Bölüm 1

Polinomlar

Polinom Kavramı

Polinomlar, yalnız Matematikte değil, başka bilim dallarında da karşılaşılan bir çok problemin çözümünde etkili bir araçtır.

Polinom kavramı, farklı soyut biçimleriyle incelenebilir. Ama, bu derste, katsayıların ve belirsizlerin gerçek sayılar olması durumunu ele alacağız. Gene de, biraz genel bir tanım vermekte yarar olabilir.

$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ bir $\mathcal{H}$ halkasından seçilmiş ögeler, n bir doğal sayı ve x belirsiz (tanımsız) olmak üzere,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x + a_nx^n \tag{1}$$

biçimindeki ifadelerden her birisi, bir belirsizli bir polinomdur.

Tanımı daha belirgin kılmak istersek, (1) ifadesine, x belirsizine göre, $\mathcal{H}$ üzerinde bir polinomdur diyoruz. Buna göre, $\mathcal{H}$ yerine $\mathcal{Z}$ konulursa, (1) ifadesi tamsayı katsayılı, bir belirsizli bir polinom olur. $\mathcal{H}$ yerine $\mathcal{Q}$ konulursa, (1) ifadesi rasyonel sayı katsayılı, bir belirsizli bir polinom olur. $\mathcal{H}$ yerine $\mathcal{R}$ konulursa, (1) ifadesi gerçek katsayılı bir belirsizli bir polinom olur. Polinomları büyük ya da küçük harflerle temsil edebiliriz. Buna göre, $P(x)$ ya da $p(x)$ simgeleri kullanılabilir.

1.1 Bir Belirsizli Polinomlar

Polinomun genel tanımını vermeden önce polinomu ve onunla ilgili bazı kavramları bir örnek üzerinde açıklamak daha uygun olacaktır.

$$3x^5 - 12x^2 + \sqrt{7}x - 9$$

ifadesi bir polinomdur. Fonksiyonlarda olduğu gibi, polinomları da birer harf ile temsil ederiz. Yukarıdaki polinomu $p(x)$ ile temsil edersek,

$$p(x) = 3x^5 - 12x^2 + \sqrt{7}x - 9 \tag{1.1}$$

yazabiliriz. şimdilik x simgesinin bir gerçek değişkeni temsil ettiğini; yani x in $\mathcal{R}$ içinde gezgin bir öge olduğunu varsayalım. Bu polinomun terimleri

$$3x^5,\ -12x^2,\ \sqrt{7}x,\ -9$$

dur. Bu terimler, x değişkenine göre, $5, 2, 1, 0$ ıncı derecedendirler (kuvvettendirler). En yüksek dereceli terim $3x^5$ dir. *Polinomun derecesi,* en yüksek dereceli teriminin derecesine eşittir. Dolayısıyla, söz konusu polinomun derecesi 5 dir. Terimlerin katsayıları, sırasıyla, 3, -12, $\sqrt{7}$, -9 gerçek sayılarıdır. En yüksek dereceli terimin katsayısı, *polinomun başkatsayısı*'dır. Ohalde (2) polinomunun başkatsayısı 3 dür.

Terimler $\mathcal{R}$ içindeki çarpma işlemine göre anlamlıdır. Terimlerin toplanması ya da çıkarılması da aynı şekilde anlamlıdır. Bu demektir ki, (2) polinomu gerçek sayılar kümesi içinde tanımlıdır ve x değişkenine belirli bir değer verilip, polinomun içerdiği çarpma, toplama ve çıkarma işlemleri yapılırsa bir gerçek sayı bulunur. Bu sayı, x için seçilen değere karşılık polinomun aldığı değerdir. Başka bir deyişle, (2) ifadesi bir cebirsel yapı içinde anlamlı bir ifadedir.

şimdi (1) polinomu için söylediklerimizi genelleştirmeye ve soyutlamaya çalışalım. Dikkat edersek, yukarıdaki tanımda $\mathcal{R}$ yerine , toplama ve çarpma işlemlerine kapalı olan bir cebirsel yapı alabiliriz. x değişkenini de şimdilik belirtilmeyen bir kümeden seçebiliriz. Bu nedenle, ait olduğu küme belirtilmediği zaman, x nesnesine *değişken* demeyecek, *belirsiz* diyeceğiz.

Tanım 1.1. *(1.1) biçimindeki ifadelerden her birisi bir polinomdur.*

Katsayı

$P(x)$ polinomunda $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ ögelerinden her birisi.

Terim

$a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \cdots, a_1 x, a_0$ ifadelerinden her birisi.

Derece

Bir $a_m x^m$ terimi için, x in kuvveti olan $m \in \mathcal{N}$ doğal sayısı. $p(x)$ polinomu için, polinomu oluşturan terimler içerisinde derecesi en büyük olanın derecesi. $p(x)$ polinomunun derecesi $der[p(x)]$ ile gösterilir.

Başkatsayı Polinomdaki en yüksek dereceli terimin katsayısı.

Sıfır Polinomu

Bütün katsayıları 0 olan polinom.

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

ise $p(x)$ polinomu sıfır polinomudur. $O(x)$ ile gösterilir.

Sabit Polinom Sabit terimi dışındaki bütün katsayıları 0 olan polinom.

$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = 0$ ve $a_0 \neq 0$ ise, $p(x)$ polinomu sabit bir polinomdur.

Sıfır polinomun derecesi tanımsızdır. Sabit polinomun derecesi sıfırdır.

Örnekler:

1. $p(x) = 7x^5 - 3x^4 + x^3 + 21x^2 - 8x + 12$ polinomunun derecesini, katsayılarını, terim sayısını, sabit terimini, başkatsayısını yazınız.

   - $der[P(x)] = 5$
   - Katsayıları: $7, -3, 1, 21, -8, 12$
   - Terim sayısı: 6
   - Sabit terimi: 12
   - Baş katsayısı: 7

   dır.

2. $p(x) = -5x^4 + \frac{3}{4}x^3 + 8x - 5$ polinomunun derecesini, başkatsayısını, terim sayısını, sabit terimini ve katsayılarını yazınız.

