-3,4), B(0,-2), C(3,4)$ d) $A(-2,2), B(1,5), C(4,2)$

5. Tepe noktası $T(1,8)$ olan ve $A(0,17)$ noktasından geçen parabolün denklemini bulunuz ve grafiğini çiziniz.

6. $y = x^2 - 2(m-1)x + m(m-1) - 1$ fonksiyonunun grafiğinin OX eksenine teğet olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

7. $y = 2mx^2 + 4mx + m + 4$ fonksiyonunun grafiğinin
   a) OX eksenine teğet olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.
   b) m'nin bulunan değerini yerine yazarak elde edeceğiniz fonksiyonun grafiğini çiziniz.

8. $y = mx^2 - 2(2m-1)x + 2m + 1$ fonksiyonunun grafiğinin
   a) $A(2,-5)$ noktasından geçmesi için m'nin alacağı değeri bulunuz.
   b) m'nin bulunan değerini yerine yazarak elde edeceğiniz fonksiyonun grafiğini çiziniz.

9. $y = (m+2)x^2 + 4mx + 2m + 3$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanının $\frac{1}{3}$ olması için $m \in \mathbf{Z}$ ne olmalıdır. m'nin bulunan değerini yerine yazarak bulacağınız fonksiyonun grafiğini çiziniz.

10. $y = -x^2 + 2mx + 4(m+1)$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en büyük elemanının (1) olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

11. $y = mx^2 - (m^2+1)x + m$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin tepe noktasının apsisinin (1) olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

12. $y = x^2 + (m-1)x - m$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin simetri eksininin $x + 1 = 0$ doğrusu olması için m'nin alacağı değeri bulunuz.

Eşitsizlik Sistemlerinin Grafikle Çözümü

Bu bölümde birinci ve ikinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerinin, grafiklerden yararlanarak analitik düzlemde nasıl gösterileceğini göreceğiz.

Bu yöntemi eşitsizliklerin grafiklerinin birer doğru veya paraboller olması durumunda uyguluyacağız.

Örnekler:

1. $y - 2x - 4 \geq 0$,
   $y - 3x - 6 \leq 0$
   eşitsizlik sistemini sağlayan noktalar kümesini analitik düzlemde gösterelim:

Önce $y - 2x - 4 = 0$ doğrusunun grafiğini çizelim.

Bu doğru düzlemi H_1 ve H_2 gibi iki yarı düzleme ayırır. H_1 yarı düzlemi içinde bir $P(-3, 0)$ noktası alalım ve bu noktanın koordinatlarının eşitsizliği sağlayıp sağlamadığına bakalım.

$0 - 2(-3) - 4 = 2 > 0$ olduğundan,

$P(-3, 0)$ noktasının içinde bulunduğu H_1 yarı düzlemi aranan bölgedir. H_1 yarı düzlemindeki bütün noktalar $y - 2x - 4 > 0$ eşitsizliğini sağlar.

Şimdi de $y - 3x - 6 = 0$ doğrusunun grafiğini, ayrı bir şekil üzerinde çizelim.

$0(0, 0)$ noktasının koordinatlarını $y - 3x - 6 < 0$ eşitsizliğinde yerlerine yazalım.

$0 - 3.0 - 6 < 0 \Rightarrow -6 < 0$ olduğundan,
$0(0,0)$ noktası $y - 3x - 6 < 0$ eşitsizliğini sağlar. Buna göre $0(0,0)$ noktasını içinde bulunduran bölge aranan bölgedir.
Yukarıdaki iki bölgenin arakesiti, eşitsizlik sistemini sağlayan noktaların kümesidir.
Her iki eşitsizliği sağlayan (noktalar kümesi) bölge, aşağıdaki grafikte koyu taranmıştır.

