TIMUR KARAÇAY - HAYDAR EŞ

CALCULUS

SEÇKIN YAYINCILIK
ANKARA

Contents

1
Trigonometri

1.1 Yönlü Açılar

Açı nedir? Açı hakkında neler biliyoruz? Hatırlamaya çalışalım.

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının meydana getirdiği düzlemsel şekle **açı**, bu ışınlara **açının kenarları**, başlangıç noktasına da **açının köşesi** denir. Açı, düzlemsel bir noktalar kümesidir.

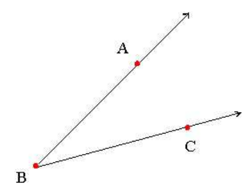

Figure 1.1: Açı

Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz. Işınların yazılış sırasına dikkat ediniz.

$\widehat{AOB} = \{[OA, [OB\}$ $\qquad$ $\widehat{DOC} = \{[OD, [OC\}$

Açıyı oluşturan iki ışından birine **başlangıç** , diğerine ise **bitim kenarı** denir. Açılar adlandırılırken önce başlangıç, sonra bitim kenarı yazılır.

Açının köşesi etrafında, başlangıç kenarından bitim kenarına iki türlü gidilebilir. Bunlardan biri saatin dönme yönünün tersi, ikincisi ise saatin dönme yönünün aynısıdır. Saatin dönme yönünün tersi olan yöne pozitif, aynı olan yöne ise negatif yön denilir.

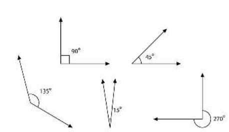
Figure 1.2: Açı Örnekleri

Biz açıların yönünü ok yardımıyla belirleyeceğiz.

Örnek:

$\widehat{AOB}$ nın yönü pozitiftir. $\qquad$ $\widehat{BOA}$ nın yönü negatiftir.

$m(\widehat{AOB}) = -m(\widehat{BOA})$

1.2 Yönlü yaylar

Bir kesen çemberi iki yaya ayırır. AB keseni O merkezli çemberi A ve B noktalarında kessin. Çember üzerinde A noktasından B noktasına gitmek için iki yön vardır:

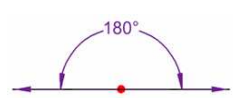

Figure 1.3: Düz Açı

Saat ibrelerinin dönme yönünün tersi olan yöne *pozitif yön*; saat ibrelerinin dönme yönünün aynısı olan yöne *negatif yön* diyeceğiz.

$[AB]$ kirişinin çemberde ayırdığı iki yayı birbirinden ayırmak için yayların üzerine birer nokta daha koyabiliriz. Böylece, pozitif yönde oluşan AB yayını ACB yayı olarak, negatif yönde oluşan AB yayını ise ADB yayı olarak adlandırabiliriz.

Yarıçapları eşit olan iki çembere *eş çemberler* denilir.

Aynı veya eş çemberlerde, eş kirişlerin ayırdığı yaylara *eş yaylar* denilir.

Aynı veya eş çemberlerde, eş yayları gören merkez açılar birbirlerine eştir.

$[AB]$ kirişi O merkezinden geçerse, $[AB]$ bir çap olur.

Bir $[AB]$ çapının çemberden ayırdığı ACB yayının uzunluğu ADB yayının uzunluğuna eşit olur; yani çemberin bir çapı çemberi iki eş yaya ayırır.

Bir $[AB]$ çapının ayırdığı yaylardan herbirisine *yarı çember* denilir.

Uzunluğu yarı çemberin uzunluğundan küçük olan bir yaya *küçük (minör) yay*, uzunluğu yarı çemberin uzunluğundan büyük olan bir yaya da *büyük (major) yay* denilir. Şekildeki ACB yayı küçük, ADB yayı ise büyük yaylardır.

1.3 Birim Çember

Analitik düzlemde, merkezi başlangıç noktasında ve yarıçapı 1 birim uzunlukta olan çembere *birim çember* denilir. Birim çember üzerindeki her $P(x,y)$ noktası için $x^2 + y^2 = 1$ bağıntısı sağlanır. Dolayısıyla birim çemberi şöyle yazabiliriz:

Ç= $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} ve x^2 + y^2 = 1\}$

1.4 Açı Ölçü Birimleri

Bir açının büyüklüğünü ya da küçüklüğünü nasıl tanımlarız? Bunu yapabilmek için bir açı ölçü birimi tanımlamak gerekir. Açıyı ölçmek demek, açının kolları arasındaki açıklığı belirlemek demektir. Bunu yapmak için şu yolu izleyeceğiz. AOB açısının O tepesini merkez kabul eden birim yarıçaplı bir çember çizelim. Çember üzerindeki hareketli bir P noktası, A noktasından başlayarak pozitif yönde bir tam dönme yapsın ve tekrar A noktası üzerine gelsin. P noktasının çizdiği ABA tam çember yayını gören merkez açıya **tam açı** diyeceğiz. Tam açı evrenseldir; yani açının çizildiği yere, zamana, açıyı çizen kişiye,... vb bağlı değildir. Birim çember yayının uzunluğu da bellidir ve 2π ye eşittir. Bu temele dayalı olarak çeşitli açı ölçü birimleri tanımlanabilir:

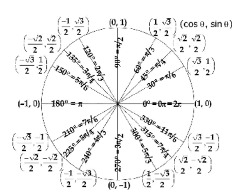

Figure 1.4: Derece

Derece

Şimdi birim çember yayını, birbirlerine eş olan 360 yay parçasına bölelim. Eş yayları gören merkez açılar birbirlerine eş olduğundan, 360 tane eş merkez açı oluşur. Bunlardan herhangi bir yay parçasını gören merkez açının ölçüsü *1 derece* olarak tanımlanır. Eş açıların ölçülerinin aynı olacağını varsayacağız. Dolayısıyla, tam açının ölçüsü 360 derecedir. Dereceyi $(^0)$ simgesiyle göstereceğiz. Buna göre, tam açının ölçüsü = 360^0 yazabiliriz.

Daha duyarlı ölçümler için derecenin as katlarını tanımlarız:

1^0 nin 60 ta birine *1 dakika* denilir. Dakika $'$ simgesiyle gösterilir.

$1'$ nın 60 ta birine *1 saniye* denilir. Saniye $''$ simgesiyle gösterilir.

Grad

Tam çember yayını 400 eş parçaya bölersek, her birini gören merkez açının ölçüsüne *1 grad* denilir.

Radyan

Yarıçap uzunluğuna eşit uzunlukta bir yayı gören merkez açının ölçüsüne *1 radyan* denilir. Radyan R simgesiyle gösterilir.

Açı ölçü birimlerinden derece günlük yaşamda, grad denizcilikte ve radyan ise bilimsel çevrelerde daha çok kullanılır.

Açı Ölçü Birimlerini Birinden Ötekine Çevirme

Ağırlık, uzunluk vb ölçü birimlerinde olduğu gibi açı ölçme birimleri de birbirlerine dönüştürülebilir. Bunun için temeldeki tam açı ve ona karşılık gelen tam yay uzunluğu esas alınır:

$$\begin{array}{lll} 360^0 & = & 400 \quad \text{grad} \\ 360^0 & = & 2\pi \quad \text{radyan} \end{array}$$

Buradan

$$\begin{array}{lllll} 1^0 & = & (2\pi/360) & \text{radyan} & = (\pi/180)R \\ 1 \text{ radyan} & = & (360/2\pi) & \text{derece} & = (180/\pi)^0 \cong 57^0 \end{array}$$

Örnekler:

1. $m(\hat{B}) = 30^0 59' 29''$, $m(\hat{A}) = 27^0 11' 38''$ ise bu iki açının ölçüleri toplamını ve farkını bulalım.

Toplam	Fark
$30^0 59' 29''$	$30^0 59' 29''$
$27^0 11' 38''$	$27^0 11' 38''$
$57^0 70' 67''$	$30^0 58' 89''$
	$27^0 11' 38''$
$58^0 11' 7''$	$3^0 47' 51''$

2. 45^0lik bir açının radyan ve grad cinsinden ölçülerini bulalım:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} = \frac{45}{180} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{\pi}{4} \quad \text{radyan}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{G}{200} = \frac{1}{4} \Rightarrow G = \frac{200}{4} = 50^g$$

bulunur.

1.5 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ölçüleri verilen açıları iletki kullanarak çiziniz.

   a) $77^0 30'$ b) $\frac{\pi}{6}$ radyan c) 50^g

2. Aşağıdaki açı ölçülerini diğer ölçü birimlerine çeviriniz.

   a) 50^0 b) $\frac{2\pi}{3}$ radyan c) 100^g

1.6 Yönlü Açıların Ölçülmesi

Düzlemde bir xOy koordinat sistemi seçelim. Tepesi, koordinat sisteminin O başlangıç noktasıyla ve başlangıç kenarı Ox ekseni ile çakıştırıldığında, açı *standart konumuna* yerleştirilmiştir denilir.

Standart konumlarına yerleştirildiğinde bitim kenarları çakışan açılara eş bitimli açılar denilir.

Birim çemberin çizildiğini varsayalım. Bütün yayların bu çember üzerinde olduğunu varsayacağız.

ACB yayını gören AOB açısı ile ADB yayını gören AOB' açısı eş bitimli iki açıdır. Birincisi pozitif yönlü, ikincisi ise negatif yönlüdür.

AOB açısının ölçüsü a^0 ise AOB' açısının ölçüsü $-(360^0 - a^0)$ olur.

Aynı bağıntı radyan cinsinden şöyle ifade edilebilir. Birim çember üzerindeki ACB yayının uzunluğu t birim ise, AOB açısının ölçüsü t radyandır. Dolayısıyla, AOB' açınının ölçüsü

$$m(\widehat{AOB'}) = -(2\pi - t) \quad \text{radyan}$$

olacaktır.

Şimdi hareketli bir P noktası düşünelim. P noktası birim çember üzerinde A noktasından başlayarak pozitif yönde hareket etsin. P noktası henüz hareket etmemişken (A noktası ile çakışıyorken)

$$m(\widehat{AOP}) = 0^0 \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = 0 \quad \text{radyan}$$

dır. P noktası birim çember üzerinde bir B noktasına geldiğinde, eğer AOB açısının ölçüsü a^0 ve AB yayının uzunluğu t birim ise

$$m(\widehat{AOP}) = a^0 \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = t \quad \text{radyan}$$

olur. P noktası Oy ekseni üzerine geldiğinde

$$m(\widehat{AOP}) = 90^0 \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = \pi/2 \quad \text{radyan}$$

olur. P noktası Ox ekseninin negatif tarafı üzerine geldiğinde

$$m(\widehat{AOP}) = 180^0 \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = \pi \quad \text{radyan}$$

olur. P noktası Oy ekseninin negatif tarafı üzerine geldiğinde

$$m(\widehat{AOP}) = 270^0 \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = 3\pi/2 \quad \text{radyan}$$

olur. P noktası, bir tam dönüş yapıp tekrar Ox ekseni üzerindeki A noktası üzerine geldiğinde

$$m(\widehat{AOP}) = 360^0 \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = 2\pi \quad \text{radyan}$$

olur. P noktası hareketine aynı yönde devam ederek tekrar B noktası üzerine gelirse

$$m(\widehat{AOP}) = (360^0 + a^0) \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = (2\pi + t) \quad \text{radyan}$$

olur. P noktası hareketine pozitif yönde devam ederek 2 tam dönüş yaptıktan sonra tekrar B noktası üzerine gelirse

$$m(\widehat{AOP}) = (720^0 + a^0) \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = (4\pi + t) \quad \text{radyan}$$

olur. Eğer P noktası k kere tam dönüş yaptıktan sonra B noktasına gelirse

$$m(\widehat{AOP}) = (k.360^0 + a^0) \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = (2k\pi + t) \quad \text{radyan}$$

olur. Eğer P noktası negatif yönde dönseydi şöyle olurdu:

$$m(\widehat{AOP}) = (-k.360^0 + a^0) \quad \text{ve} \quad m(\widehat{AOP}) = (-2k\pi + t) \quad \text{radyan}$$

1.7 *Sayılara Eşleme*

Bir açının radyan cinsinden ölçüsünün, o açının birim çember üzerinde gördüğü yayın yönlü uzunluğuna eşit olduğunu gördük. O halde, açıların ölçüleri ile gerçek sayılar kümesi arasında bire bir bir eşleme yapılabilir. Ox-ekseni ile çakışan bir Ot-sayı ekseni düşünelim. Bir AOP açısı verilsin. $m(\widehat{AOP}) = t$ olduğunu varsayalım. Yukarıda açıklanan nedenle, birim çember üzerindeki AP yayının yönlü uzunluğu t olacaktır. Ot-ekseni üzerinde koordinatları $(t, 0)$ olacak biçimde bir tek T noktası vardır. Yani, her açının radyan cinsinden ölçüsüne karşılık bir tek gerçek sayı vardır. Tersine olarak, her t gerçek sayısına karşılık Ot-eskeni üzerinde bir tek $T(t, 0)$ noktası vardır. Bu noktaya karşılık, yönlü uzunluğu t olan bir AP yayı vardır. Bu yayı gören merkez açının ölçüsü t radyandır.

Burada şuna dikkat edilmelidir. Açı ölçüleri ile gerçek sayılar kümesi bire bir eşlenmektedir. Ancak, gördüğü yay uzunluğu bir tam çember yayını aşan açıların bitim kenarlarının birim çemberi kestiği P noktaları çakışabilir. Dolayısıyla, yukarıda açıklanan eşlemede, birim çember üzerindeki noktalarla açı ölçüleri bire bir eşlenmemektedir.

1.8 Yaylarla İşlemler

Yarıçapları eşit olan iki yayın toplamını ve farkını aşağıdaki gibi tanımlayacağız:

Geometrik Yorum

Yayların merkezleri farklı ise, önce merkezler çakıştırılır. Pozitif yönlü iki yayı toplamak için, birisinin başlangıç noktasını ötekinin bitim noktasına çakıştırıp pozitif yönde ikinci yayın uzunluğu kadar ilerlemek yetecektir.

Örneğin AB ile CD yaylarını toplamak için C noktası B ile çakıştırılır, pozitif yönde CD yay uzunluğu BD' yay uzunluğuna eşit olacak biçimde D' noktası işaretlenir. Ortaya çıkan AD' yayı, verilen yayların toplamıdır.