   - $der[p(x)] = 4$

- Baş katsayısı: -5
- Terim sayısı: 4
- Sabit terimi:-5
- p(x) polinomunun ikinci dereceden teriminin katsayısı sıfırdır. Bu polinom $p(x) = -5x^4 + \frac{3}{4}x^3 + 0x^2 + 8x - 5$ biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla, $p(x)$ polinomunun katsayıları $-5,\ \frac{3}{4},\ 0,\ 8,\ -5$

dir.

3. $f(x) = 13x^3 + 4x^{\frac{2}{3}} + 21$ ifadesi bir polinom mudur? Neden?

   Değildir; çünkü bir polinomda her terimin üssü bir doğal sayıdır. Oysa $4x^{\frac{2}{3}}$ terimindeki x, belirsizinin üssü bir doğal sayı değildir.

4. $p(x) = (2m-1)x^2+(n+2)x+r$ polinomunun sıfır polinomu olması için m, n, r sayıları ne olmalıdır?
   $$\begin{array}{lll} 2m-1=0, & n+2=0, & r=0 \\ m=-\frac{1}{2}, & n=-2, & r=0 \end{array}$$

5. $p(x) = ax^7 + (5b+1)x^3 + (2c-3)x^2 + 8$ polinomunun sabit polinom olması için a, b, c nin alacağı değerler ne olmalıdır?
   $$\begin{array}{lll} a=0, & 5b+1=0, & 2c-3=0 \\ a=0, & b=-\frac{1}{5}, & c=\frac{3}{2} \end{array}$$

1.2 Çok Belirsizli Polinomlar

x, y ve z belirsiz öğeler olmak üzere

1. $p(x, y) = 9x^7y^2 - 15x^3y^4 + 2x^2 - 5y + 14$
2. $q(x, y) = -3xy + 2x^4y^3 - 5y^7$
3. $r(x, y, z) = 6 - 11xyz^2 + 4x^2z^9 - 3xy^4 + 12x^4yz^3$

biçimindeki ifadelerden her birisine çok belirsizli bir polinom denilir. Bunlardan ilk ikisi *iki belirsizli*, sonuncusu ise *üç belirsizli* polinomlardır. Genel tanımını şöyle yapabiliriz.

$\mathcal{H}$ bir halka, x ve y belirsiz iki öge, $a_{rk} \in \mathcal{H}$ ve $r, k \in \mathcal{N}$ olmak üzere, $a_{rk}x^ry^k$ biçimindeki terimlerin sonlu bir toplamına *iki belirsizli polinom* denilir. İkiden çok belirsizi olan polinomlar da benzer biçimde tanımlanır.

$a_{rk}x^ry^k$ biçimindeki ifadelerin her birisi polinomun bir terimidir. Bu terimin derecesi $r + k$ dır; yani içerdiği belirsizlerin kuvvetleri toplamıdır.

Aynı terimin katsayısı ise a_{rk} dır. En yüksek dereceli terimin derecesi polinomun da derecesidir.

Örnekler

1. p(x,y) polinomunun iki belirsizi, 5 terimi vardır. Derecesi 9 dur.
2. q(x,y) polinomunun iki belirsizi, 3 terimi vardır. Derecesi 7 dir. Bu polinomun 7 inci dereceden iki terimi vardır.
3. r(x,y,z) polinomunun üç belirsizi, 5 terimi vardır. Derecesi 11 dir.

Belirsizleri aynı olan ve aynı belirsizlerin, karşılıklı olarak, üsleri aynı olan terimlere *benzer terimler* denilir. Benzer terimlerin katsayıları farklı olabilir.

Örnekler:

$-17x^3$ ile $5x^3$

$5x^7y^4$ ile x^7y^4

benzer terimlerdir. Ama

$8x^2y^3$ ile $18x^3y^2$

benzer olmayan terimlerdir.

1.3 Terimleri Kuvvetlerine Göre Sıralama

Polinomlarla ilgili işlemlerin kolay yapılabilmesi için polinomlar, belirsizlerinin kuvvetlerine göre artan ya da azalan sırada düzenlenebilir. Bu alışkanlığı edinmek için, polinomları bu biçimde düzenlenmiş olarak yazacağız. Örneğin,

$$-3 + 2x + 6x^2 - 17x^4 - 8x^9$$

$$12x^7 + 4x^5 - 7x^4 + 15x^3 + 2x - 4$$

polinomlarından birincisi x belirsizinin artan kuvvetlerine göre, ikincisi ise azalan kuvvetlerine göre düzenlenmiştir.

Çok belirsizli polinomlar, istenen bir belirsizinin kuvvetlerine göre artan ya da azalan sırada düzenlenebilir. Örneğin,

$$7x^2y^3z - 18x^3y^2z^2 + 5x^4y^5z^6 + x^5 - 14z^7 - 4$$

polinomu x belirsizinin artan kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$-4 - 14z^7 + 7x^2y^3z - 18x^3y^2z^2 + 5x^4y^5z^6 + x^5$$

olur. z belirsizinin azalan kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$-14z^7 + 5x^4y^5z^6 - 18x^3y^2z^2 + 7x^2y^3z + x^5 - 4$$

olur.

İki Polinomun Eşitliği

İki polinomun eşit olması için gerekli ve yeterli koşul derecelerinin aynı ve benzer terimlerinin, karşılıklı olarak birbirlerine eşit olmasıdır. Bir belirsizli polinomlar için eşitlik şu anlama gelir:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

ve

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$$

polinomları verilsin.

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow m = n \wedge (a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \cdots, \quad a_n = b_m)$$

dir.

Örnekler:

1. $P(x) = (a+1)x^2 + 5x + 2b - 1$ ve $Q(x) = (15-a)x^3 + (c-1)x^2 + (2d+1)x - 3$ polinomlarının eşit olması için a, b, c, d hangi değerleri almalıdır?