2. $y \leq 2 - x - x^2$,
$x + 2y + 2 > 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan noktaların kümesini analitik düzlemde gösterelim.
$y = -x^2 - x + 2$ parabolünün grafiğini çizelim.

$$\left.\begin{array}{l} r = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ k = f(-\frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) + 2 = \frac{9}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow T(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$$

$x = 0$ için $y = 2$
$y = 0$ için $-x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -2$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bu parabol düzlemi üç ayrık bölgeye ayırır. Parabolün iç bölgesindeki o(o,o) noktası için,

$$0 \leq 2 - 0 - 0 \Rightarrow 0 \leq 2$$

eşitsizliği doğrudur. Buna göre parabolün iç bölgesindeki bütün noktalar için, $y \leq 2 - x - x^2$ eşitsizliği sağlanır.
$x + 2y + 2 > 0$ eşitsizliği için o(o,o) noktasını alalım.

$$0 + 2.0 + 2 > 0 \Rightarrow 2 > 0$$

eşitsizliği doğru olduğuna göre başlangıç noktası tarafındaki yarı düzlem aranan bölgedir (kesik çizgi doğru üzerindeki noktaların çözüm kümesine ait olmadığını gösterir.)
Eşitsizlik sistemini sağlayan bölge grafikte taranarak gösterilmiştir.

3. $\begin{array}{ccc} y & > & x^2 - 1 \\ y & \geq & 2x - x^2 \end{array}$

eşitsizlik sistemini sağlayan noktaları analitik düzlemde gösterelim.

$$y = x^2 - 1 \quad oxve \quad y = 2x - x^2$$

parabollerinin grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$y = x^2 - 1$ parabolünün iç bölgesindeki o(o,o) noktası için,

$$0 > 0^2 - 1 \Rightarrow 0 > -1$$

eşitsizliği doğru olduğundan, parabolün iç bölgesindeki bütün noktalar için $y > x^2 - 1$ eşitsizliği doğrudur.
$y = 2x^2 - x^2$ parabolünün dış bölgesindeki $A(0, 1)$ noktası için,

$$1 > 2.0 - 0^2 \Rightarrow 1 > 0$$

olduğundan, bu bölgedeki bütün noktalar $y \geq 2x - x^2$ eşitsizliğini sağlar.
Buna göre, birinci parabolün iç bölgesi ile ikinci parabolün dış bölgesinin arakesiti aranan bölgedir.

Örnek 7.9.

Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerini sağlayan noktaların kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

1)	$x + 2y - 3 \geq 0$ $4y + x - 6 \geq 0$	2)	$2x + y \geq -1$ $2x + y < 4$
3)	$2x + y \geq 1$ $x - y < 3$	4)	$y < 2x + 2$ $y > 2 - 2x$
5)	$y > x^2$ $y + x < 3$	6)	$y - x^2 + 9 > 0$ $y + 1 < 0$
7)	$y \leq 4x - x^2$ $y - x > 0$	8)	$y \leq -2x^2 + x + 6$ $y > x^2 - 5x + 4$
9)	$x^2 - 3x - y - 4 \leq 0$ $5x - x^2 - y + 6 \geq 0$	10)	$y - 2x^2 - 4x - 5 \geq 0$ $y + 2x^2 + 8x + 6 < 0$

8
Büyük Sayıları Adlandırma

Okuma Parçası

En büyük sayı nedir? Googol nedir? Sentilyon nedir? Büyük sayıların adları nasıl veriliyor? Sonsuz nedir? Bu sorular, genellikle okul sıralarında öğrencilerin merak ettikleri sorulardır. İnternette küçük bir araştırma, bu merakı giderecek yanıtlarla doludur. O zahmete giremarkeyenler için, aşağıdaki derleme yararlı olabilir.

8.1 En büyük sayı nedir?

En büyük sayı yoktur. En büyük sayı diye tahayyül ettiğiniz sayıya daima 1 ekleyebilir ve böylece en büyük dediğiniz sayıdan daha büyük bir sayı elde edersiniz. Dolayısıyla en büyük sayı yoktur. Bunu, matematik diliyle şöyle ifade ederiz. Doğal Sayılar kümesimin maksimum öğesi yoktur. Doğal sayılar kümesi yerine, tam sayılar, rasyonel sayılar ya da gerçel sayılar konularak aynı sonuç ifade edilebilir.