Pozitif yönlü iki yayın birisini ötekinden çıkarmak için, aynı işlem yapılır; ancak ikinci yayın uzunluğu kadar negatif yönde ilerlenir.

Yaylardan birisi veya her ikisi de negatif yönlü ise, toplama ve çıkarma işleminde ilerleme yönü ona göre değişir.

Pozitif yönlü iki yayın toplam uzunluğu bu yayların uzunlukları toplamına; farkları uzunluğu ise uzunluklarının farkına eşittir. Negatif yönlü yayların toplam ve farklarının uzunluğu, ilgili yayların gerektirdiği işaretlerle yapılan cebirsel işlemin sonucuna bağlıdır.

Cebirsel Yorum

AB yayının uzunluğu s olsun. Eğer $\overset{\frown}{AB}$ pozitif yönlü ise $s \geq 0$, negatif yönlü ise $s < 0$ olacaktır. γ herhangi bir sayı olmak üzere $\gamma.\ \overset{\frown}{AB}$, başlangıç noktası A ve uzunluğu γs olan AC yayı olarak tanımlanır.

BC yayının uzunluğu t olsun. $m(\overset{\frown}{AB}) \pm m(\overset{\frown}{BC}) = s \pm t$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla, yarıçapları eşit olan yayların kümesi üzerinde toplama, çıkarma ve skalerle çarpma işlemleri, gerçek sayılar kümesinde karşlığı olan işlemlere indirgenmiş olur.

Birim çemberin tamamını (tam yay) T ile gösterelim. $\widehat{AOP}$ nın ölçüsü α^0 olsun.

$$\overset{\frown}{AP}, \overset{\frown}{AP} \pm T, \overset{\frown}{AP} \pm 2T, \ldots, \overset{\frown}{AP} \pm nT, \ldots \qquad (n \in \mathbb{N})$$

yaylarını düşünelim. Bu yayları gören merkez açılar AOP açısı ile çakışır. Bu açıların ölçüleri, derece cinsinden,

$$\alpha^0, \alpha^0 \pm 360^0, \alpha^0 \pm 2.360^0, \ldots, \alpha^0 \pm n.360^0, \ldots$$

olur.

0^0 ile 360^0 arasında olan ölçüye $\overset{\frown}{AOP}$ nın *esas ölçüsü* denilir.

Öte yandan T tam yayının uzunluğu 2π birim olduğuna göre, s-ekseni üzerindeki $p + 2n\pi$ noktası n kez çemberi pozitif yönde sarma işleminden sonra P noktası ile çakışır, yani $p + 2n\pi$ noktası $\overset{\frown}{AP} + nT$ yayının bitim noktasına karşılık gelir. Negatif yönde sarma işlemi de benzer sonucu verir. Dolayısıyla

$$S(p + 2k\pi) = P \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

olur.

Örnekler:

1. 737^0 lik açının esas ölçüsünü bulalım:

Birim çember üzerinde $[OA$ başlangıç kenarı olmak üzere 737^0lik açının bitim kenarını bulmak için; A noktasından pozitif yönde 2 defa 360^0lik yay çizdiğimizde tekrar A noktasına geliriz. 737^0 den 720^0 yi çıkardığımızda kalan 17^0lik yayı çizdiğimizde 737^0lik açının bitim kenarının birim çemberi kestiği P noktasını buluruz. $[OP$ ışını 737^0lik açının bitim kenarı ve AOP açısının ölçüsü de 737^0lik açının esas ölçüsü olur.

$$m(\widehat{AOP}) = 737^0 - 2.360^0$$
$$m(\widehat{AOP}) = 17^0 \quad \text{bulunur}$$

Problemi pratik olarak aşağıdaki şekilde de çözebiliriz. Verilen açının esas ölçüsü α olsun. $k \in Z$ olmak üzere

$$737^0 = \alpha + k360^0 \Rightarrow \begin{array}{r|l} 737 & 360 \\ \cline{2-2} \underline{720} & 2 \\ 17 & \end{array}$$

$\Rightarrow 737^0 = 17 + 2.360^0 \Rightarrow k = 2$ ve $\alpha = 17^0$ bulunur.

2. Esas ölçüsü 275^0 olan açı ölçülerinin kümesini bulalım:

İstenen kümenin tüm elemanları 275^0nin eşlendiği noktayla eşleneceğinden,

$$\{\alpha + k.360^0 \mid k \in Z\} = \{275^0 + k360^0 \mid k \in Z\}$$

bulunur.

1.9 *Birim Çemberde İşlemler*

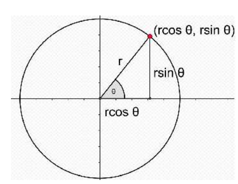

Figure 1.5: Birim Çemberde Trigonometri

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.

Gerçek sayılar ile birim çember arasında olduğu gibi, birim çember ile $[0, 2\pi)$ aralığındaki *radyan cinsinden sayıları* bire bir eşleyelim. Bu eşlemede birim çember üzerinde 1 kere dönmüş olduk. Benzer şekilde 2 kere döndüğümüzde $[2\pi, 2 \times 2\pi)$, üç kere döndüğümüzde $[4\pi, 3 \times 2\pi) \ldots$ aralığındaki *radyan cinsinden sayıları*, birim çember üzerindeki noktalarla bire bir eşlemiş oluruz.

Bu eşlemelerin her birinde P noktasına karşılık gelen radyan cinsinden sayıların kümesi;

$$P = \{\alpha + k.2\pi \mid k \in Z\}$$

olur.

Aynı eşlemede B ve A' noktalarına karşılık gelen radyan cinsinden sayıların kümesi sırasıyla;

$$\begin{aligned} B &= \{\ldots - \frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots\} = \{\frac{\pi}{2} + k.2\pi \mid k \in Z\} \\ A' &= \{\ldots - 3\pi, -\pi, \pi, 3\pi \ldots\} = \{\pi + k.2\pi \mid k \in Z\} \end{aligned}$$

dir.

A ve B' noktasına karşılık gelen radyan cinsinden sayılara ait kümeleri yazınız.

Örnekler:

1. Birim çember üzerinde $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ve 2π uzunluğundaki yönlü yayların bitim noktalarının koordinatlarını bulalım:

a) Birim çember üzerinde 0 radyanlık yayın başlangıç ve bitim noktası A noktasıdır. A noktasının koordinatları $(1, 0)$ dır.

b) $\frac{\pi}{2}$ radyanlık pozitif yönlü yayın bitim noktası B ve B noktasının koordinatları $(0, 1)$ dir.

c) π radyanlık pozitif yönlü yayın bitim noktası A' ve A' noktasının koordinatları $(-1, 0)$ dır.

d) $\frac{3\pi}{2}$ radyanlık pozitif yönlü yayın bitim noktası B' ve B' noktasının koordinatları $(0, -1)$ dir.

e) 2π radyanlık pozitif yönlü yayın bitim noktası A ve A noktasının koordinatları $(1, 0)$ dır.

Aynı ölçülerdeki negatif yönlü yayların bitim noktalarının koordinatlarını yazınız.

2. Birim çember üzerinde $\frac{\pi}{4}$'ün tam katları uzunluğundaki yönlü yayların bitim noktalarının koordinatlarını bulalım.

a) Önce $\frac{\pi}{4}$ radyan uzunluğundaki yayın bitim noktası olan P noktasının koordinatlarını bulalım. P noktasından Ox eksenine dik inelim. Elde edilen POK üçgeni ikizkenar dik üçgen olduğundan,

$$\mid OK \mid = \mid KP \mid = a$$

dersek,

$$\begin{aligned} \mid OK \mid^2 + \mid KP \mid^2 &= 1^2 \\ a^2 + a^2 &= 1 \\ 2a^2 &= 1 \\ a^2 &= \frac{1}{2} \\ a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Öyleyse P noktasının koordinatları $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ olur. Simetri özeliğinden yararlanarak $\frac{\pi}{4}$'ün tam katları olan yayların bitim noktalarının koordinatları:

a. $2.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$' nin bitim noktası B ve B nin koordinatları $(0, 1)$

b. $3.\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$'ün bitim noktası T ve T nin koordinatları $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

c. $4.\frac{\pi}{4} = \pi$'nin bitim noktası A' ve A' nün koordinatları $(-1, 0)$

d. $5.\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$'ün bitim noktası P' ve P' nün koordinatları $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

e. $6.\frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{2}$'nin bitim noktası B' ve B' nün koordinatları $(0, -1)$

f. $7.\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$'ün bitim noktası T' ve T' nün koordinatları $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

g. $8.\frac{\pi}{4} = 2\pi$'nin bitim noktası A ve A nın koordinatları $(1, 0)$

h. $9.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$'nin bitim noktası P ve P nin koordinatları $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

bulunur. Dikkat edecek olursanız tekrar P noktasına döndük. Bu şekilde devam edilerek $\frac{\pi}{4}$'ün katlarına ait yönlü yayların bitim noktalarının söz konusu $A, P, B, T, A', P', B', T'$ noktalarından ibaret olduğu görülür.

3. Birim çember üzerinde;

a) $\frac{\pi}{6}$ radyanlık yayın,
b) $\frac{\pi}{3}$ radyanlık yayın,
bitim noktalarının koordinatlarını bulalım:

a) Birim çember üzerinde $\frac{\pi}{6}$ radyanlık yayın bitim noktası P olsun. P noktasından Ox eksenine bir dikme inelim.

Oluşan POK dik üçgeninin açı ölçüleri $30^0, 60^0$ ve 90^0 dir. POK dik üçgeninde

$$\begin{aligned} \mid OP \mid &= 1 \\ \mid PK \mid &= \frac{1}{2} \\ \mid OK \mid &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Öyleyse P noktasının koordinatları $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ olur.

Simetri özeliğinden yararlanarak $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ve $\frac{13\pi}{6}$ radyanlık yayların bitim noktalarının koordinatlarını yazınız.

b) Birim çember üzerinde $\frac{\pi}{3}$ radyanlık yayın bitim noktası P olsun. P noktasından Ox eksenine bir dikme inelim. Oluşan $\overset{\Delta}{POK}$ nin açı ölçüleri $30^0, 60^0$ ve 90^0 dir.
POD dik üçgeninde:

$$\begin{aligned} \mid OP \mid &= 1 \\ \mid OK \mid &= \frac{1}{2} \\ \mid PK \mid &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse P noktasının koordinatları $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ olur.

Simetri özelliğinden yararlanarak $-\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}$ ve $-\frac{7\pi}{3}$ radyanlık yayların bitim noktalarının koordinatlarını yazınız.

Yukarıdaki örnekleri tam olarak anladınız mı?

Eğer anladıysanız, aşağıdaki birim çember üzerinde verilen noktaların koordinatlarını, nedenleriyle birlikte bularak yazınız.

1.10 Alıştırmalar

1. $30^0, -45^0$ ve 780^0lik açıların ölçülerini radyan ve grad cinsinden bulunuz.

2. $\frac{5\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}$ ve 21π radyanlık açıların ölçülerini derece ve grad cinsinden bulunuz.

3. Aşağıdaki şekilde birim çember ile $[0, 400)$ aralığındaki sayılar bire bir eşleniyor. Bu eşlemede $0^g, 100^g, 200^g$ ve 300^g'ın eşlendiği noktaların koordinatlarını yazınız.

4. $50^g, -150^g, 250^g$ ve 350^glik açıların ölçülerini derece ve radyan cinsinden bulunuz.

5. Aşağıdaki şekildeki AKB yayının uzunluğunu α ve r cinsinden bulunuz.

6. Aşağıdaki şekilde görülen $\overset{\frown}{AYB}$ nın uzunluğunu derece cinsinden bulunuz.

7. Aşağıda ölçüleri verilen açıların esas ölçülerini bulunuz.

   a) 2797^0 b) -1358^g c) $\frac{19\pi}{3}$

8. Aşağıda esas ölçüleri verilen açıların ölçülerini bulunuz.

   (a)
   (b) 42^0
   (c) 279^0
   (d) $\frac{9\pi}{10}$
   (e) Aşağıda denklemlerle verilen x gerçek sayılarını k'ya bağlı olarak bulunuz. $(k \in Z)$
   (f) $\frac{2x}{7} - 10 = \frac{x}{2} + k.360$
   (g) $\frac{7\pi}{3} - x = \frac{2x}{3} + \frac{\pi}{6} + k.2\pi$

1.11 Trigonometrik Fonksiyonlar

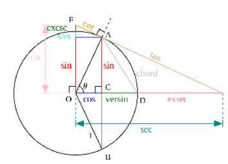

Figure 1.6: Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir α sayısı, birim çember üzerinde, yönlü $\overset{\frown}{AP}$ nın P bitim noktasına eşlensin. Ölçüsü α olan açıların başlangıç kenarı $[Ox$, bitim kenarı $[OP$'dir.

$[OP$, birim çembere A'dan çizilen teğeti T, B'den çizilen tegeti K noktasında kessin.

P nin apsisine α nın **kosinüsü** denir ve $\cos\alpha$ ile gösterilir.

P nin ordinatına α nın **sinüsü** denir ve $\sin\alpha$ ile gösterilir.

T nin ordinatına α nın **tanjantı** denir ve $\tan\alpha$ ile gösterilir.

K nın apsisine α nın **kotanjantı** denir ve $\cot\alpha$ ile gösterilir.
S nin apsisine α nın **sekantı** denir ve $\sec\alpha$ ile gösterilir.
D nin ordinatına α nın **kosekantı** denir ve $\csc\alpha$ ile gösterilir.
α gerçek sayısını;
$\cos\alpha$'ya dönüştüren fonksiyonuna **kosinüs fonksiyonu**
$\sin\alpha$'ya dönüştüren fonksiyona **sinüs fonksiyonu**,
$\tan\alpha$'ya dönüştüren fonksiyona **tanjant fonksiyonu**,
$\cot\alpha$'ya dönüştüren fonksiyona **kotanjant fonksiyonu**,
$\sec\alpha$'ya dönüştüren fonksiyona **sekant fonksiyonu**,
$\csc\alpha$'ya dönüştüren fonksiyona, **kosekant fonksiyonu**
denir.
Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi birim çemberde;
Ox eksenine (apsisler ekseni) *kosinüs ekseni*,
Oy eksenine (ordinatlar ekseni) *sinüs ekseni*,
A noktasından çizilen teğetine *tanjant ekseni*,
B noktasından çizilen teğetine *kotanjant ekseni*,
denir.
Birim çember üzerindeki P noktasının koordinatları (x, y) olsun $\overset{\frown}{AP}$ nın yönlü uzunluğu t ise $m(\widehat{AOP}) = t$ radyandır.
Buna göre,

$$\begin{aligned}
\sin t &= y \\
\cos t &= x \\
\tan t &= \frac{y}{x} \\
\cot t &= \frac{x}{y} \\
\sec t &= \frac{1}{x} \\
\csc t &= \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

olacaktır. $P(x, y)$ noktası,

I.	bölgede ise	$x \geq 0$	ve	$y \geq 0$
II.	bölgede ise	$x < 0$	ve	$y > 0$
III.	bölgede ise	$x < 0$	ve	$y < 0$
IV.	bölgede ise	$x > 0$	ve	$y < 0$

olur. Buna göre trigonometrik fonksiyonların işaretleri kolayca saptanabilir.