   Bu iki polinomun eşit olması için, benzer terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır. O halde,

$$\begin{aligned} 15 - a &= 0 && \Rightarrow a = 15 \\ a + 1 &= c - 1 && \Rightarrow c = 17 \\ 2d + 1 &= 5 && \Rightarrow d = 2 \\ 2b - 1 &= -3 && \Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

   çıkar.

2.

$$\begin{aligned} P(x) &= (3-a)x^5 - 3x^3 + bx^2 + 9 \\ Q(x) &= (b-1)x^4 + (2c+5)x^3 - 5dx^2 + 2e - 1 \end{aligned}$$

polinomlarının eşit olması için a, b, c, d, e hangi değerleri almalıdır?

Yukarıdaki düşünüşle,

$$\begin{aligned} 3-a &= 0 && \Rightarrow a = 3 \\ b-1 &= 0 && \Rightarrow b = 1 \\ 2c+5 &= -3 && \Rightarrow c = -4 \\ b &= -5d && \Rightarrow d = -\frac{1}{5} \\ 2e-1 &= 9 && \Rightarrow e = 5 \end{aligned}$$

olması gerektiği görülür.

3. $P(x) = 14x^3 + 5x^2 + 11$, ve $Q(x) = 14x^3 - 2x^2 + 11$ polinomları eşit midir?

   Hayır. Çünkü; $P(x)$ polinomunda x^2'li terimin katsayısı 5, $Q(x)$ polinomunda x^2'li terimin katsayısı -2 dir. Ohalde, $P(x) \neq Q(x)$ dir.

1.4 Uygulamalar

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri birer polinomdur?

   a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$ b) $g(x) = 4x^3 + 12x^{\frac{3}{4}} - 51$

   c) $h(x) = 33x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7$ d) $s(x) = 6x^6 - \sqrt{8}x^3 + \frac{3}{5}x + 15$

2. Aşağıdaki polinomların terim sayılarını, derecelerini, katsayılarını ve baş katsayısını yazınız.

   a) $P(x) = 4x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5x - 3$ b) $Q(x) = 3 - 3x^3$

   c) $R(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 41$ d) $S(x) = -4 + \frac{1}{7}x + 14x^2 - 65x^3 + 17x^4$

3. $P(x) = x^{\frac{k+1}{k-1}} + \frac{1}{2}x^2 - 3$ ifadesinin beşinci dereceden bir polinom belirtmesi için k ne olmalıdır?

4. $P(x) = 5x^3 + (a+1)x^2 + d$
   ve
   $Q(x) = (b-1)x^3 - 3x^2 - (2c-3)x + \frac{1}{2}$ polinomlarının eşit olması için a, b, c, d ne olmalıdır?

5. $-3 + (5c-1)x^2 + 3x^3 + 2x^4 = (3d-1)x^4 + (2e-3)x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 5f + 2$ eşitliğinin sağlanabilmesi için c, d, e, f nin alacağı değerler nelerdir.

6. $P(x) = \frac{\sqrt{7}}{3}(x^{7-r})^2 + 2x^{r-2} - 9$ ifadesinin bir polinom olabilmesi için r nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

1.5 Polinomlar Kümesi Üzerinde İşlemler

Sayı kümeleri üzerinde yaptığımız toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin benzerlerini polinomlar kümesi üzerinde de yapabiliriz. Bu işlemleri, önce bir belirsizli polinomlar üzerinde tanımlayacağız.

Tanım 1.2. *x belirsizine göre, bir $\mathcal{H}$ halkası üzerinde oluşturulabilecek bütün polinomların kümesini*

$$R_{[x]}$$

ile gösterelim.

Uyarı 1.1. *Polinomlar kümesi üzerinde yapılan işlemlerin sağladığı özelikleri örnekler üzerinde açıklamakla yetinecek; genel ispatlarını vermeyeceğiz. Ayrıca, özel olarak, x belirsizinin $\mathcal{R}$ kümesinden seçildiğini ve $\mathcal{H}$ halkasının $\mathcal{Q}$ Rasyonel Sayılar Halkası olduğunu varsayabiliriz.*

1.6 Toplama

İki polinom toplanırken benzer terimler bir araya getirilip toplanır ve benzer olmayanlar aynen alınır.

$n > m$ olmak üzere,

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

ve

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$$

polinomlarının toplamı, aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\begin{aligned} P(x)+Q(x) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_k+b_k)x^k+\cdots+ \\ &\quad (a_m+b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_nx^n \end{aligned}$$

Örnek
$P(x)=x^5-\frac{7}{3}x^4+5x^2-4, \quad Q(x)=-9x^5+\frac{5}{2}x^3-7x^2+6$ polinomlarının toplamı

$$\begin{aligned} P(x)+Q(x) &= [1+(-9)]x^5+(-\frac{7}{3}+0)x^4+(0+\frac{5}{2})x^3 \\ &\quad +[5+(-7)]x^2+(-4+6) \\ &= -8x^5-\frac{7}{3}x^4++\frac{5}{2}x^3-2x^2+2 \end{aligned}$$

olur. Buradan görüldüğü gibi, iki polinomun toplamı gene bir polinomdur. Dolayısıyla, polinomlar kümesi toplama işlemine kapalıdır. Bunu bir kural olarak ifade edebiliriz:

Özelik 1. *$R_{[x]}$ kümesi üzerinde + işlemi tanımlıdır.*

Şimdi, toplama işleminin yer değişme özeliğine sahip olduğunu yukarıdaki örnek üzerinde gösterelim.

$$\begin{aligned} Q(x)+P(x) &= (-9+1)x^5+\left(\frac{7}{3}+0\right)x^4+\left(\frac{5}{2}+0\right)x^3+(5-7)x^2+(6-4) \\ &= -8x^5-\frac{7}{3}x^4+\frac{5}{2}x^3-2x^2+2 \end{aligned}$$

olur. Bunu genelleştirerek, şu kuralı söyleyebiliriz:

Özelik 2. *$R_{[x]}$ kümesi üzerinde + işlemi yer değişme özeliğine sahiptir; yani, her $P(x), Q(x)$ polinom çifti için*

$$P(x)+Q(x)=Q(x)+P(x)$$

eşitliği sağlanır.