8.2 Büyük Sayılar Nasıl Adlandırılır?

Büyük sayılar, yaygınlığı nedeniyle İngilizce adlarıyla çağrılır. Ama bu adlandırma Avrupa'da ve Amerika'da birbirlerinden farklıdır. Bu yazıda, bu farklılığın nedenini ve farklılığı yoketmek için önerilen çareleri ele alacağız.

Büyük sayıların adlandırılışı, bir çok alanda olduğu gibi, Latin kökenlidir. Örneğin, Latince 3 anlamına gelen *-tri-* sözcüğünün arkasına *-illion-* takısı eklenerek *-trillion-* sözcüğü oluşturulur. Bu kurgu *-million-* sözcüğüne bir benzetmedir. Fransız matematikçisi *Nicolas Chuquet* (1445-1488) 10^{12} sayısı için -byllion- ve 10^{18} sayısı için -tryllion- sözcüklerini kullanmıştır. Bu nedenle, büyük sayıları adlandırma sisteminin, ondan kaynaklandığı söylenir. Ancak, 1600 yıllarında Fransada 10^9 yerine -billion- ve 10^{12} yerine -trillion-

sözcükleri kullanılır olmuştur. Fransa ve Amerika bu yeni sistemi kullanmaya devam ederken İngiltere ve Almanya Chuquet sistemini kullanmayı sürdürmüştür. 1948 yılında Fransa tekrar Chuquet sistemine dönmüş ve böylece Avrupa ve Amerikan adlandırma sistemleri coğrafi olarak da ayrılmıştır. Ancak, Amerika'nın finansal üstünlüğü ağır basmaya başlayınca, büyük sayıları adlandırmada Amerikan sistemi dünyada yaygınlık kazanmaya başlamıştır. 1974 yılında İngiltere başbakanı Wilson, İngilterenin resmi raporlarında -billion- nun 10^{12} değil, Amerikan sisteminde olduğu gibi 10^9 sayısı yerine kullanılacağını açıklamıştır. Ama, bu girişim bile, Avrupa ve Amerikan sistemleri denilen iki adlandırma sistemini birleştiremarkemiştir. Birleştirme yönünde yapılan öneriler vardır. Bu önerilere geçmeden önce, Avrupa ve Amerikan sistemlerinde büyük sayıların nasıl adlandırıldığını söylemeliyiz. $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ gibi bir doğal sayı göstersin. Avrupa sisteminde büyük sayılar 10 üzeri (6n) biçiminde gruplanır. 10^{6n} sayısının adı, n sayısının Latince adına -illion- takısı eklenerek söylenir. Amerikan sisteminde takı aynıdır ama büyük sayılar 10^{3n+3} biçimindeki gruplara ayrılır. Bu nedenle, billion sayısı Avrupa sisteminde 10^{12} = 1 000 000 000 000 sayısı iken Amerikan sisteminde 10^9 = 1 000 000 000 sayısıdır. 10^9 sayısına Avrupada -milliard- ya da -bin milyon- denilmektedir.
Bu gün Amerikanın adlandırma sisteminin daha iyi olduğu söylenemeyeceği gibi, onların Avrupa sistemine dönmesi de beklenemez. Onun yerine, büyük sayıları adlandırmada, bütün ülkelerin anlaşacağı yepyeni bir sisteme gitmekte yarar vardır. Bu önerilerden birisi, büyük sayıları 10^{3n} gruplarına ayırmak, Latince sayılar yerine Yunanca sayıları kullanmaktır. Bir başka öneri de, sayılara International System of Units (SI) takısını eklemektir. Bu öneri, fiziksel bilimlerle de uyum sağlayacağı için, bilimsel açıdan daha uygun görünmektedir. Ama, bütün dünyada insanların alışkın oldukları sayı adlarını aniden değiştirmek olanaksızdır. Bu değişim, okullardan başlayıp bir iki kuşak zaman alacak bir iştir. Aşağıdaki tablo, yukarıda söylenenleri özetlemektedir.