$0 \leq \alpha < 2\pi$ ve $k \in Z$ olmak üzere birim çember üzerindeki $\widehat{AP}$ yönlü yayının bitim noktasına eşlenen sayılar $(\alpha + k.2\pi)$ olsun. Ölçüsü $(\alpha + k.2\pi)$ olan tüm açıların bitim kenarı da $[OP$ olur.

$[OP$ bitim kenarı, tanjant eksenini T'de kotanjant eksenini K'da kessin. $[PC] \perp [AA']$ çizelim.

P noktası I. bölgede ise

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + k.2\pi) &= \sin\alpha = \mid PC \mid \\
\cos(\alpha + k.2\pi) &= \cos\alpha = \mid OC \mid \\
\tan(\alpha + k.2\pi) &= \tan\alpha = \mid AT \mid \\
\cot(\alpha + k.2\pi) &= \cot\alpha = \mid BK \mid
\end{aligned}$$

olur.

Başlangıç kenarları aynı, bitim kenarları sinüs eksenine göre simetrik olan açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

Yandaki şekli inceleyiniz.

Esas ölçüsü;

α olan merkez açıların ölçüsü $(\alpha + k.2\pi)$,

$(\pi - \alpha)$ olan merkez açıların ölçüsü

$[\pi - \alpha + k.2\pi] = (2k+1)\pi - \alpha$ olduğundan,

bu açıların trigonometrik değerleri:

$$\begin{array}{lcl}
\sin(\alpha + 2k\pi) = \mid PC \mid & ; & \sin[(2k+1)\pi - \alpha] = \mid P'C' \mid, \\
\cos(\alpha + 2k\pi) = \mid OC \mid & ; & \cos[(2k+1)\pi - \alpha] = \mid OC' \mid, \\
\tan(\alpha + 2k\pi) = \mid AT \mid & ; & \tan[(2k+1)\pi - \alpha] = \mid AT' \mid, \\
\cot(\alpha + 2k\pi) = \mid BK \mid & ; & \cot[(2k+1)\pi - \alpha] = \mid BK' \mid
\end{array}$$

olur.

Diğer taraftan üçgen eşlikleri ve yönler dikkate alınarak,

$$\begin{array}{lcl}
P\overset{\Delta}{O}C \cong P'\overset{\Delta}{O}C' & \Rightarrow & \mid PC \mid = \mid P'C' \mid \text{ ve } \mid OC \mid = - \mid OC' \mid, \\
T\overset{\Delta}{O}A \cong T'\overset{\Delta}{O}A & \Rightarrow & \mid AT \mid = - \mid AT' \mid \\
B\overset{\Delta}{O}K \cong B\overset{\Delta}{O}K' & \Rightarrow & \mid KB \mid = - \mid K'B \mid
\end{array}$$

yazılır. Bu eşitlikler dikkate alındığında yukarıdaki bağıntılardan,

$$\sin[(2k+1)\pi - \alpha] = \sin(\alpha + k.2\pi) \Rightarrow k = 0 \quad \text{için} \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos[(2k+1)\pi - \alpha] = -\cos(\alpha + k.2\pi) \Rightarrow k = 0 \quad \text{için} \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\tan[(2k+1)\pi - \alpha] = -\tan(\alpha + k.2\pi) \Rightarrow k = 0 \quad \text{için} \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha,$$

$$\cot[(2k+1)\pi - \alpha] = -\cot(\alpha + k.2\pi) \Rightarrow k = 0 \quad \text{için} \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha,$$

bulunur.

Başlangıç kenarları aynı, bitim kenarları orijine göre simetrik olan açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.

Esas ölçüsü α olan açıların ölçüsü $(\alpha + k.2\pi)$,

Esas ölçüsü $(\pi + \alpha)$ olan açıların ölçüsü $(\alpha + (2k+1)\pi)$ olduğundan bu açıların trigonometrik değerleri;

$$\begin{array}{lcl}
\sin(\alpha + 2k\pi) = \mid PC \mid & ; & \sin[\alpha + (2k+1)\pi] = \mid P'C' \mid \\
\cos(\alpha + 2k\pi) = \mid OC \mid & ; & \cos[\alpha + (2k+1)\pi] = \mid OC' \mid \\
\tan(\alpha + 2k\pi) = \mid AT \mid & ; & \tan[\alpha + (2k+1)\pi] = \mid AT \mid \\
\cot(\alpha + 2k\pi) = \mid BK \mid & ; & \cot[\alpha + (2k+1)\pi] = \mid BK \mid
\end{array}$$

olur. Diğer taraftan üçgen eşlikleri ve yönler dikkate alınarak,

$$P\overset{\Delta}{O}C \cong P'\overset{\Delta}{O}C' \Rightarrow \mid PC \mid = - \mid P'C' \mid \; ve \mid OC \mid = - \mid OC' \mid$$

yazılır. Bu eşitlikler dikkate alındığında yukarıdaki bağıntılardan,

$\sin[\alpha + (2k+1)\pi] = -\sin(\alpha + k.2\pi) \Rightarrow k = 0$ için
$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$,
$\cos[\alpha + (2k+1)\pi] = -\cos(\alpha + k.2\pi) \Rightarrow k = 0$ için
$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$,
$\tan[\alpha + (2k+1)\pi] = \tan(\alpha + k.2\pi) \Rightarrow k = 0$ için $\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$,
$\cot[\alpha + (2k+1)\pi] = \cot(\alpha + k.2\pi) \Rightarrow k = 0$ için $\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$,

bulunur.

Başlangıç kenarları aynı, bitim kenarları kosinüs eksenine göre simetrik olan açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

Yandaki şekli inceleyiniz.

Esas ölçüsü α olan açıların ölçüsü $(\alpha + k.2\pi)$ esas ölçüsü $-\alpha$ olan açıların ölçüsü $(k.2\pi - \alpha)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+2k\pi) &= \mid PC \mid \quad ; \quad \sin(k.2\pi-\alpha) = \mid P'C \mid \\
\cos(\alpha+2k\pi) &= \mid OC \mid \quad ; \quad \cos(k.2\pi-\alpha) = \mid OC \mid \\
\tan(\alpha+2k\pi) &= \mid AT \mid \quad ; \quad \tan(k.2\pi-\alpha) = \mid AT' \mid \\
\cot(\alpha+2k\pi) &= \mid BK \mid \quad ; \quad \cot(k.2\pi-\alpha) = \mid BK' \mid
\end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan üçgen, eşlikleri ve yönler dikkate alınarak,

$$\begin{array}{lll}
P\overset{\Delta}{O}C \cong P'\overset{\Delta}{O}C & \Rightarrow & \mid PC \mid = - \mid P'C \mid \quad \text{ve} \quad \mid OC \mid \quad \text{ortak}, \\
T\overset{\Delta}{O}A \cong T'\overset{\Delta}{O}A & \Rightarrow & \mid AT \mid = - \mid AT' \mid \\
B\overset{\Delta}{O}K \cong B\overset{\Delta}{O}K' & \Rightarrow & \mid KB \mid = - \mid K'B \mid
\end{array}$$

yazılır. Bu eşitlikler dikkate alındığında yukarıdaki bağıntılardan;

$$\begin{array}{ll}
\sin(k.2\pi-\alpha) = -\sin(\alpha+k.2\pi) \Rightarrow & k=0 \text{ için } \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \\
\cos(k.2\pi-\alpha) = +\cos(\alpha+k.2\pi) \Rightarrow & k=0 \text{ için } \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\
\tan(k.2\pi-\alpha) = -\tan(\alpha+k.2\pi) \Rightarrow & k=0 \text{ için } \tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \\
\cot(k.2\pi-\alpha) = -\cot(\alpha+k.2\pi) \Rightarrow & k=0 \text{ için } \cot(-\alpha) = -\cot\alpha,
\end{array}$$

bulunur.

1.12 *Trigonometrik Fonksiyonların Özelikleri*

Her t gerçek sayısına karşılık birim çember üzerinde yönlü bir AP yayının varlığını biliyoruz. P noktasının koordinatları (x, y) ise $-1 \leq x \leq +1$ ve $-1 \leq y \leq +1$ olacaktır. Dolayısıyla,

$$\forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

veya

$$\cos : \mathbb{R} \Rightarrow [-1, 1]$$

yazılır. Yani, kosinüs fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[-1, 1]$ dir.

Birim çember üzerindeki her noktanın ordinatı $[-1, 1]$ aralığında olduğundan;

$$\forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad -1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

veya

$$\sin : \mathbb{R} \Rightarrow [-1, 1]$$

yazılır. Yani, sinüs fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[-1, 1]$ dir.

$k \in Z$ olmak üzere, $\frac{\pi}{2} + k\pi$ gerçek sayıları birim çember üzerinde; k çift sayı ise, $B(0, 1)$; k tek sayı ise $B'(0, -1)$ noktasıyla eşlenir. Bu durumda $\frac{\pi}{2} + k\pi$ radyanlık açıların bitim kenarları tanjant eksenini kesmez. Yani, $\tan(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ tanımsızdır. $(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ hariç bütün gerçek sayılar için tanjant fonksiyonu tanımlı olduğundan,

$$\forall \alpha \in T = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z\} \quad \text{için} \quad \tan \alpha \in \mathbb{R}$$

veya

$$\tan : T \Rightarrow \mathbb{R}$$

yazılır. Yani, tanjant fonksiyonunun tanım kümesi T, görüntü kümesi $\mathbb{R}$'dir.

$k \in Z$ olmak üzere $k\pi$ gerçek sayıları birim çember üzerinde; k çift sayı ise, $A(1,0)$; k tek sayı ise $A'(-1,0)$ noktasıyla eşlenir. Bu durumda $k\pi$ radyanlık açıların bitim kenarları kotanjant eksenini kesmez. Onun için $\cot(k\pi)$ tanımsızdır. Diğer bütün gerçek sayılar için kotanjant fonksiyonu tanımlı olduğundan;

$$\forall \alpha \in K = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in Z\} \quad \text{için} \quad \cot \alpha \in \mathbb{R}$$

veya

$$\cot : K \Rightarrow \mathbb{R}$$

yazılır. Yani, kotanjant fonksiyonunun tanım kümesi K, görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir.

1.13 Özel Açılar

Esas ölçüsü $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ olan açıların trigonometrik değerlerini birim çember yardımıyla yazabiliriz:

0 radyanlık açının bitim kenarı $[Ox$,
$\frac{\pi}{2}$ radyanlık açının bitim kenarı $[Oy$,
π radyanlık açının bitim kenarı $[OA'$,
$\frac{3\pi}{2}$ radyanlık açının bitim kenarı $[OB'$,
2π radyanlık açının bitim kenarı $[Ox$,

olur. Bitim kenarlarının eksenleri kestiği noktalara göre aşağıdaki tablo hazırlanır.

Açı	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	tanımsız	0	tanımsız	0
cot	tanımsız	0	tanımsız	0	tanımsız

0 sütunu ile 2π sütununun aynı olduğuna dikkat ediniz. Siz de aynı şekilde $\frac{\pi}{2}, \pi$ ve $\frac{3\pi}{2}$ radyanlık açılar ile aynı trigonometrik değerlere sahip olan açı ölçüleri söyleyiniz.

1.14 Periyodik Fonksiyonlar

$f : A \Rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x+T) = f(x)$ eşitliğini sağlayan bir T gerçek sayısı varsa, f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, T gerçek sayısına da f'nin bir **periyodu** denir. Bu eşitliği sağlayan birden çok T gerçek sayısı varsa, bunların en küçüğüne f fonksiyonunun **esas periyodu** denir.

$k \in Z$ olmak üzere $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\cos(\alpha + k.2\pi) = \cos\alpha$$

olduğundan, kosinüs fonksiyonu periyodik fonksiyondur.Kosinüs fonksiyonunun periyodu **k.2ß**, esas periyodu **2ß**'dir.

$k \in Z$ olmak üzere $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\sin(\alpha + k.2\pi) = \sin\alpha$$

olduğundan, sinüs fonksiyonu periyodik fonksiyondur. Periyodu **k.2ß** ve esas periyodu **2ß**'dir.

$k \in Z$ olmak üzere $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$
olduğundan, tanjant fonksiyonu periyodik
fonksiyondur. Periyodu **kß** ve esas periyodu
ß'dir.

$k \in Z$ olmak üzere $\alpha \neq k\pi$ ve $\alpha \in R$ için

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$$

olduğundan, kotanjant fonksiyonu periyodik fonksiyondur. Periyodu $k\pi$ ve esas periyodu π'dir.

Yukarıdakilere benzer şekilde,

$$\sec(\alpha + k.2\pi) = \sec\alpha \quad \text{ve} \quad T = k.2\pi,$$

$$\csc(\alpha + k.2\pi) = \csc\alpha \quad \text{ve} \quad T = k.2\pi$$

olduğu görülür.