Toplama işleminin *birleşme* özeliğine sahip olduğunu aşağıdaki örnek üzerinde görelim: $P(x)=-3x^3+5x-7, \quad Q(x)=x^2-5x+3, \quad R(x)=x-2$ polinomlarının toplamını bulmak için, sayılarda olduğu gibi *birleşme* özeliğini kullanacağız:

$$\begin{aligned} & [P(x)+Q(x)]+R(x) \\ = & \left[(-3+0)x^3+(0+1)x^2+(5-5)x+(-7+3)\right]+(x-2) \\ = & (-3x^3+x^2+0x-4)+(x-2) \\ = & -3x^3+x^2+x-6 \end{aligned}$$

olur. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned} P(x)+[Q(x)+R(x)] &= (-3x^3+5x-7)+[(1+0)x^2 \\ &\quad +(-5+1)x+(3-2)] \\ &= -3x^3+x^2+x-6 \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

Özelik 3. *$R_{[x]}$ kümesi üzerinde + işlemi birleşme özeliğine sahiptir; yani, her $P(x), Q(x), R(x)$ polinomları için*

$$[P(x)+Q(x)]+R(x)=P(x)+[Q(x)+R(x)]$$

eşitliği sağlanır.

şimdi $R_{[x]}$ kümesi üzerinde, sıfır polinomunun, + işlemine göre *birim öğe* olduğunu göstereceğiz. Sıfır polinomu, bütün katsayıları sıfır olan polinomdur. Bunu $O(x)$ simgesiyle gösterelim. $O(x) = 0$ ile $P(x) = 3x^4-3x^3+2x+5$ polinomlarını toplarsak;

$$\begin{aligned} O(x)+P(x) &= (0+3)x^4+[0+(-3)]x^3+(0+2)x+(0+5) \\ &= 3x^4-3x^3+2x+5 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x)+O(x) &= (3+0)x^4+(-3+0)x^3+(2+0)x+(5+0) \\ &= 3x^4-3x^3+2x+5 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

çıkar. Bu iki eşitliği genelleştirerek şu kuralı yazabiliriz:

Özelik 4. *$R_{[x]}$ kümesindeki $O(x) = 0$ (sıfır) polinomu, + işlemine göre birim öğedir; yani her $P(x)$ polinomu için*

$$[O(x)+P(x)]=P(x)+O(x)]$$

eşitliği sağlanır.

Son olarak, $R_{[x]}$ kümesindeki her $P(x)$ polinomunun + işlemine göre tersinin $-P(x)$ olduğunu göstereceğiz.

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

polinomu için, $-P(x)$ polinomu

$$\begin{aligned} -P(x) &= -[a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n] \\ &= -a_0 - a_1x - \cdots - a_{n-1}x^{n-1} - a_nx^n \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır ve + işlemine göre, $P(x)$ *polinomunun tersi adını alır.* Gerçekten,

$$P(x)+(-P(x)) = [a_0+(-a_0)]+[a_1+(-a_1)]x+\cdots+[a_n+(-a_n)]x^n = 0$$

olur. O halde, şu kuralı yazabiliriz:

Özelik 5. *$R_{[x]}$ kümesindeki bir $P(x)$ polinomunun, + işlemine göre tersi, $-P(x)$ polinomudur.*

Yukarıda söylenen beş kural bir araya getirilirse, polinomlar kümesinin, toplama işlemine göre değişmeli bir grup olduğunu ifade edebiliriz:

Teorem 1.1. *$(R_{[x]}, +)$ değişmeli bir gruptur.*

1.7 Uygulamalar

1. Aşağıdaki polinomları toplayınız.

$P(x) = 3x^4 - 7x^2 + 4x - 5$	$Q(x) = -x^4 + 1$
$P(x) = -4x^3 + 5x^2 + 6$	$Q(x) = -8x^5 + 2x^3 - x^2$
$P(x) = x^7 + 5x^6 - 11x^3 + 4$	$Q(x) = 12x^7 + 4x^5 - 15x^2 + x + 1$
$P(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 5x^2 + 6x$	$Q(x) = -3x^4 + 21x^3 - x^2 + 8$
$P(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5}x + \frac{4}{3}$	$Q(x) = 2x^2 - 1$
$P(x) = (3x^4 - 5x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{3}$	$Q(x) = 10x^5 - x^3 + 6x^2 - 2x + 3$

2. İki polinomun toplamının derecesinin, derecesi büyük olan polinomun derecesine eşit veya ondan küçük olduğunu gösteriniz.

3. İki polinomun toplamının derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesine ne zaman eşit olur?

4. İki polinomun toplamının derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesinden ne zaman küçük olur?

5. $-P(x)$ polinomunun tersinin $P(x)$ olduğunu örneklerle sağlayınız.

1.8 Çıkarma

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları $R_{[x]}$ kümesinden alınan iki polinom ise, bunların farkı,

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

eşitliği ile tanımlanır.

Özelik 6. *$R_{[x]}$ kümesi çıkarma işlemine kapalıdır.*

Gerçekten, $R_{[x]}$ bir grup olduğundan, $P(x), Q(x) \in R_{[x]}$ ise,

$$(P(x) + [-Q(x)]) \in R_{[x]}$$

olacağını biliyoruz. O halde, yukarıdaki eşitliğin sol yanı da aynı kümeye ait olacaktır; yani, $[P(x) - Q(x)] \in R_{[x]}$ dir.

Örnek 1.1.

$P(x) = x^5 - 3x^3 - 2x + 1, \quad Q(x) = 2x^5 - x^3 + 6$ polinomları için

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= P(x) + [-Q(x)] \\ &= (x^5 - 3x^3 - 2x + 1) - (2x^5 - x^3 + 6) \\ &= (1-2)x^5 + (-3+1)x^3 + (-2+0)x + (1-6) \\ &= -x^5 - 2x^3 - 2x - 5 \end{aligned}$$

olur.