8.3 Googol Nedir?

1 in sağına 100 tane sıfır konulunca elde edilen sayıdır. Bu sayıyı 10 üzeri 100 (10^{100}) biçiminde gösteririz. Şaka olsun diye yaratıldığı söylenir. Yukarıdaki adlandırma sistemlerinin hiç birisine uymaz. O sistemler içinde adlandırmak istersek, googol sayısı Amerikan sisteminde 10 duotrigintillion, Avrupa sisteminde 10 sexdecilliard ve Yunan tabanlı öneride 10 triacontatrillion adlarını alır. 1 in sağına googol tane sıfır koyarsak elde edeceğimiz sayıya *googolplex* denilir.

Table 8.1: Büyük Sayıları Adlandırma

n	10^{3n}	*Amerikan Sistemi*	*Avrupa Sistemi*	*SI öntakısı*	*Öneri*
3	10^{9}	billion	milliard	giga-	gillion
4	10^{12}	trillion	billion	tera-	tetrillion
5	10^{15}	quadrillion	billiard	peta-	pentillion
6	10^{18}	quintillion	trillion	exa-	hexillion
7	10^{21}	sextillion	trilliard	zetta-	heptillion
8	10^{27}	septillion	quadrillion	yotta-	oktillion
9	10^{27}	octillion	quadrilliard		ennillion
10	10^{30}	nonillion	quintillion		dekillion
11	10^{33}	decillion	quintilliard		hendekillion
12	10^{36}	undecillion	sextillion		dodekillion
13	10^{39}	duodecillion	sextilliard		trisdekillion
14	10^{42}	tredecillion	septillion		tetradekillion
15	10^{45}	quattuordecillion	septilliard		pentadekillion
16	10^{48}	quindecillion	octillion		hexadekillion
17	10^{51}	sexdecillion	octilliard		heptadekillion
18	10^{54}	septendecillion	nonillion		oktadekillion
19	10^{57}	octodecillion	nonilliard		enneadekillion
20	10^{60}	novemdecillion	decillion		icosillion
21	10^{63}	vigintillion	decilliard		icosihenillion
22	10^{66}	unvigintillion	undecillion		icosidillion
23	10^{69}	duovigintillion	undecilliard		icositrillion
24	10^{72}	trevigintillion	duodecillion		icositetrillion
25	10^{75}	quattuorvigintillion	duodecilliard		icosipentillion
26	10^{78}	quinvigintillion	tredecillion		icosihexillion
27	10^{81}	sexvigintillion	tredecilliard		icosiheptillion
28	10^{84}	septenvigintillion	quattuordecillion		icosioktillion
29	10^{87}	octovigintillion	quattuordecilliard		icosiennillion
30	10^{90}	novemvigintillion	quindecillion		triacontillion
31	10^{93}	trigintillion	quindecilliard		triacontahenillion
32	10^{96}	untrigintillion	sexdecillion		triacontadillion
33	10^{99}	duotrigintillion	sexdecilliard		triacontatrillion

8.4 Sentilyon (centillion) Nedir?

1 in sağına 303 tane sıfır konulunca elde edilen sayıdır. Bu sayıyı 10 üzeri 303 (10^{303}) biçiminde gösteririz. $10^{3\times 100+3}$ biçiminde yazıldığı için Amerikan sistemine uyar. Avrupa sisteminde *10 sexdecilliard* ve Yunan tabanlı öneride *10 triacontatrillion* adlarını alır.

Table 8.2: SI öntakıları

Katsayı	Adı	Simge	Katsayı	Adı	Simge
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	k	10^{-24}	yocto	y

Bibliography

Index