Örnekler:

1. $y = a\sin(mx+e)$nin esas periyodu $mT = 2\pi$ den $T = \frac{2\pi}{m}$,
$y = b\cos(nx+e)$nin esas periyodu $nT = 2\pi$ den $T = \frac{2\pi}{n}$,
$y = c\tan(px+e)$ nin esas periyodu $pT = \pi$ den $T = \frac{\pi}{p}$,
$y = d\cot(rx+e)$nin esas periyodu $rT = \pi$ den $T = \frac{\pi}{r}$,
bulunur. Yukarıdaki bilgiler yardımıyla aşağıdaki trigonometrik fonksiyonların esas periyotlarını bulalım:

a) $y = 3\sin 2x + 5$ b) $y = \frac{1}{2}\cos(5x+3)$ c) $y = \sqrt{3}\tan 3x$

a) $y = 3\sin 2x + 5$'in periyodu $2T = 2\pi$'den, $T = \pi$ bulunur.

b) $y = \frac{1}{2}\cos(5x+3)$'ün periyodu $5T = 2\pi$'den, $T = \frac{2\pi}{5}$ bulunur.

c) $y = \sqrt{3}\tan\frac{3}{2}x$'in periyodu $\frac{3}{2}T = \pi$'den $T = \frac{2\pi}{3}$ bulunur.

2. İki veya daha çok **basit** trigonometrik fonksiyon içeren fonksiyonların periyodu, **basit** trigonometrik fonksiyonların periyotlarının en küçük ortak katına eşittir. Bu bilgi yardımıyla aşağıdaki trigonometrik fonksiyonların periyotlarını bulalım:

a) $y = 5\cos 3x + \sin 2x$ b) $y = \frac{3\cos 3x}{4\sin 6x}$ c) $y = \frac{\tan 2x}{5\cot x}$

$$a) \left.\begin{array}{llll} \cos 3x & \text{in esas periyodu} \quad 3T_1 = 2\pi & \text{den} & T_1 = \frac{2\pi}{3} \\ \sin 2x & \text{in esas periyodu} \quad 2T_2 = 2\pi & \text{den} & T_2 = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Ohalde,

$$EKOK(T_1, T_2) = 2\pi$$

bulunur. Benzer düşünüşle,

$$b) \left.\begin{array}{llll} \cos 3x & \text{in esas periyodu} \quad 3T_1 = 2\pi & \text{den} & T_1 = \frac{2\pi}{3} \\ \sin 6x & \text{in esas periyodu} \quad 6T_2 = 2\pi & \text{den} & T_2 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$EKOK(T_1, T_2) = \frac{2\pi}{3}$$

bulunur. Son olarak,

$$c) \left.\begin{array}{llll} \tan 2x & \text{in esas periyodu} \quad 2T_1 = \pi & \text{den} & T_1 = \frac{\pi}{2} \\ \cot x & \text{in esas periyodu} \quad T_2 = \pi & \text{den} T_2 = \pi & \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$EKOK(T_1, T_2) = \pi$$

bulunur.

3. Bazı trigonometrik fonksiyonların periyotları uygun dönüşümler yapılarak bulunabilir:

$$\begin{array}{lll} y & = & \dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^3 x} \qquad \text{in esas periyodunu bulalım:} \\ y & = & \dfrac{\cos^2 x}{\cos^3 x} \qquad '' \cos^2 x = 1 - \sin^2 x'' \\ y & = & \dfrac{cos^2 x}{\cos^2 x \cos x} \\ y & = & \dfrac{1}{\cos x} \quad \text{fonksiyonunun periyodu} \quad 2\pi \quad \text{dir.} \end{array}$$

$m, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cos^2(mx + c)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulalım:

$$\cos^2[m(x+T)+c) = \cos^2(mx+c)$$

eşitliğinin iki tarafının karekökünü alalım.

$$\cos[m(x+T)+c] = +\cos(mx+c) \qquad (1)$$
$$\cos[m(x+T)+c) = -\cos(mx+c) \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) eşitliklerini ayrı ayrı irdeleyelim:
(1) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \cos[m(x+T)+c] &= \cos(mx+c) \\ m(x+T)+c &= 2\pi + mx + c \\ mT &= 2\pi \\ T_1 &= \frac{2\pi}{m} \end{aligned}$$

bulunur.
(2) eşitliğinden;

$$\cos[m(x+T)+c] = -\cos(mx+c) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos[m(x+T)+c] = \cos\{-[\pi-(mx+c)]\} \\ veya \\ \cos[m(x+T)+c] = \cos[\pi-(mx+c)] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos[m(x+T)+c] &= \cos\{-[\pi-(mx+c)]\} \\ mx+mT+c &= 2\pi-[\pi-(mx+c)] \\ mx+mT+c &= 2\pi-\pi+mx+c \\ mT &= \pi \\ T_2 &= \tfrac{\pi}{m} \end{aligned}$$

bulunur.
T_1 ve T_2 nin ortak değeri $\frac{\pi}{m}$dir. O halde,

$$\cos^2(mx+c)\text{nin periyodu} \quad \frac{\pi}{m}$$

dir.
Benzer şekilde $\sin^2(mx+c)$ fonksiyonunun esas periyodu da $\frac{\pi}{m}$ olur.
Yukarıdaki örnekte sinüs ve kosinüs fonksiyonunun üssü tek sayı olsaydı esas periyodunun $\frac{2\pi}{m}$ olacağını görünüz.
O halde;

$$f(x) = \sin^n(mx+c) \qquad (n \in Z, m, c \in \mathbb{R})$$

$$g(x) = \cos^n(mx+c) \qquad (n \in Z, m, c \in \mathbb{R})$$

fonksiyonlarında;
n tek ise fonksiyonların esas periyodu $T = \frac{2\pi}{m}$
n çift ise fonksiyonların esas periyodu $T = \frac{\pi}{m}$
olur.

Örnekler:
1. $h(x) = \sin^2(5x+4)$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.
Fonksiyonun üssü çift olduğundan;

$$T = \frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{5}$$

bulunur.
$n \in Z$ ve $m, c \in R$ olmak üzere,

$$f(x) = \tan^n(mx+c)$$

$$g(x) = \cot^n(mx+c)$$

fonksiyonlarının periyodu: $T = \frac{\pi}{m}$ dir.
2. $\tan^3(7x+2)$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.
Fonksiyonunun üssü periyodunu etkilemediğinden,

$$T = \frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{7}$$

bulunur.

1.15 *Dar Açılar*

Ölçüsü 0^0 ile 90^0 arasında olan açılara **dar açı** denildiğini biliyorsunuz. Dar açıları radyan ve grad cinsinden belirleyiniz.

Standart konumuna yerleştirilen bir dar açının bitim kenarı, dik koordinat sisteminin birinci bölgesindedir.

Yandaki şekli inceleyiniz.
$(A.A)$ üçgen benzerliği kuralından,
$P\overset{\Delta}{O}C \sim P_1\overset{\Delta}{O}C_1 \sim P_2\overset{\Delta}{O}C_2 \cdots$
ve
$\frac{|OC|}{|OP|} = \frac{|OC_1|}{|OP_1|} = \frac{|OC_2|}{|OP_2|} \cdots$
yazılır. Öte yandan
$\frac{|OC|}{|OP|} = \cos\alpha$
dır. Buradan,

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\frac{|\ PC\ |}{|\ OP\ |} = \frac{|\ P_1C_1\ |}{|\ OP_1\ |} = \frac{|\ P_2C_2\ |}{|\ OP_2\ |} \cdots$$

ve

$$\frac{|\ CP\ |}{|\ OP\ |} = \sin\alpha$$

dır. Buradan,

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$$

bulunur.

Yandaki şekli inceleyiniz.

$$T\overset{\Delta}{O}A \sim T_1\overset{\Delta}{O}A_1 \sim T_2\overset{\Delta}{O}A_2 \cdots$$

ve

$$\frac{|\ TA\ |}{|\ OA\ |} = \frac{|\ T_1A_1\ |}{|\ OA_1\ |} = \frac{|\ T_2A_2\ |}{|\ OA_2\ |} \cdots$$

yazılır.

$$\tan\alpha = \frac{|\ TA\ |}{|\ OA\ |} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}$$

bulunur.

Yandaki şekli inceleyiniz.
$K\overset{\Delta}{B}O \sim K_1\overset{\Delta}{B}_1O \sim K_2\overset{\Delta}{B}_2O \cdots$
ve
$\frac{|KB|}{|OB|} = \frac{|K_1B_1|}{|OB_1|} = \frac{|K_2B_2|}{|OB_2|} \cdots$
olduğunu görünüz.

$$\cot\alpha = \frac{|\ KB\ |}{|\ OB\ |} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$$

Yukarıdaki bağıntılardan yararlanarak,

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}}{\frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}} \\ &= \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} \\ &= \tan\alpha \end{aligned}$$

yazılır; yani,

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

bulunur.

Siz de $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ve $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ bağıntılarını benzer yoldan bulunuz.

Şekildeki dik üçgenleri inceleyiniz.
OPS dik üçgeninden
$\sec\alpha = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}$
OPD dik üçgeninden
$csc\alpha = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$
yazılır.

Yukarıda verilen bağıntılardan

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ ve $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$
olduğunu bulunuz.

Örnekler:

1. Dik kenar uzunlukları 1 birim olan ikizkenar dik üçgen yardımıyla 45^0lik açının trigonometrik fonksiyonlarının değerini bulalım:

Hipotenüs uzunluğu,

$$\begin{aligned} \mid AB \mid^2 &= \mid BC \mid^2 + \mid AC \mid^2 \\ \mid AB \mid^2 &= 1^2 + 1^2 \\ \mid AB \mid^2 &= 2 \\ \mid AB \mid &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \sin 45^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 45^0 &= 1 \\ \cot 45^0 &= 1 \\ \sec 45^0 &= \sqrt{2} \\ \csc 45^0 &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

bulunur.

2. Bir kenar uzunluğu 2 birim olan eşkenar üçgen yardımıyla 30^0 ve 60^0lik açıların trigonometrik fonksiyonlarının değerini bulalım:

ABH dik üçgeninde;

$$\begin{aligned} \sin 60^0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin 30^0 = \frac{1}{2}, \\ \cos 60^0 &= \frac{1}{2}; \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \tan 60^0 &= \sqrt{3}; \tan 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \cot 60^0 &= \frac{\sqrt{3}}{3}; \cot 30^0 = \sqrt{3}, \\ \sec 60^0 &= 2; \sec 30^0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ \csc 60^0 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}; \csc 30^0 = 2 \end{aligned}$$

bulunur. Siz de yukarıdaki örneklerde bulunan dikler (tümler) açıların trigonometrik oranları arasındaki bağıntıları yazınız.

3. Aşağıda ölçüleri verilen açıların trigonometrik oranlarını bulalım:

a) 750^0 b) $\frac{33\pi}{4}$ c) -840^0 d) 21π

Açıların trigonometrik oranlarını yazmak için esas ölçüleri bulunur.

a) Ölçüsü derece cinsinden verilen bir açının esas ölçüsünü bulmak için, açı ölçüsünden 360^0 nin tam katları çıkarılır.

$$\begin{array}{r|l} 750 & 360 \\ \cline{2-2} -720 & 2 \\ \hline 30 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 750^0 = 30^0 + 2.360^0 \quad &\Rightarrow \quad \sin 750^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad \cos 750^0 = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow \quad \tan 750^0 = \tan 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\Rightarrow \quad \cot 750^0 = \cot 30^0 = \sqrt{3} \end{aligned}$$

bulunur.

b) Ölçüsü radyan cinsinden verilen açıların esas ölçüsünü bulmak için verilen ölçüden 2π nin tam katları çıkarılır.

$$\begin{aligned} &\frac{33\pi}{4} = 8\pi + \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \quad &\sin \frac{33\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \quad &\cos \frac{33\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \quad &\tan \frac{33\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\ \Rightarrow \quad &\cot \frac{33\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

c)

$$\begin{array}{r|l} 840 & 360 \\ \cline{2-2} -720 & 2 \\ \hline 120 & \end{array}$$

$-840 = -120 - 2.360$

bulunur.

Esas ölçüsü yardımı ile açı, birim çember üzerinde çizilir. Trigonometrik değeri bu açıyla aynı ve ölçüsü 90^0den küçük açı bulunur.

Şekildeki $P\overset{\Delta}{O}C \cong P_1\overset{\Delta}{O}C_1$ ve $[OP$ tanjant ve cotanjant eksenini uzantısı olan $[OP_1$ ışını ile kesmektedir. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\sin(-840^0) &= \sin(-120^0) = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\\
\cos(-840^0) &= \cos(-120^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2},\\
\tan(-840^0) &= \tan(-120^0) = \tan 60^0 = \sqrt{3},\\
\cot(-840^0) &= \cot(-120^0) = \cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.
d)

$$\begin{aligned}
&\frac{21\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 5.2\pi\\
\Rightarrow\quad &\sin\frac{21\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1\\
\Rightarrow\quad &\cos\frac{21\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0\\
\Rightarrow\quad &\tan\frac{21\pi}{2} = \tan\frac{\pi}{2} = \text{tanımsız}\\
\Rightarrow\quad &\cot\frac{21\pi}{2} = \cot\frac{\pi}{2} = 0
\end{aligned}$$

bulunur.
4. Aşağıda, trigonometrik oranlarından biri verilen açıların diğer trigonometrik oranlarını bulalım:

$$\begin{array}{llll}
a) & \sin\alpha = \frac{3}{4} & b) & \cos\theta = \frac{11}{12}\\
c) & \tan x = \frac{13}{2} & d) & \cot y = 2
\end{array}$$

Bu örnekleri çözebilmek için dik üçgenlerden yararlanılır.
a) Dar açılardan birinin sinüsü $3/4$ olan dik üçgenin taslak şeklini çizelim. Bu üçgende;

$$\begin{aligned}
\mid BC\mid^2 &= 4^2 - 3^2\\
\mid BC\mid^2 &= 16 - 9\\
\mid BC\mid &= \sqrt{7}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\sqrt{7}}{4}\\
\tan\alpha &= \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}\\
\cot\alpha &= \frac{\sqrt{7}}{3}
\end{aligned}$$

olur.

d) Dar açılarından birinin kotanjantı 2 olan dik üçgeni çizelim. Bu üçgende;

$\mid AB \mid^2 = \mid BC \mid^2 + \mid AC \mid^2$	$coty = 2$	
$\mid AB \mid^2 = 2^2 + 1$	$\tan y = \frac{1}{2}$	olur.
$\mid AB \mid^2 = 5$	$\sin y = \frac{\sqrt{5}}{5}$	
$\mid AB \mid = \sqrt{5}$	$\cos y = \frac{2.\sqrt{5}}{5}$	

b ve c şıkları da benzer yolla çözülebilir.