Özelik 7. *Çıkarma işlemi* yer değiştirme *özeliğine sahip değildir.*

$(R_{[x]}, +)$ grubunda, sıfırdan farklı bir polinomun tersi kendisine eşit değildir. O halde,

$$P(x) - Q(x) = -[Q(x) - P(x)] \neq [Q(x) - P(x)]$$

yazabiliriz. Bu ise

$$P(x) - Q(x) \neq [Q(x) - P(x)]$$

demektir. Bunu bir örnek üzerinde gösterelim:

$P(x) = 4x^7 - 2x^2 - x + 6, \qquad Q(x) = 3x^6 - 5x^3 + 2x - 4$ polinomları için,

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (4-0)x^7 + (0-3)x^6 + (0-0)x^5 + (0-0)x^4 \\ &\quad +(0+5)x^3 + (-2-0)x^2 + (-1-2)x + (6+4) \\ &= 4x^7 - 3x^6 + 5x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) - P(x) &= (0-4)x^7 + (3-0)x^6 + (0-0)x^5 + (0-0)x^4 \\ &\quad +(-5-0)x^3 + (0+2)x^2 + (2+1)x + (-4-6) \\ &= -4x^7 + 3x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 10 \end{aligned}$$

Buradan görüldüğü gibi, $P(x)-Q(x)$ ile $Q(x)-P(x)$ polinomları, $+$ işlemine göre birbirlerinin tersidirler.

İki polinomu toplarken, benzer terimleri aynı sütuna gelecek biçimde, polinomların birisini ötekinin altına yazmak, benzer terimlerin toplanmasını kolaylaştırabilir. Çıkarma işlemi için de aynı iş yapılabilir:

$$\begin{array}{rcccccccccc} P(x) = & x^4 & & & - & 3x^2 & - & x & + & 7 \\ \mp Q(x) = & & \mp & 7x^3 & \mp & 2x^2 & & & \mp & 2 \\ \hline P(x) - Q(x) = & x^4 & - & 7x^3 & - & x^2 & - & x & - & 5 \end{array}$$

1.9 Uygulamalar

t

1. Aşağıdaki polinomların farklarını bulunuz.

$P(x) = -5x^5 - 17x^2 + x + 1$	$Q(x) = -2x^4 - 3x^2$-7
$P(x) = -x^5 + 5x^3 + 3$	$Q(x) = -8x^4 + 2x^3 - x + 3$
$P(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 4$	$Q(x) = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x - 4$
$P(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 35x^2 + x - 2$	$Q(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x - 3$
$P(x) = 5x^5 - \frac{2}{3}x^4 + x^3 + \frac{1}{5}x + \frac{5}{4}$	$Q(x) = 3x^3 - 3$
$P(x) = (2x^5 - 6x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$	$Q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 7x - 1$

2. İki polinomun farkının derecesinin, derecesi büyük olan polinomun derecesine eşit veya ondan küçük olduğunu gösteriniz.

3. İki polinomun farkının derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesine ne zaman eşit olur?

4. İki polinomun farkının derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesinden ne zaman küçük olur?

5. $P(x) - Q(x)$ polinomunun + işlemine göre tersinin $Q(x) - P(x)$ olduğunu, örneklerle sağlayınız.

1.10 Çarpma

İki polinomun çarpımı, birisinin her teriminin diğerinin her terimi ile ayrı ayrı çarpımlarından oluşan bütün terimlerin cebirsel toplamıdır.

Çarpımı yazarken, terimlerin derecelerine göre, artan ya da azalan sırada dizilmesi, işlemleri kolaylaştırır.

$P(x)$ ile $Q(x)$ polinomlarının çarpımını $P(x).Q(x)$ ya da $P(x)Q(x)$ simgeleriyle göstereceğiz.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$$

polinomlarını verilsin. Yukarıda söylendiği gibi, $Q(x)$ in her terimini $P(x)$ in her terimi ile çarpalım. Sonra, benzer terimleri bir araya getirelim ve onları x in artan derecelerine göre sıralayalım. Aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$P(x).Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

Örnek $P(x) = x^2 - 4x + 3$ ve $Q(x) = 2x - 3x^4 - x^5$ polinomlarının çarpımı

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= (x^2 - 4x + 3)(2x - 3x^4 - x^5) \\ &= 2x^3 - 3x^6 - x^7 - 8x^2 + 12x^5 + 4x^6 + 6x - 9x^4 - 3x^5 \\ &= -x^7 + x^6 + 9x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 6x \end{aligned}$$

Yukarıdaki çarpma tanımında ve örnekte görüldüğü üzere, iki polinomun çarpımı yine bir polinomdur. O halde, şu özeliği söyleyebiliriz.

Özelik 8. *Polinomlar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.*

Ayrıca, çarpımın derecesi, çarpanların derecelerinin toplamına eşittir:

$$der[P(x).Q(x)] = der[P(x)] + der[Q(x)]$$

Örneğin, yukarıdaki örnekte

$$der[P(x)] = 5, \quad der[Q(x)]) = 2 \quad \text{ve} \quad der[P(x).Q(x)] = 7$$

dir.

Toplama ve çıkarma işlemleri için yaptığımız gibi, çarpma işlemini de polinomları alt alta yazarak yapabiliriz. Örneğin,

$$\begin{array}{lcl} P(x) & = & 2x^4 - 3x + 1 \\ Q(x) & = & 2x^2 + x \\ \hline & & \\ & & 2x^5 - 3x^2 + x \\ & & {}_{+}4x^6 - 6x^3 + 2x^2 \\ \hline P(x).Q(x) & = & 4x^6 + 2x^5 - 6x^3 - x^2 + x \end{array}$$

olur.