5. Birim çemberin denklemini sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden yazalım;

Şekilden;
$\cos\alpha = a$
$\sin\alpha = b$
ve
$a^2 + b^2 = 1$
yazılır. a ve b'nin yerine eşiti olan trigonometrik fonksiyonları yazarsak,
$\mathbf{\cos^2 ff + \sin^2 ff = 1}$
bulunur.

Bir açının sinüsü ile kosinüsünün kareleri toplamı 1'e eşittir.

6. α bir dar açı ve $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ise, α'nın diğer trigonometrik oranlarını bulalım:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad &\Rightarrow \quad (\frac{4}{5})^2 + \cos^2\alpha = 1 \\
&\Rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \\
&\Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \\
&\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

olur.Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad &\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{4/5}{3/5} \\
&\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{4}{3} \\
&\quad\quad (\tan\alpha.\cot\alpha = 1) \\
&\Rightarrow \quad \cot\alpha = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

bulunur.

7. $\sin 15^0 = x$ ise, $\tan(-165^0)$yi x'e bağlı olarak bulalım:

$$\tan(-165^0) = -\tan 165^0 = -\tan(180^0 - 15^0) = \tan 15^0$$

$\sin^2 15^0 + \cos^2 15^0 = 1 \Rightarrow \cos^2 15^0 = 1 - \sin^2 15^0 \Rightarrow \cos 15^0 = \sqrt{1 - x^2}$ olur.

$$\tan 15^0 = \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ve

$$\tan(-165^0) = \tan 15^0 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

bulunur.

8. Bir DEF ikizkenar üçgeninde $\cot D = \frac{4}{3}$ ise, $\cot F$'nin trigonometrik oranını bulalım:

Aşağıdaki şekli inceleyiniz. $\widehat{D}$'nın cotanjantı verildiğine göre, E köşesinden DF kenarına dik inelim. DEH dik üçgeninde;

$$\cot D = \frac{\mid DH \mid}{\mid EH \mid} = \frac{4k}{3k}$$

$$\mid DE \mid = \mid DF \mid = \mid DH \mid + \mid HF \mid \Rightarrow \mid HF \mid = 1k \quad \text{olur.}$$

o halde;

$$\cot F = \frac{1k}{3k} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

Örnek 1.1.

1. Aşağıda verilen fonksiyon değerleri yardımıyla istenen fonksiyon değerlerini bulunuz.

a) $\sin t = \frac{1}{3}$ ise $csct = ?$
b) $\cos t = \frac{3}{8}$ ise $sect = ?$
c) $sect = -\frac{5}{3}$ ise $\cos t = ?$
d) $csct = \frac{5}{2}$ ise $\sin t = ?$
e) $\tan t = -\frac{1}{2}$ ise $\cot t = ?$
f) $\cot t = 5$ ise $\tan t = ?$
g) $\sin x = \frac{1}{3}$ ve $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ise $\tan x = ?, cotx = ?$

2. Aşağıda verilen eşitsizlikleri sağlayan α değerlerine ait bölgeleri belirtiniz.

a) $\sin\alpha > 0$ b) $\sin\alpha < 0$
c) $\cos\alpha > 0$ d) $\cos\alpha < 0$
e) $\tan\alpha > 0$ f) $\tan\alpha < 0$
g) $\cot\alpha > 0$ h) $\cot\alpha < 0$
i) $\sec\alpha > 0$ j) $csc\alpha < 0$

3. Dik koordinat düzleminde (x, y) ikilileriyle verilen noktaları orijine birleştiren doğru parçalarının Ox ekseniyle yaptığı açıları çiziniz ve bu açıların sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının değerlerini bulunuz.

a) $(1, -1)$ b) $(\sqrt{3}, 1)$ c) $(-1, -\sqrt{3})$
d) $(-1, 0)$ e) $(-\sqrt{6}, \sqrt{2})$ f) $(\sqrt{15}, -\sqrt{3})$
g) $(0, 1)$ h) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

4. Aşağıda verilen eşitlikleri sağlayan θ açı ölçülerini bulunuz.

a) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ b) $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\cot\theta = -1$ e) $sec\theta = -1$ f) $csc\theta = -1$

5. Aşağıdaki eşitlikleri doğrulayan x değerlerini bulunuz.
a) $\sin x = \cos x$ b) $\tan x = \cot x$

6. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.
a) $\sin 30^0 \cos 60^0 + \cos 30^0 \sin 60^0 = \sin 90^0$
b) $\cos 405^0 \cos(45^0) + \sin 405^0 \sin(45^0) = \cos 360^0$
c) $\dfrac{\tan 60^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 60^0 \tan 30^0} = \tan 90^0$
d) $\dfrac{1 + \cot 30^0 \cot 60^0}{\cot 60^0 - \cot 30^0} = \cot 30^0$
e) $\sin 60^0 = \sqrt{\frac{2-\sin 90^0}{4}}$
f) $1 - \cos 60^0 = 2\sin^2 30^0$
g) $1 - csc^2 45^0 = \cot^2 45^0$
h) $\tan 60^0 \tan 30^0 = sec 60^0 - 1$

7. Aşağıdaki şekilden de yararlanarak bir dik üçgende,
a) $m(\hat{A}) = 30^0$ ve $b = 2cm$ ise a ve c kenar uzunluklarını,
b) $m(\hat{B}) = 45^0$ ve $c = 3cm$ ise b ve a kenar uzunluklarını,
c) $a = 3cm, b = 4cm$ ise B açısının sinüs, kosinüs ve tanjant fonksiyonlarının değerlerini bulunuz.

8. Aşağıdaki şekilde verilenlere göre saat kulesinin tepe noktasının yüksekliğini bulunuz.

9. Aşağıdaki tabloyu uygun gerçek sayılarla doldurunuz.

α	30^0	210^0	390^0	60^0	120^0	600^0	45^0	135^0	90^0	180^0	270^0
$\sin\alpha$											
$\cos\alpha$											
$\tan\alpha$											
$\cot\alpha$											

10. $\sqrt{1-\sin\alpha}.\sqrt{1+\sin\alpha}$ ifadesini sadeleştiriniz.

11. $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$ ise $(g \circ f)(135^0)$'nin değerini bulunuz.

12. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\cot x = \frac{4}{3}$ olduğuna göre,

$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \cos 2x}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

13. Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a) $y = \frac{1}{2}\sin(x+4)$ b) $y = 4\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$
c) $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ d) $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{2})$
e) $y = \frac{1}{2}\cos(x+4)$ f) $y = \tan(x + \frac{\pi}{3})$
g) $y = 3\cos(2x - \frac{\pi}{6})$ h) $y = 3\tan(x - \frac{\pi}{3})$

14. Aşağıda verilen fonksiyonların esas periyotlarını bulunuz.

a) $y = 2\sin 6x + 7$ b) $y = 5\cos\frac{x}{2} + 3$
c) $y = \frac{1}{4}\cot(7x + \frac{1}{2})$ d) $y = \frac{1}{2}\tan\frac{2x}{3} + 1$
e) $y = \sqrt{3}\cot\frac{3}{2}x$ f) $y = \cot x + \frac{3}{2}$
g) $y = 5\cos 3x + \sin x$ h) $y = \sin x + \cot x$
i) $y = \frac{3\cos 2x}{2\tan x}$ j) $y = \frac{3\sin 3x}{5\cot 5x}$
k) $y = \frac{1-2\sin^2 x}{\cos^2 2x}$ l) $y = \cos^3(2x-1)$
m) $y = \sin^4 x + 1$ n) $y = \tan^2(3x - \pi)$
o) $y = \sin^3(2x-3) + \cot^5(2x - \frac{\pi}{2})$

1.16 Trigonometrik Tablo

Şimdiye kadar hangi gerçek sayıların trigonometrik değerlerini bulabildiniz? Nasıl buldunuz?

Esas ölçüleri $0, 30, 45, 60, 90, 180, 270$ derece olan açıların trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini, birim çember veya üçgenler yardımıyla bulabildik. Ancak, bu yöntemler, ölçüleri bu özel değerler dışında olan açıların trigonometrik oranlarını bulmaya elverişli değildir.

Bütün açıların trigonometrik oranlarını hesaplamaya yarayan matematiksel yöntemler vardır. Bu yöntemler bu dersin kapsamı dışındadır. Söz konusu yöntemlerle hesaplanan değerleri içeren trigonometrik tablolar yapılmıştır. Bu tablolardan, istenen her açının trigonometrik oranları bulunabilir. $0^0 - 90^0$ lik açılara ait tablo, bir sonraki sayfadadır. Tabloyu dikkatle inceleyiniz. Neler tespit ettiniz?

Açı ölçüleri, tablonun sağ ve sol başlarındaki sütunlarda yer almaktadır. Aynı satırdaki açı ölçüleri toplamı 90^0 dir. Tümler açıların trigonometrik fonksiyonlarının değerleri arasındaki ilişkileri hatırlayınız. Trigonometrik fonksiyonlar, birinci ve sonuncu satırda iki defa yazılmıştır. Birinci sütundaki açı ölçüleri için birinci satırdaki trigonometrik fonksiyonlar, sonuncu sütundaki açı ölçüleri için de sonuncu satırdaki trigonometrik fonksiyonlar alınmıştır. Tablonun sol tarafında yukarıdan aşağıya, sağ tarafında ise aşağıdan yukarıya doğru birer ok vardır. Bu oklar, 0^0 den 45^0 ye kadar okumaların yukarıdan aşağıya; 46^0den 90^0ye kadar okumaların da aşağıdan yukarıya doğru olduğunu belirtmek için konmuştur. İki yönlü okuma sayesinde aynı trigonometrik değerin iki defa yazılması önlenmiştir.

Derece satırı ile ilgili fonksiyona ait sütunun kesiştiği bölmedeki sayı, aranan trigonometrik değeri verir. Tabloda okuma, verilene ve istenene bağlı olarak, üç farklı şekilde uygulanır. Ayrıca trigonometrik tablo yardımıyla cetvelde yer almayan açı ölçülerinin trigonometrik fonksiyonlarının değerleri bulunabilir.

Örnekler:

1. $\cos 47^0\ 20'$ nin değerini bulalım:

Önce 47^0 ve 48^0 nin kosinüslerini tablodan okuyalım. Açı ölçüleri 45^0 den büyük olduğu için tabloyu aşağıdan yukarıya doğru kullanırız.

$\cos 47^0$	=	$0,820$
$\cos 48^0$	=	$0,6691$
Değer farkı	=	$0,0129$

Açı ölçüsü $60'$ artınca kosinüs değeri 0,0129 azalıyor. Azalmanın doğrusal olduğunu varsayıp şu doğru orantıyı kuralım:

$60'$	$0,0129$
$20'$	x

Buradan,

$$x = \frac{(20)(0,0129)}{60} = 0,0043$$

bulunur. Öte yandan,

$$\begin{aligned} \cos 47^0 20' &= \cos 47^0 - x \\ &= 0,6820 - 0043 \\ &= 0,6777 \end{aligned}$$

bulunur.

2. $\sin\alpha = 0,2116$ ve $0^o \leq \alpha \leq -360^o$ ise, α gerçek sayısını bulalım.

Trigonometrik değerler tablosunun sinüs sütununda 0,2116 sayısını arayalım. Bu sayı bulunmadığına göre, bir üst ve bir alt satırdaki sayılar ile karşılarındaki açı ölçülerini alalım. Bu değerlerin farkı $60'$ nın sinüsüne karşılık gelir.

$$\begin{aligned} \sin 13^0 &= 0,2250 \\ \sin 12^0 &= 0,2079 \\ \text{Değer farkı} &= 0,0171 \end{aligned}$$

Açı ölçüsü artarken sinüs değerinin doğrusal arttığını varsayalım.

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= 0,2116 \\ \sin 12^0 &= 0,2079 \\ \text{Değer farkı} &= 0,0037 \end{aligned}$$

0,0171 değer farkı $60'$ ya karşılık gelirse
0,0037 değer farkı x' ya karşılık gelir.

Bu doğru orantıdan x bilinmeyeni çözülürse,

$$\begin{aligned} x &= \frac{0,0037.60}{0,0171} \cong 13' \\ x &\cong 13' \end{aligned}$$

olur. $\alpha = 12^0 + x$ olduğunu varsaydığımıza göre,

$$\alpha = 12^0 13'$$

bulunur.

1.17 Grafikler

Bir fonksiyonun grafiği denilince neler hatırlıyorsunuz?

Daha önce birinci ve ikinci derece polinom fonksiyonların grafiklerini çizmiştiniz. Şimdi de trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizeceğiz.

Cosinus grafiği

Kosinüs fonksiyonunun grafiği, $\{(x, \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları olan ikililere dik koordinat düzleminde karşılık gelen noktaların kümesidir.

x'in bazı özel değerleri ile bu değerler için $\cos x$ fonksiyonunun alacağı değerlerin oluşturduğu $(x, \cos x)$ ikilileri şöyledir:

$$\begin{array}{llll} x = 0 & \text{için} & (0, \cos 0) & = (0, 1) \\ x = \pi/2 & \text{için} & (\pi/2, \cos \pi/2) & = (\pi/2, 0) \\ x = \pi & \text{için} & (\pi, \cos \pi) & = (\pi, -1) \\ x = \frac{3\pi}{2} & \text{için} & (\frac{3\pi}{2}, \cos \frac{3\pi}{2}) & = (\frac{3\pi}{2}, 0) \\ x = 2\pi & \text{için} & (2\pi, \cos 2\pi) & = (2\pi, 1) \end{array}$$

Buna göre, x gerçek sayısına bağlı olarak
$\cos x$ fonksiyonunun değişimi de şöyledir:

x, 0'dan $\frac{\pi}{2}$'ye kadar artarken; $\cos x$, 1' den 0'a kadar azalır.
x, $\frac{\pi}{2}$'den π'ye kadar artarken; $\cos x$, 0' dan -1'e kadar azalır.
x, π'den $\frac{3\pi}{2}$'ye kadar artarken; $\cos x$, -1' den 0'a kadar artar.
x, $\frac{3\pi}{2}$'den 2π'ye kadar artarken; $\cos x$, 0' dan 1'e kadar artar.

Bu değişimleri tablo ile gösterelim:

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Sonuç olarak, $x \in [0, 2\pi]$ için $\cos x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.

Seçilen aralık, kosinüs fonksiyonunun periyoduna eşittir. Grafik iki yönde sınırsız olarak 2π periyotla devam eder.

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken,

1. Fonksiyonun esas periyodu bulunur.
2. Bulunan periyoda uygun aralık seçilir.
3. Seçilen aralıkta fonksiyonun değişim tablosu düzenlenir.
4. Fonksiyonun grafiği çizilir.

Sinus grafiği

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\sin(x + k.2\pi) = \sin x$ olduğundan fonksiyonun esas periyodu 2πdir. $[0, 2\pi]$ nda $\sin x$ fonksiyonunun değişim tablosunu düzenleyelim ve bu tabloya göre grafiğini çizelim.

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	-1	$\searrow$	0

Tanjant Grafiği

$\forall x \in \{\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + k\pi)$ ve $k \in Z\}$ için $\tan(x + k\pi) = \tan x$ olduğundan fonksiyonun esas periyodu π dir. $\pi/2$ için tanjant tanımlı değildir. Neden?

$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ aralığındaki fonksiyonun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty \parallel -\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

1.18 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir. Halbuki trigonometrik fonksiyonlardan hiç biri, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$ ye bire bir ve örten değildir. Ancak trigonometrik fonksiyonların tanım kümelerinin uygun alt kümeleri seçilerek bire bir ve örten olması sağlanabilir. Bu tür aralıkları bularak; sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını tanımlayalım.

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $y = f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktirler. Dolayısıyla, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği biliniyorsa, ters fonksiyonunun grafiği simetri alınarak kolayca elde edilebilir. Aşağıdaki grafiklerde bu gerçeği kullanınız.

Arcsinus Fonksiyonu

Sinüs fonksiyonun tanım aralığını $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alırsak, bu fonksiyon bire bir ve örten olur. Bu durumda;

$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu vardır. Bu fonksiyonu, $\sin^{-1} x$ veya *arcsinx* simgelerinden birisiyle göstereceğiz. Tabii, *arcsin* $: [-1, 1] \Rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dir.

Bu tanıma göre;

$$\begin{aligned} y = f(x) = \sin x \quad &\Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \quad\;\; = \sin^{-1} y \\ &\Leftrightarrow \quad\;\; = arcsiny \end{aligned}$$

olur. Eğer ters fonksiyonda x ile y' yi yer değiştirirsek $x = \arcsin y$ yerine $y = \arcsin x$ olur.

$f^{-1}(x) = \arcsin x$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

$\arcsin x$ fonksiyonunun grafiği ile aynı aralıktaki $\sin x$ fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ açıortay doğrusuna göre, simetrik olduğunu görünüz.

Başka tanım aralıkları için $\arcsin x$ fonksiyonlarını elde edebilir miyiz? Örnek veriniz.

ArcCosinus Fonksiyonu

Kosinüs fonksiyonunun, bire bir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi $[0, \pi]$ dir.

$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ ile tanımlı $f^{-1} : [-1, 1] \Rightarrow [0, \pi]$ fonksiyonuna $\cos x$'in **ters fonksiyonu** denir ve $\arccos x$ biçiminde gösterilir. Bu tanıma göre;

$$\begin{aligned} y = f(x) = \cos x \quad &\Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \quad\;\; = \cos^{-1} y \\ &\Leftrightarrow \quad\;\; = arccosy \end{aligned}$$

olur. Eğer x ile y'yi yer değiştirirsek, $x = \arccos y$ yerine $y = \arccos x$ yazılabilir

$f^{-1}(x) = \arccos x$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$\arccos x$	π	$\searrow$	$\frac{3\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0

Yukarıdaki dik koordinat düzleminde $\arccos x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının grafiklerini inceleyiniz. Neye göre simetrik olduklarını söyleyiniz.

$\arccos x$ fonksiyonları için başka tanım aralıkları bulunuz.

Arctanjant Fonksiyonu

Tanjant fonksiyonunun esas periyodu π'dir. Bu fonksiyon $\frac{\pi}{2}$'nin tek katları için tanımsızdır. O halde, tanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dir.

$f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ ile tanımlı $f^{-1} : (-\infty, +\infty) \Rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ fonksiyonuna $\tan x$'in **ters fonksiyonu** denir ve $\arctan x$ biçiminde gösterilir. Bu tanıma göre;

$$\begin{aligned} y = f(x) = \tan x \quad &\Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \quad = \tan^{-1} y \\ &\Leftrightarrow \quad = arctany \end{aligned}$$

olur. x ile y'yi yer değiştirirsek, $x = arctany$ yerine $y = arctanx$ yazılabilir.

$y = \arctan x$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Yukarıdaki dik koordinat düzlemindeki $\arctan x$ ve $\tan x$ fonksiyonlarını karşılaştırınız.

Arccotanjant Fonksiyonu

Kotanjant fonksiyonun esas periyodu π'dir. Bu fonksiyon $k \in Z$ olmak üzere $k\pi$ değerleri için tanımsızdır. O halde kotanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi $(0, \pi)$ dir.

$f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$ ile tanımlı $f^{-1} : (-\infty, +\infty) \Rightarrow (0, \pi)$ fonksiyonuna $\cot x$'in **ters fonksiyonu** denir ve $arccotx$ biçiminde gösterilir.

Bu tanıma göre; $x \in (0, \pi)$ için,

$$\begin{aligned} y = f(x) = \cot x \quad &\Leftrightarrow \quad x &= f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow &= \cot^{-1} y \\ &\Leftrightarrow &= arccoty \end{aligned}$$

olur. x ile y'yi yer değiştirirsek, $x = arccoty$ yerine $y = arccotx$ yazılabilir.

$y = arcotx$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		+1		$+\infty$
arccot$x$	π	$\searrow$	$\frac{3\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0

Yukarıdaki dik koordinat düzleminde arccot$x$ ve $\cot x$ fonksiyonlarının grafikleri bir aradadır. İki grafiğin $y = x$ açıortay doğrusuna göre simetrik olduklarını görünüz.

arccot$x$ fonksiyonu için başka tanım aralıkları yazınız.

Örnekler:

1. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ifadesinin değerini bulalım:

$$\left.\begin{array}{l} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = x \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = y \Leftrightarrow \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, y = -\frac{\pi}{4} \text{olur.}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{3} + (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{12}$$

2. $\cos(\arctan 3)$ ifadesinin değerini bulalım:
$\cos(\arctan 3) = x$ diyelim.
$\arctan 3 = u \Leftrightarrow \tan u = 3$
olur. Bu eşitliğe uyan yandaki şekilden;
$\cos u = \frac{1}{\sqrt{10}}$ olur.
O halde, $\cos(\arctan 3) = \frac{\sqrt{10}}{10}$ bulunur.

1.19 Üçgende trigonometri

1.20 Cosinus teoremi

Herhangi bir $\overset{\Delta}{ABC}$ nin kenar
uzunlukları a, b, c ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{a^2} &= \mathbf{b^2 + c^2 - 2bc} \cos \mathbf{A} \\ \mathbf{b^2} &= \mathbf{a^2 + c^2 - 2ac} \cos \mathbf{B} \\ \mathbf{c^2} &= \mathbf{a^2 + b^2 - 2ab} \cos \mathbf{C} \end{aligned}$$

dir.

İspat:

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi $\overset{\Delta}{ABC}$ ni, A köşesi ile orijin, AB kenarı ile x ekseni çakışacak şekilde çizelim.

Birim çember AC kenarını P noktasında kessin $CC' \perp AB$ ve $PH \perp AB$ çizelim.

Bu çizim sonucunda $A(0,0)$ ve $B(c,0)$ olur. C noktasının koordinatları (x_0, y_0) olsun.

Şekildeki

$$\frac{|AH|}{|AP|} = \frac{|AC'|}{|AC|} = \frac{|PH|}{|AP|} = \frac{|CC'|}{|AC|}$$

orantısı dikkate alınarak

$$x_0 = b \cos A \quad \text{ve} \quad y_0 = b \sin A \Leftrightarrow C(b \cos A, b \sin A)$$

yazılır. Şimdi $|BC|$ uzunluğunu hesaplayalım:

$$|BC| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

bağıntısında değerleri yerlerine koyacak olursak,

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(c - b\cos A)^2 + (0 - b \sin A)^2} \\ a^2 &= c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A \\ a^2 &= c^2 - 2bc \cos A + b^2 \underbrace{(\cos^2 A + \sin^2 A)}_{1} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

bulunur. Benzer yoldan diğer eşitlikleri de siz bulunuz.

Örnek:

Bir $\overset{\Delta}{ABC}$de $a = 3$ cm, $b = 4$ cm ve $c = 5$ cm ise bu üçgenin açılarının ölçülerini bulunuz.

$$\begin{aligned}
\cos A &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{-9+16+25}{2.4.5} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow m(\hat{A}) = 37^0 \\
\cos B &= \frac{-b^2+a^2+c^2}{2ac} = \frac{-16+9+25}{2.3.5} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow m(\hat{B}) = 53^0 \\
\cos C &= \frac{-c^2+a^2+b^2}{2ab} = \frac{-25+9+16}{2.3.4} = \frac{0}{24} = 0 \Rightarrow m(\hat{C}) = 90^0
\end{aligned}$$

bulunur. A ve B açılarının ölçüleri, trigonometri cetvelinden yaklaşık değerler olarak alınmıştır.

1.21 *Sinus teoremi*

Herhangi bir $\overset{\Delta}{ABC}$'nde kenar uzunlukları a, b, c ise

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

dir.

İspat:

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi $\overset{\Delta}{ABC}$nin çevrel çemberini ve C köşesinden geçen CD çapını çizelim. $\mid CD \mid = 2R$ dir.

Bu şekilde, *aynı yayı gören çevre açıların eşitliğinden,* $m(\hat{A}) < 90^0$ ve $m(\hat{D}) = m(\hat{A})$ yazılabilir.

$m(\widehat{DBC}) = 90^0$ *(çapı gören çevre açı)*

DBC dik üçgeninde;

$$\sin D = \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

bulunur.

$m(\hat{A}) > 90^0$ durumunda yandaki şekli çizelim.

$\mid CD \mid = 2R$ olsun. Bu şekilde

$$m(\widehat{DBC}) = 90^0$$

ve $\hat{D}$ ile $\hat{A}$ bütünlerdir. Öyleyse,

$$\sin D = \sin A$$

dır. DBC dik üçgeninde

$$\sin D = \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

bulunur.

Diğer taraftan $\hat{A} = 90^0$ ise, $\sin A = 1$ ve $a = 2R$ olur. Bu durumda da

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

bulunur.

A açısı gibi B ve C açıları da aynı yolla ele alınarak

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

bulunur.

Örnek:

Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ de $a = 3$ cm, $b = 4$ cm ve $m(\hat{B}) = 37^0$ ise, $c, m(\hat{A}), m(\hat{B})$ ve çevrel çemberin yarıçapını hesaplayınız.

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\
\Rightarrow \quad & \frac{3}{\sin A} = \frac{4}{\sin 37^0} = \frac{c}{\sin C} \\
\Rightarrow \quad & \frac{3}{\sin A} = \frac{4}{0,8} = \frac{c}{\sin C} = 2R \\
\Rightarrow \quad & \frac{3}{\sin A} = 5 \Rightarrow \sin A = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow m(\hat{A}) = 53^0 \\
\Rightarrow \quad & m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^0 \Rightarrow m(\hat{C}) = 180^0 - 37^0 - 53^0 = 90^0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{c}{\sin 90^0} = 5 \Rightarrow c = 5.1 \Rightarrow c = 5cm \\
\Rightarrow \quad & 2R = 5 \Rightarrow R = 2,5cm
\end{aligned}$$

bulunur.

1.22 *Üçgenin alanı*

Üçgenin Alanı

Bir üçgende, bir kenar ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısı, o üçgenin alanını veriyordu. Şimdi de bir başka bağıntı ile üçgenin alanını bulmaya çalışalım:

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.

$$\left.\begin{array}{l} A(ABC) = \frac{ch_c}{2} \\ \sin A = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \sin A \end{array}\right\} \Rightarrow A(ABC) = \frac{1}{2} bc \sin A$$

bulunur. Benzer şekilde diğer bağıntılar da bulunarak,

$$\begin{aligned}
A(ABC) &= \frac{1}{2} bc \sin A \\
&= \frac{1}{2} ac \sin B \\
&= \frac{1}{2} ab \sin C
\end{aligned}$$

yazılır.

Örnek:

$a = 5$ cm, $b = 8$cm ve $m(\hat{C}) = 60^0$ olan üçgenin alanını bulalım.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}5.8\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}cm^2$$

olur.

Tanjant teoremi

Bir $\overset{\Delta}{ABC}$'de $b > c$ ise

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

dir.

$b > c$ olmak üzere bir $\overset{\Delta}{ABC}$ ve bu üçgenin A köşesi merkez ve c kenarı yarıçap olmak üzere bir çember çizelim. Çember, AC kenarını E'de kessin. E'den BC kenarına bir dikme inersek aşağıdaki şekli elde ederiz.

ABE ikizkenar üçgeninde,

$$m(\hat{E}) = m(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2})$$

DBE dik üçgeninde,

$$\tan\frac{B+C}{2} = \frac{|\ DB\ |}{|\ BE\ |}$$

EBC üçgeninde,

$$m(\widehat{EBC}) = m(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})$$

ve BEF dik üçgeninde

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{|\ EF\ |}{|\ BE\ |}$$

olur. Taraf tarafa bölersek,

$$\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} = \frac{\frac{|DB|}{|BE|}}{\frac{|EF|}{|BE|}} = \frac{|\ DB\ |}{|\ EF\ |}$$

bulunur.

Diğer taraftan $[EF]//[BD]$ olduğundan,

$$\frac{|\ DB\ |}{|\ EF\ |} = \frac{b+c}{b-c}$$

dir.

Son iki eşitlikten

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

bulunur.