şimdi, polinomlar kümesi üzerinde çarpma işleminin yer değiştirme, birleşme ve toplama işlemi üzerine dağılma özeliklerine sahip olduğunu örnekler üzerinde gösterelim.

$$P(x) = x^2 + 3x - 2, \qquad Q(x) = -x^2 - 5x + 1$$

polinomları için

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= (x^2 + 3x - 2)(-x^2 - 5x + 1) \\ &= -x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 13x - 2 \\ \\ Q(x).P(x) &= (-x^2 - 5x + 1)(x^2 + 3x - 2) \\ &= -x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 13x - 2 \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Bunu genel olarak ifade edersek;

Özelik 9. *Polinomlar kümesi üzerinde, çarpma işlemi yer değişim özeliğine sahiptir; yani, $P(x), Q(x)$ herhangi iki polinom ise*

$$P(x).Q(x) = Q(x).P(x)$$

eşitliği sağlanır.

$$P(x) = 5x^2 + 6x + 1 \qquad Q(x) = -2x^2 + 3x - 2 \qquad S(x) = x + 1$$

polinomlarının çarpımını, sayılarda olduğu gibi, birleşme özeliğinden yararlanarak yapabiliriz.

$$\begin{aligned} [P(x).Q(x)]R(x) &= [(5x^2 + 6x + 1)(-2x^2 + 3x - 2)](x + 1) \\ &= [-10x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 9x - 2](x + 1) \\ &= -10x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 11x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x)[Q(x).R(x)] &= (-2x^2+3x-2)[(5x^2+6x+1)(x+1)] \\ &= (-2x^2+3x-2)[5x^3+11x+7x+1] \\ &= -10x^5-7x^4+9x^3-3x^2-11x-2 \end{aligned}$$

olur. Genel olarak, şu kural geçerlidir:

Özelik 10. *Polinomlar kümesi üzerinde, çarpma işlemi birleşme özeliğine sahiptir; yani, $P(x), Q(x), R(x)$ herhangi üç polinom ise*

$$[P(x).Q(x)]R(x) = P(x)[Q(x).R(x)]$$

eşitliği sağlanır.

$$P(x) = x^2-2 \qquad Q(x) = x^2-2x+1 \qquad R(x) = 2x^3+3x^2-4$$

polinomları için aşağıdaki işlemleri yapalım.

$$\begin{aligned} P(x)[Q(x)+R(x)] &= (x^2-2)[(x^2-2x+1)+(2x^3+3x^2-4)] \\ &= (x^2-2)(x^2-2x+1)+(x^2-2)(2x^3+3x^2-4) \\ &= (x^4-2x^3+x^2-2x^2+4x-2) \\ &\quad +(2x^5+3x^4-4x^2-4x^3-6x^2+8) \\ &= 2x^5+4x^4-6x^3-11x^2+4x+6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x)[Q(x)+R(x)] &= (x^2-2)[(x^2-2x+1)+(2x^3+3x^2-4)] \\ &= (x^2-2)[x^2-2x+1+2x^3+3x^2-4 \\ &= (x^2-2)[2x^3+4x^2-2x-3] \\ &= 2x^5+4x^4-6x^3-11x^2+4x+6 \end{aligned}$$

olur. Genel olarak, şu kural geçerlidir:

Özelik 11. *Polinomlar kümesi üzerinde, çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır; yani $P(x), Q(x), R(x)$ herhangi üç polinom ise*

$$P(x)[Q(x)+R(x)] = P(x).Q(x)+P(x).R(x)$$

eşitliği sağlanır.

Benzer yolla,

$$[Q(x)+R(x)]P(x) = Q(x)P(x)+R(x)P(x)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu son iki eşitlik, sırasıyla, çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine *soldan ve sağdan dağılma özeliği* diye bilinir.

1.11 Sayıl (skalerle) Çarpma

Bir polinomu bir sayı ile çarpmak demek, polinomun her terimini o sayı ile çarpmak demektir. Bunu biçimsel olarak şöyle tanımlayalım:

Tanım 1.3. *α bir sabit sayı ise,*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinomunun α sabiti ile çarpımı

$$\begin{aligned} \alpha P(x) &= \alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &= \alpha(a_n x^n) + \alpha(a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots \\ &\quad +\alpha(a_1 x) + \alpha(a_0) \\ &= \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0 \end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Burada,

$$\alpha(a_k x^k) = \alpha a_k x^k = (\alpha a_k)x^k$$

olduğuna dikkat ediniz.

Örnek

$P(x) = -4x^5 + 5x^3 - 12$ polinomunu -3 ile çarpalım:

$$\begin{aligned} (-3)P(x) &= (-3)(-4x^5) + (-3)(5x^3) + (-3)(-12) \\ &= 12x^5 - 15x^3 + 36 \end{aligned}$$

Uyarı 1.2. *Yukarıdaki tanımda, α sayısını sabit bir polinom olarak düşünürsek, bir polinomun sayı ile (skalerle) çarpımı, iki polinomun çarpımının özel bir durumu olur.*

Gerçekten, $S(x) = \alpha$ dersek,

$$\alpha\ P(x) = S(x).P(x)$$

yazabiliriz.

Polinomlar kümesi üzerinde tanımladığımız işlemlerin sağladığı özelikleri derlersek, aşağıdaki iki teoremi söyleyebiliriz.

Teorem 1.2.

1. Polinomlar kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.
2. Polinomlar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.
3. Polinomlar kümesinde çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.
4. Polinomlar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine (sağdan ve soldan) dağılma özeliği vardır.