Örnekler:

1. Dik kenar uzunlukları oranı $\frac{b}{c} = \sqrt{3}+2$ olan ABC dik üçgeninde $\widehat{B}$'nın ölçüsünü bulalım.

Dik kenarlar b ve c olduğuna göre;

$$\begin{aligned}
m(\hat{B}) + m(\hat{C}) &= 90^0 \Rightarrow \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B})}{2} = 45^0 \\
\frac{b}{c} = \sqrt{3}+2 &\Rightarrow \frac{b+c}{c} = \frac{\sqrt{3}+2+1}{1} = \sqrt{3}+3 \\
&\Rightarrow \frac{b-c}{c} = \frac{\sqrt{3}+2-1}{1} = \sqrt{3}+1 \\
&\Rightarrow \frac{b+c}{b-c} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}
\end{aligned}$$

olur. Tanjant teoremine göre;

$$\begin{aligned}
& \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} = \frac{\tan 45}{\tan\frac{B-C}{2}} \\
\Rightarrow\ & \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\tan\frac{B-C}{2}} \Rightarrow \tan\frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} \\
\Rightarrow\ & \tan\frac{B-C}{2} = \frac{(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{(\sqrt{3})^2 - 9} = \frac{-2\sqrt{3}}{-6} \\
\Rightarrow\ & \tan\frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\Rightarrow\ & m(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}) = 30^o
\end{aligned}$$

çıkar. Ohalde, $m(\hat{B}) - m(\hat{C}) = 60^0$ olur. Öte yandan, $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90^o$ idi. Bu iki denklemden, $2m(\hat{B}) = 150^0$ ve buradan da

$$m(\hat{B}) = 75^0$$

bulunur.

2. Çevrel çemberinin yarıçapı $R = 3$ cm ve $a = 3$ cm, $b = 3\sqrt{3}$ cm, $c = 6$ cm olan üçgenin açılarının ölçülerini bulalım:

Sinüs teoremine göre,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

yazarız. Verilen değerleri yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned} & \frac{3}{\sin A} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{6}{\sin C} = 2.3 \\ \Rightarrow \quad & \frac{3}{\sin A} = 6 \Rightarrow \sin A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\hat{A}) = 30^0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{3\sqrt{3}}{\sin B} = 6 \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\hat{B}) = 60^0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{6}{\sin C} = 6 \Rightarrow \sin C = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow m(\hat{C}) = 90^0 \end{aligned}$$

bulunur.
3. $m(\hat{B}) = 120^0$ ve çevrel çemberinin çapı $6\sqrt{3}$ cm olan ikizkenar üçgenin kenar uzunluklarını ve alanını bulalım:

İkizkenar üçgen ABC ise $m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = 30^0$ olur.

Sinüs teoremine göre,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

dir.

Değerleri yerine yazar ve

$$\sin 120^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

bağıntılarını da kullanırsak

$$\frac{a}{\sin 30^0} = \frac{b}{\sin 120^0} = \frac{c}{\sin 30^0} = 6\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{a}{1/2} = \frac{b}{\sqrt{3}/2} = \frac{c}{1/2} = 6\sqrt{3} \\ \Rightarrow \quad & a = 3\sqrt{3}cm \\ & b = 9cm \\ & c = 3\sqrt{3}cm \end{aligned}$$

çıkar. Ohalde, üçgenin alanı,

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{1}{2}a.b \sin C \\ &= \frac{1}{2}3\sqrt{3}.9.\frac{1}{2} \\ &= \frac{27\sqrt{3}}{4}cm^2 \end{aligned}$$

olur.
4. İki açısının ölçüsü $60^0, 30^0$ ve alanı $20\sqrt{3}cm^2$ olan üçgenin kenar uzunluklarını bulalım:

ABC üçgeninde $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^0$ ve $m(\hat{A}) = 60^0$, $m(\hat{B}) = 30^0$ olduğundan $m(\hat{C}) = 90^0$ olur. O halde, üçgenin alanından şunları yazabiliriz:

$$\frac{1}{2}a.b \sin C = A(ABC) \Rightarrow \frac{1}{2}a.b \sin 90^0 = 20\sqrt{3} \Rightarrow a.b = 40\sqrt{3}$$
$$\frac{1}{2}b.c \sin A = A(ABC) \Rightarrow \frac{1}{2}b.c \sin 60^0 = 20\sqrt{3} \Rightarrow b.c = 80$$
$$\frac{1}{2}ac \sin B = A(ABC) \Rightarrow \frac{1}{2}a.c \sin 30^0 = 20\sqrt{3} \Rightarrow a.c = 80\sqrt{3}$$

olur. Bu üç eşitlikten yerine koyma yöntemiyle

$$a = 2\sqrt{30}cm, \quad b = 2\sqrt{10}cm, \quad c = 4\sqrt{10}cm$$

bulunur.

5. Bir ABC üçgeninde $a + b + c = 2u$ ise

$$A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

olduğunu gösterelim:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1 - \cos A)(1 + \cos A)$$

dır. Bu eşitlikte $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ değerini yerine koyup gerekli sadeleştirmeyi yaparsak, şu sonuçlar çıkar:

$$\begin{aligned} & \sin^2 A = \frac{4}{b^2c^2}[u(u-a)(u-b)(u-c)] \\ \Rightarrow \quad & \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} \\ \Rightarrow \quad & A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} \end{aligned}$$

6. Bir $\overset{\Delta}{ABC}$nin çevrel çemberinin yarıçapı R ise,

$$A(ABC) = \frac{abc}{4R}$$

olduğunu bulalım:

$$A(ABC) = \frac{1}{2}b.c \sin A = \frac{1}{2}a.c \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

ve

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

idi.

$$\left.\begin{array}{l} A(ABC) = \frac{1}{2}b.c\sin A \\ \sin A = \frac{a}{2R} \end{array}\right\} \Rightarrow A(ABC) = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} \Rightarrow A(ABC) = \frac{abc}{4R}$$

bulunur.

1.23 *yayların Toplamı*

Şekilde görüldüğü gibi a, b ve $a-b$ gerçek sayılarının birim çember üzerindeki görüntüleri sırasıyla P, Q ve R olsun.

Buna göre,

$|\overset{\frown}{AR}| = |\overset{\frown}{PQ}| \Rightarrow |\ AR\ | = |\ PQ\ |$ olur. Buradan,

$$|\ AR\ | = \sqrt{[\cos(a-b)-1]^2 + [\sin(a-b)-0]^2}$$
$$|\ PQ\ | = \sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2}$$
$$|\ AR\ |^2 = |\ PQ\ |^2$$

yazabiliriz.

$$[\cos(a-b)-1]^2 + [\sin(a-b)]^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$$

$$\cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 + \sin^2(a-b) = \cos^2 a - 2\cos a\cos b + \cos^2 b +$$
$$\sin^2 a - 2\sin a\sin b + \sin^2 b$$

$\cos^2(a-b) + \sin^2(a-b) = 1, \cos^2 a + \sin^2 a = 1$ ve $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$

yazarsak;

$$1 - 2\cos(a-b) + 1 = 1 - 2\cos a\cos b - 2\sin a\sin b + 1$$

$$\cos(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \cos\mathbf{a}\cos\mathbf{b} + \sin\mathbf{a}\sin\mathbf{b} \qquad (1)$$

formülü elde edilir. Bu formülden hareket ederek diğer formülleri elde ederiz.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ için (1) formülünde b yerine $(-b)$ koyar ve

$$\cos(-b) = \cos b. \quad \sin(-b) = -\sin b$$

bağıntılarını kullanırsak

$$\cos[a-(-b)] = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b)$$

bulunur; yani

$$\cos(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \cos\mathbf{a}\cos\mathbf{b} - \sin\mathbf{a}\sin\mathbf{b} \qquad (2)$$

olur. Şimdi $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\sin(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \sin\mathbf{a}\cos\mathbf{b} - \cos\mathbf{a}\sin\mathbf{b} \qquad (3)$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \cos[\frac{\pi}{2}-(a-b)] \\
\sin(a-b) &= \cos[(\frac{\pi}{2}-a)+b] \qquad ''(2)den'' \\
\sin(a-b) &= \cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos b - \sin(\frac{\pi}{2}-a)\sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a.\cos b \quad - \quad \cos a.\sin b
\end{aligned}$$

bulunur.

(3) formülünde b yerine $(-b)$ yazarsak,

$$\sin[a-(-b)] = \sin a\cos(-b) - \cos a\sin(-b)$$

olur. Bu eşitliklerde $\cos(-b) = \cos b$ ve $\sin(-b) = -\sin b$ bağıntıları kullanılırsa,

$$\sin(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \sin\mathbf{a}\cos\mathbf{b} + \cos\mathbf{a}\sin\mathbf{b} \qquad (4)$$

bulunur.

$k \in Z$ ve a, b ve $a+b$'nin her biri $\frac{\pi}{2}+k\pi$'den farklı birer gerçek sayı olmak üzere,

$$\tan(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{\tan\mathbf{a}+\tan\mathbf{b}}{\mathbf{1}-\tan\mathbf{a}\tan\mathbf{b}} \qquad (5)$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b} \\
&\quad ''\cos a\cos b \neq 0\text{dır. Pay ve paydayı} \cos a.\cos b \quad \text{ile bölelim,''} \\
&= \frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}
\end{aligned}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$$

bulunur.

(5) formülünde b yerine $(-b)$ koyar ve $\tan(-b) = -\tan b$ eşitliğini kullanırsak,

$$\tan[a+(-b)] = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1-\tan a \tan(-b)}$$

$$\tan(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \frac{\tan \mathbf{a} - \tan \mathbf{b}}{\mathbf{1}+\tan \mathbf{a} \tan \mathbf{b}} \qquad (6)$$

olur.

$k \in Z$ ve a, b ve $a+b$'nin her biri $k\pi$ den farklı birer gerçek sayı olmak üzere,

$$\cot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{\cot \mathbf{a} \cot \mathbf{b} - \mathbf{1}}{\cot \mathbf{a} + \cot \mathbf{b}} \qquad (7)$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \cot(a+b) &= \frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)} \\ &= \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\sin a \cos b + \cos a \sin b} \end{aligned}$$

$\sin a \sin b \neq 0$ dır. Pay ve paydayı $\sin a \sin b$ ile bölelim:

$$\begin{aligned} \cot(a+b) &= \frac{\frac{\cos a \cos b}{\sin a \sin b} - \frac{\sin a \sin b}{\sin a \sin b}}{\frac{\sin a \cos b}{\sin a \sin b} + \frac{\cos a \sin b}{\sin a \sin b}} \\ &= \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b} \end{aligned}$$

bulunur.

(7) formülünde b yerine $(-b)$ koyup, $\cot(-b) = -\cot b$ eşitliğini kullanırsak,

$$\cot[a+(-b)] = \frac{\cot a \cot(-b) - 1}{\cot a + \cot(-b)}$$

$$\cot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = -\frac{\cot \mathbf{a} \cot \mathbf{b} + \mathbf{1}}{\cot \mathbf{a} - \cot \mathbf{b}} \qquad (8)$$

bulunur.

Örnekler:

1. 435^0 nin sinüsünü bulalım:

$$\begin{aligned} \sin 435^0 &= \sin(75^0 + 360^0) = \sin 75^0 = \sin(30^0 + 45^0) \\ \sin(30^o + 45^o) &= \sin 30^o \cos 45^o + \cos 30^o \sin 45^o \\ &= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 75 &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \end{aligned}$$

bulunur.

2. $\frac{61\pi}{12}$ radyanlık açının tanjantını bulalım:

$$\begin{aligned}
\tan\frac{61\pi}{12} &= \tan(\frac{\pi}{12}+5\pi) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}.1} \\
&= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\
&= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} \\
&= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

1.24 *Yarım Açı Formülleri*

Bir önceki bölümde elde ettiğimiz formüller yardımıyla, $(a+b)$ de b yerine a koyarak $\cos 2a, \sin 2a, \tan 2a$ ve $\cot 2a$ formüllerini elde edelim:

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad "b \quad \text{yerine} \quad a \quad \text{koyalım,"}$$

$$\cos(a+a) = \cos a\cos a - \sin a\sin a$$

$$\cos \mathbf{2a} = \cos^2 \mathbf{a} - \sin^2 \mathbf{a} \tag{1}$$

bulunur.

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ idi. $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a, \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ yazılırsa,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{ve} \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

elde edilir.

$$\sin(a+a) = \sin a\cos a + \cos a\sin a$$

$$\sin \mathbf{2a} = \mathbf{2}\sin \mathbf{a}\cos \mathbf{a} \tag{2}$$

bulunur.

$$\tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a\tan a}$$

$$\tan \mathbf{2a} = \frac{\mathbf{2}\tan \mathbf{a}}{\mathbf{1} - \tan^2 \mathbf{a}} \tag{3}$$

bulunur.

$$\cot(a+a) = \frac{\cot a\cot a - 1}{\cot a + \cot a}$$

$$\cot \mathbf{2a} = \frac{\cot^2 \mathbf{a} - \mathbf{1}}{\mathbf{2}\cot \mathbf{a}} \tag{4}$$

bulunur. (1),(2),(3) ve (4) formüllerinde a yerine $a/2$ koyarak yarım açı formüllerini yazarsak,

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \\ &= 2\cos^2 \frac{a}{2} - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \frac{a}{2} \\ \tan a &= \frac{2\tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} \\ \sin a &= 2\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \\ \cot a &= \frac{\cot^2 \frac{a}{2} - 1}{2\cos \frac{a}{2}} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek:

$\cos a, \sin a$ nın $\tan \frac{a}{2}$ cinsinden hesaplayalım.

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \\ \text{ve} \\ 1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos a = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$$

Pay ve paydayı $\cos^2 \frac{a}{2}$ ile bölelim:

$$\cos a = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}$$

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} \sin a = 2\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \\ \text{ve} \\ 1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin a = \frac{2\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$$

Pay ve paydayı $\cos^2 \frac{a}{2}$ ye bölersek,

$$\sin a = \frac{2\tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

bulunur.

1.25 *Dönüşüm Formülleri*

Bir trigonometrik ifadenin logaritma ile çözülebilmesi için bu ifade değeri bozulmadan çarpım, bölüm veya bir terimin kuvveti biçiminde yazılır. Bu işleme **dönüşüm**, elde edilen formüllere **dönüşüm formülleri** diyeceğiz.