Teorem 1.3. *Polinomlar kümesi, toplama ve çarpma işlemlerine göre bir* halka*'dır.*

1.12 Uygulamalar

1. Aşağıdaki polinomları birbirleriyle çarpınız..

$P(x) = x^2 - 2x - 3$	$Q(x) = x^2 + 3x - 2$
$P(x) = 2x^4 + x^2 - 1$	$Q(x) = x^3 - 1$
$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 4$	$Q(x) = 7x^5 + 2x^3 + 1$
$P(x) = -4x^4 - 7x^3 - x + 4$	$Q(x) = x^5 + 9x^3 + 3x^2 + x + 2$
$P(x) = 3x^4 + \frac{4}{3}x^2 + x - 2$	$Q(x) = -2x^7 - 2x^4 - 3x - 3$
$P(x) = x^4 - \frac{3}{4}x^3 + x^2 + \frac{1}{5}x$	$Q(x) = x^2 - 4$
$P(x) = (-4x^5 + 3x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$	$Q(x) = -2x^3 + 2x^2 + x - 1$
$P(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5}x + \frac{4}{3}$	$Q(x) = 2x^2 - 1$
$P(x) = 5x^3 + 2x - 3$	$Q(x) = x^3 - 1$

2. İki polinomun çarpımının derecesinin, çarpanların derecelerinin çarpımına eşit olduğunu, örneklerle gösteriniz.
3. Polinomlar kümesi üzerinde, çarpma işleminin yer değişim ve birleşim özeliklerine sahip olduğunu örnekler üzerinde gösteriniz.
4. Polinomlar kümesi üzerinde, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özeliğine sahip olduğunu örnekler üzerinde gösteriniz.

1.13 Başlıca Özdeşlikler

Bir polinomun ya da, daha genel olarak, bir cebirsel ifadenin çarpanlarına ayrılması demek, çarpımları sözkonusu cebirsel ifadeye eşit olan terimlerin

bulunması demektir. 1 den farklı çarpanı olmayan polinomlara *asal polinom* denilir. Bazan, verilen bir polinomu asal çarpanlarına ayırmak, onunla yapılan işlemleri kolaylaştırır. Benzer olarak, bir cebirsel ifadeyi, kendisinden daha basit yapıda olan çarpanlarına ayırmak, işlemlerde kolaylık sağlar.

Aşağıda verilen eşitlikler, cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırmak için kullanılan başlıca bağıntılardır. Bu eşitlikler, kullanılan sabit ya da değişkenlerin bütün değerleri için geçerlidir. Dolayısıyla, bunlara *özdeşlik* denilir.

Aşağıdaki özdeşliklerde yer alan harflerin, gerçek sayılar kümesinden seçildiği varsayılacaktır.

- **İki Terim Toplamının Karesi**

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Örnekler:

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

1.

$$\begin{aligned}(17)^2 &= (15+2)^2\\ &= (15)^2+2.15.2+2^2\\ &= 225+60+4\\ &= 289\end{aligned}$$

2.

$$(\frac{5}{3}+\sqrt{3})^2 = \frac{25}{9}+\frac{10\sqrt{3}}{3}+3$$

3.

$$(2x+4y)^2 = 4x^2+8xy+16y^2$$

- **İki Terimin Farkının Karesi**

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a(a-b)-b(a-b)\\ &= a^2-ab-ab+b^2\\ &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

Örnekler:

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

1.

$$\begin{aligned}(19)^2 &= (20-1)^2\\ &= (20)^2-2.20.1+(-1)^2\\ &= 400-40+1\\ &= 361\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(-14)^2 &= (1-15)^2\\ &= 1-2.1.15+(15)^2\\ &= 1-30+225\\ &= 196\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}[(2x+3y)-z]^2 &= (2x+3y)^2-2.(2x+3y).z+z^2\\ &= 4x^2+9y^2+z^2+12xy-4xz-6yz\end{aligned}$$

İki Terimin Toplamı İle Farkının Çarpımı

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b)\\ &= a^2-ab+ab-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

Örnekler:

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

- 1.

$$64x^2 - 25y^2 = (8x + 5y)(8x - 5y)$$

2.

$$\begin{aligned} 14.16 &= (15-1)(15+1) \\ &= (15)^2 - 1^2 \\ &= 225 - 1 \\ &= 224 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (x^8 - y^8) &= (x^4)^2 - (y^4)^2 \\ &= (x^4 + y^4)(x^4 - y^4) \\ &= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ &= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}a^2 + \frac{3}{\sqrt{3}}b\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}a^2 - \frac{3}{\sqrt{3}}b\right) & \\ &= \frac{4}{2}a^4 - \frac{9}{3}b^2 \\ &= 2a^4 - 3b^2 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} (x - 3b)^2 - (3b - a)^2 &= (x - 3b - 3b + a)(x - 3b + 3b - a) \\ &= (x - 6b + a)(x - a) \end{aligned}$$

- **Üç Terim Toplamının Karesi**

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) \\ &= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

Örnekler:

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

1.

$$\begin{aligned}
& (a+b+1)^2-(a-b+1)^2+(a+b-1)^2-(a-b-1)^2 \\
= \; & [(a+b+1)^2-(a-b+1)^2]+[(a+b-1)^2-(a-b-1)^2] \\
= \; & [(a+b+1)-(a-b+1)][(a+b+1)+(a-b+1)] \\
& +[(a+b-1)-(a-b+1)][(a+b-1)+(a-b-1)] \\
= \; & (2b)(2a+2)+(2b)(2a-2) \\
= \; & 2b[(2a+2)+(2a-2)] \\
= \; & 8ab
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
& 4(x-3y)^2-(x-3y)^2+5(x-3y)^2 \\
= \; & [2(x-3y)-(x-3y)][2(x-3y)+(x-3y)] \\
& +5(x-3y)^2 \\
= \; & [(x-3y)][3(x-3y)]+5(x-3y)^2 \\
= \; & 3(x-3y)^2+5(x-3y)^2 \\
= \; & 8(x-3y)^2
\end{aligned}$$

$(x^3-\frac{1}{2}x^2-x)^2$ ifadesinin açılımını bulalım:

$$\begin{aligned}
& \left[x\left(x^2-\frac{1}{2}x-1\right)\right]^2 \\
= \; & x^2\left(x^4+\frac{1}{4}x^2+1+2x^2(-\frac{1}{2}x)-2x^2+2(-\frac{1}{2}x)(-1)\right) \\
= \; & x^6-x^5-\frac{7}{4}x^4+x^3+x^2
\end{aligned}$$

İki Terim Toplamının Küpü

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Örnekler:

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

- 1.