İki sinüs toplam veya farkının dönüşümü

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

idi. Bu iki eşitlikten,

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$$

bulunur. Bu eşitliklerde,

$$\left.\begin{aligned} a+b &= x \\ a-b &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \tfrac{x+y}{2} \\ b &= \tfrac{x-y}{2} \end{aligned}$$

değerlerini yerlerine koyarsak,

$$\sin \mathbf{x} + \sin \mathbf{y} = \mathbf{2} \sin \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\mathbf{2}} \cos \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\mathbf{2}}$$

$$\sin \mathbf{x} - \sin \mathbf{y} = \mathbf{2} \cos \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\mathbf{2}} \sin \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\mathbf{2}}$$

elde edilir.

İki kosinüs toplam veya farkının dönüşümü

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

idi. Bu iki eşitlikten,

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$$

bulunur. Bu eşitliklerde,

$$\left.\begin{aligned} a+b &= x \\ a-b &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \tfrac{x+y}{2} \\ b &= \tfrac{x-y}{2} \end{aligned}$$

değerlerini yerine koyarsak,

$$\cos \mathbf{x} + \cos \mathbf{y} = \mathbf{2} \cos \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\mathbf{2}} \cos \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\mathbf{2}}$$

$$\cos \mathbf{x} - \cos \mathbf{y} = -\mathbf{2} \sin \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\mathbf{2}} \sin \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\mathbf{2}}$$

elde edilir.

Ters Dönüşüm Formülleri

Bazı durumlarda dönüşüm formüllerinin terslerini kullanırız. Yukarıdaki eşitliklerden kolayca elde edeceğimiz bu formüller şunlardır:

$$\begin{aligned}
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\
\cos a \sin b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)] \\
\sin a \sin b &= -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]
\end{aligned}$$

İki tanjant toplam veya farkının dönüşümü

$$\begin{aligned}
\tan a + \tan b &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} \\
&= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b} \\
&= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan a - \tan b &= \frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b} \\
&= \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b} \\
&= \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}
\end{aligned}$$

$1 + \cos u$ **ve** $1 - \cos u$ **nun dönüşümü**

$$\begin{aligned}
1 + \cos u &= \cos 0 + \cos u \\
&= 2\cos\frac{0+u}{2}\cos\frac{0-u}{2} \\
&= 2\cos\frac{u}{2}\cos(\frac{-u}{2}) \\
&= 2\cos^2\frac{u}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - \cos u &= \cos 0 - \cos u \\
&= -2\sin\frac{0+u}{2}\sin\frac{0-u}{2} \\
&= 2\sin^2\frac{u}{2}
\end{aligned}$$

$1 + \sin u$ **ve** $1 - \sin u$ **nun dönüşümü**

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2})$$

eşitliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} 1+\sin u &= \sin\frac{\pi}{2}+\sin u \\ &= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+u}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-u}{2} \\ &= 2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}) \\ &= 2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-\sin u &= \sin\frac{\pi}{2}-\sin u \\ &= 2\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}) \\ &= 2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}) \end{aligned}$$

elde ederiz.

$\sin \mathbf{u}+\cos \mathbf{v}$ nin dönüşümü

$$\cos v=\sin(\frac{\pi}{2}-v)$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \sin u+\cos v &= \sin u+\sin(\frac{\pi}{2}-v) \\ &= 2\sin\frac{u+\frac{\pi}{2}-v}{2}\cos\frac{u-\frac{\pi}{2}+v}{2} \\ &= 2\sin(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{v}{2})\cos(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{v}{2}) \end{aligned}$$

bulunur.

Bir üçgenin açılarının sinüsleri toplamının dönüşümü

Üçgenimiz $\overset{\Delta}{ABC}$ ve açı ölçüleri A, B, C olsun. $\sin B+\sin C$ yi dönüştürelim ve $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}$ eşitliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} \sin A+\sin B+\sin C &= \sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\ &= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\ &= 2\cos\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}) \\ &= 2\cos\frac{A}{2}(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}) \\ &= 2\cos\frac{A}{2}2.\cos\frac{\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}}{2}\cos\frac{\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}}{2} \\ &= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

$1 + \tan u, 1 - \tan u$ **ve** $\frac{1-\tan u}{1+\tan u}$ **nun dönüşümü**

$$1 + \tan u = \tan \frac{\pi}{4} + \tan u = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + u)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos u}$$

$$\mathbf{1} + \tan \mathbf{u} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}} \sin(\frac{\text{ß}}{\mathbf{4}} + \mathbf{u})}{\cos \mathbf{u}} \tag{1}$$

elde edilir.

$$1 - \tan u = \tan \frac{\pi}{4} - \tan u = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - u)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos u}$$

$$\mathbf{1} - \tan \mathbf{u} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}} \sin(\frac{\text{ß}}{\mathbf{4}} - \mathbf{u})}{\cos \mathbf{u}} \tag{2}$$

elde edilir.

(1) ve (2) formüllerini taraf tarafa bölersek,

$$\frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - u)}{\sin(\frac{\pi}{4} + u)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - u)}{\cos(\frac{\pi}{4} - u)}$$

$$'' \sin(\frac{\pi}{4} + u) = \cos(\frac{\pi}{4} - u)''$$

$$\frac{\mathbf{1} - \tan \mathbf{u}}{\mathbf{1} + \tan \mathbf{u}} = \tan(\frac{\text{ß}}{\mathbf{4}} - \mathbf{u})$$

elde edilir.

Örnekler:

1. $\cot \mathbf{u} + \cot \mathbf{v}$ ifadesini çarpım haline dönüştürelim:

$$\cot u + \cot v = \frac{\cos u}{\sin u} + \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{\cos u \sin v + \sin u \cos v}{\sin u \sin v}$$

$$\cot u + \cot v = \frac{\sin(u + v)}{\sin u \sin v}$$

elde edilir. Siz de benzer şekilde $\cot \mathbf{u} - \cot \mathbf{v}$ ifadesini çarpım haline getiriniz.

2. $1 + \cot u$ ifadesini çarpım haline dönüştürelim.

$$1 + \cot u = \cot \frac{\pi}{4} + \cot u = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + u)}{\sin \frac{\pi}{4} \sin u} \qquad '' \cot \frac{\pi}{4} = 1''$$

$$1 + \cot u = \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + u)}{\sin u} \qquad '' \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}''$$

elde edilir. Siz de benzer şekilde $\mathbf{1} - \cot \mathbf{u}$ ifadesini çarpım haline dönüştürünüz.

3. Aşağıda verilen **3ff** nın trigonometrik fonksiyonlarını **ff** nın trigonometrik fonksiyonları türünden yazalım.

a) $\sin 3\alpha$ b) $\cos 3\alpha$ c) $\tan 3\alpha$

Çözümler:

$$
\begin{aligned}
a) \qquad sin3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) \\
&= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\
&= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha) \sin \alpha \\
&= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\
&= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\
&= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\
&= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b) \qquad \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
&= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\
&= (2\cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha \\
&= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\
&= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha \\
&= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\
&= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\tan 3\alpha &= \tan(2\alpha + \alpha) \\
&= \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha} \\
&= \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan \alpha}{1 - \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tan \alpha} \\
&= \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} \\
&= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

Siz de cot **3ff**'yı cot **ff** türünden bulunuz.

Örnek 1.2.

1. Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.
   a) $y = 1 - \sin x$ b) $y = \cos 2x$
   c) $f(x) = 2\tan x - 1$ d) $f(x) = | \sin x |$

2. Kenar uzunlukları 5 cm, 6 cm, 7 cm olan üçgenin alanını bulunuz.

3. Bir ABC üçgeninin alanı $5cm^2$ ve $b = 4cm, c = 5cm$ ise A açısının ölçüsünü bulunuz.

4. Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları a, b, c ve çevrel çemberin yarıçapı R ise,
$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{a.b.c}{4R}$$
olduğunu gösteriniz.

5. Kenar uzunlukları $a = 2\sqrt{3}, b = 2$ ve $c = 4$ birim olan üçgenin açı ölçülerini bulunuz.

6. Şekilde verilenler yardımıyla ABC ve ADE üçgenlerinin alanları arasındaki oranı m ve n cinsinden bulunuz.

7. Şekildeki $ABCD$ kirişler dörtgeninde verilenler yardımıyla x'i derece cinsinden bulunuz.

8. Şekilde verilen $ABCD$ dörtgeninin alanını, x açısı ile e ve f köşegenleri cinsinden veren bağıntıyı bulunuz.

9. Aşağıdaki eşitliklerin varlığını gösteriniz.
a) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ b) $\frac{cscx - 1}{\cot x} = \frac{\cot x}{cscx + 1}$
c) $\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} = \tan^2 x + \cot^2 x + 1$
d) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$
e) $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$
f) $\tan(\frac{\pi}{4} + x) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2\tan 2x$
g) $\frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)} = \tan a + \tan b$
h) $\sin 2a = \frac{2}{\tan a + \cot a}$
i) $\cos^2 2x - \sin^2 x = \cos x \cos 3x$
j) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2}$
k) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \tan\alpha \cdot \tan 3\alpha$
l) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$
m) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

10. Bir dik üçgenin açıları A, B, C ve $m(\hat{A}) = 90^0$ ise aşağıdaki eşitliklerin varlığını gösteriniz.
a) $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

11. x, y, z bir üçgenin iç açılarının ölçüleri ise aşağıdaki eşitliklerin varlığını gösteriniz.
a) $\frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin y} + \frac{\cos y}{\sin x \cdot \sin z} + \frac{\cos z}{\sin x \cdot \sin z} = 2$
b) $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$

c) $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$

12. Aşağıdaki ifadeleri çarpım haline getiriniz.
a) $1 + 2\cos x + \cos 2x$ b) $1 + \sin x + \cos x$

13. $\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a+b)-\cos(a-b)}$ ifadesini sadeleştiriniz.

14. $\cos 9^0 = x$ ise $\sin 63^0$'yi x cinsinden bulunuz.

15. $\sin 75^0 + \sin 15^0 - \cos 75^0 + \cos 15^0$ ifadesinin değerini bulunuz.

16. $\tan 105^0$'nin değerini bulunuz.

17. Aşağıda soldaki şekilde verilen $ABCD$ karesinde

$$| CE | = \frac{1}{4} | BC |$$

ise $\tan x$'in değerini bulunuz.

18. Yukarıda sağdaki şekilde verilenlere göre, $\tan x$'i hesaplayınız.

19. $\cos 215^0 \cos 35^0 + \sin 215^0 \sin 35^0$ ifadesinin değerini bulunuz.

20. $sec^2 15^0 + csc^2 15^0$ ifadesinin değerini bulunuz.

21. $\cos 165^0 \cdot \cos 105^0$ ifadesinin değerini bulunuz.

22. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \sin x = \frac{a}{4b}$ ve $\cos x = \frac{2b}{a}$ olduğuna göre x kaçtır?

23. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos x = \frac{1}{3}$$

ise x kaçtır?

24. $\sin 410^0 - \sin 40^0$ ifadesinin değerini bulunuz.

25. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\frac{\sin 6x + \sin 4x}{\cos 7x - \cos 3x}$$

1.26 *Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri*

Bu kesim Türev konusu işlendikten sonra ele alınmalıdır.

Trigonometrik fonksiyonlar,

$$\sin, \quad \cos, \quad \tan, \quad \cot, \quad \sec, \quad \csc$$

simgeleriyle gösterilen fonksiyonlardır. Trigonometrik fonksiyonların herbiri sin fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir. Dolayısıyla, yalnızca sin fonksiyonunun türevini bilmek yeterli olacaktır. Tabii, istenirse, türev tanımından hareketle trigonometrik fonksiyonların herbirisinin türevi aranabilir. Ama, matematikte bilinenleri kullanarak bilinmeyenlei açığa çıkarmak daha iyi bir yöntemdir.

sin *Fonksiyonunun Türevi*

$$y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x \tag{1.1}$$

Kanıt:

$$\begin{aligned}
y' = (\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin x(\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h}.\cos x \right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} \right) + \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x \right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin x(1 - 2\sin^2(\frac{h}{2}) - 1)}{h} \right) + \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x \right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \sin x(\sin(\frac{h}{2})(\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \right) + \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x \right) \\
&= \sin x. \lim_{h\to 0}(\sin(\frac{h}{2}). \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \right) + \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x \right) \\
&= \sin x.0.1 + 1.\cos x \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

cos *Fonksiyonunun Türevi*

$$y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x \tag{1.2}$$

olduğunu gösteriniz.

$$y = \cos x \Longrightarrow y = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$$

eşitliği ile $\cos 2t = 2\sin t \cos t$ eitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} y' &= \left(1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})\right)' = -2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) \\ &= -\cos x \end{aligned}$$

çıkar.

tan *Fonksiyonunun Türevi*

$$y = \tan x \Longrightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{sec^2 x} \tag{1.3}$$

olduğunu gösteriniz.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

eşitliğinde bölümün türevi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

çıkar.

cot *Fonksiyonunun Türevi*

$$y = \cot x \Longrightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{sec^2 x} \tag{1.4}$$

olduğunu gösteriniz.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

eşitliğinde bölümün türevi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}) \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\sec^2 x = -1 - \cot^2 x \end{aligned}$$

çıkar

Aşağıdaki formüllerde $u = u(x)$ olduğunu kabul ediyoruz.

1. $y = \sin u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}\sin u(x) = \cos u(x)\frac{du}{dx}$
2. $y = \cos u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}\cos u(x) = -\sin u(x)\frac{du}{dx}$
3. $y = \tan u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}\tan u(x) = \sec^2 u(x)\frac{du}{dx}$
4. $y = \cot u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}\cot u(x) = -\csc^2 u(x)\frac{du}{dx}$
5. $y = \sec u(x) \qquad y' = (\sec u(x))' = \sec u(x).tanu(x).u'$
6. $y = \csc u(x) \qquad y' = (\csc u(x))' = -\csc u(x).cotu(x).u'$
7. $y = \sin^{-1} u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}(\sin^{-1} u(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$
8. $y = \cos^{-1} u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}(\cos^{-1} u(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$
9. $y = \tan^{-1} u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} u(x)) = \frac{1}{1-u^2}.\frac{du}{dx}, (|u| < 1)$
10. $y = \cot^{-1} u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}(\cot^{-1} u(x)) = \frac{1}{1-u^2}.\frac{du}{dx}, (|u| > 1)$
11. $y = \sec^{-1} u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}(\sec^{-1} u(x)) = \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$
12. $y = \csc^{-1} u(x) \qquad y' = \frac{d}{dx}(\csc^{-1} u(x)) = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$

Bibliography