$$\begin{aligned}(17)^3 &= (16+1)^3\\ &= (16+1)((16)^2+2.16.1+1^2)\\ &= 17(256+32+1)\\ &= 17.289\\ &= 4913\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(a^2x+2by^2)^3 &= (a^2x)^3+3(a^2x)^2.(2by^2)+3(a^2x).(2by^2)^2+(2by^2)^3\\ &= a^6x^3+6a^4bx^2y^2+12a^2b^2xy^4+8b^3y^6\end{aligned}$$

- **İki Terim Farkının Küpü**

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

Örnekler:

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

1.

$$\begin{aligned}(24)^3 &= (25-1)^3\\ &= (25-1)((25)^2+2.25.(-1)+(-1)^2)\\ &= 24(225-50+1)\\ &= 24.576\\ &= 13824\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^3 &= (\sqrt[3]{x})^3-3(\sqrt[3]{x})^2\sqrt[3]{y}+3(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})^2-(\sqrt[3]{y})^3\\ &= x-3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2}-y\end{aligned}$$

- **İki Küp Toplamı**

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\ &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ ve solundaki ifadeler yer değiştirirse;

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

olur.

Örnekler:

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

1.

$$8x^3+64y^6=(2x+4y^2)(4x^2-8xy^2+16y^4)$$

2.

$$27a^6+343y^3=(3a^2)^3+(7y)^3=(3a^2+7y)(9a^4-21a^2y+49y^2)$$

3.

$$(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)=x^3+8y^3$$

4.

$$\begin{aligned}(x+y) &= (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^2-(\sqrt[3]{xy})+(\sqrt[3]{y})^2\\ &= (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x^2}-(\sqrt[3]{xy})+\sqrt[3]{y^2}\end{aligned}$$

- **İki Küp Farkı**

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ ve solundaki ifadeler yer değiştirirse;

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

olur.

Örnekler:

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

1.

$$\begin{aligned}1000-512x^3 &= ((10)^3-2^9x^3\\ &= ((10)^3-(2^3x)^3\\ &= (10-8x)(100+80x+64x^2)\\ &= 8(5-4x)(25+20x+16x^2)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}27a^3-125b^3 &= ((3a)^3-(5b)^3\\ &= (3a-5b)(9a^2+15ab+25b^2)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}x^{18}-y^{15} &= (x^6)^3-(y^5)^3\\ &= (x^6-y^5)(x^{12}+x^6y^5+y^{10})\end{aligned}$$

4.

$$(3a)^3-(2b)^3 = (3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$$

1.14 İki Terimlinin Kuvvetleri

(a+b) iki terimli bir cebirsel ifadedir. şimdi bunun doğal sayı kuvvetlerini düşünelim. Çarpma işleminin birleşme özeliğini kullanarak, şu eşitlikleri kolayca bulabiliriz:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b4$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

...

Bu işleme, istediğimiz kadar devam edebiliriz. şimdi, verilen bir n doğal sayısı için genel formülü yazalım:

Teorem 1.4. ***Binom Teoremi***

n doğal bir sayı, a ile b gerçek sayılar ise,

$$(a+b)^n = a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots+$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2}+\frac{n}{1}ab^{n-1}+b^n$$

eşitliği sağlanır.

n doğal sayısı verilmişken, bağıntıyı ispat etmek için (a+b) terimini kendisiyle n kez çarpmak yetecektir. *(Burada sabit bir n seçiliyor. Her n için ispat, tümevarımla yapılır.)*

Bu eşitliğin sağındaki ifadeye $(a+b)^n$ *iki terimlisinin açılımı* ya da *binom açılımı* denilir. Bu açılımda, terimlerin katsayılarına da *binom katsayıları* diyeceğiz. Katsayıların yazılışını kısaltmak için, $a^{n-r}b^r$ teriminin katsayısını

$$C(n,r), \quad C_{n,r}\ , \quad \binom{n}{r}$$

simgelerinden birisiyle göstereceğiz. Buna göre, $(r+1)$ inci terimin binom katsayısı,

$$\begin{aligned} C(n,r) = C_{n,r} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} &= \frac{1.2.3\cdots n}{[1.2.3\cdots(n-r)][1.2.3\cdots r]} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots r} \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır. Binom açılımında kullanacağımız bu simgelerde uyum sağlamak için, aşağıdaki eşitlikleri, tanım olarak alacağız.

$$C(n,0) = 1, \quad C(n,n) = 1$$

Bu simgeleri kullanırsak, Binom açılımını daha kısa ve daha anlaşılır biçimde yazabiliriz:

n doğal bir sayı, a ile b gerçek sayılar ise

$$(a+b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} ab^{n-1} + b^n$$

eşitliği sağlanır.

$(a+b)^r$ açılımındaki terimlerin katsayılarını, bulundukları konumu bozmadan yazarsak, aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

...

1 $C(n-1,1)\cdots C(1,n-1)$ 1

...

Binom katsayılarının oluşturduğu bu tabloya *Pascal Üçgeni* denilir.

n inci kuvvetten binom açılımında şu özelikler sağlanır:

1. $(n+1)$ tane terimi vardır.

2. Her terimde a ve b nin üslerinin toplamı n dir; yani her terimin derecesi n dir.

3. Açılımın ilk terimi $a^n = C(n,0)a^n b^0$ ve son terimi $b^n = C(n,n)a^0 b^n$ dir.

4. Soldan sağa doğru, a nın kuvvetleri birer azalırken, b nin kuvvetleri birer artar.

5. İlk ve son terimlerin katsayıları 1 dir.

6. Bir terimin katsayısı biliniyor ise; bu terimin katsayısı a'nın üssü ile çarpılır ve b nin üssünün bir fazlasına bölünürse, verilen terimden sonra gelen terimin katsayısı bulunur.

7. Baştan ve sondan aynı uzaklıktaki terimlerin katsayıları aynıdır.

Dikkat ederseniz, *Pascal üçgeninde,* şu özelikleri göreceksiniz:

1. Her satırdaki ilk ve son katsayılar 1 dir.

2. Bir katsayı, üst satırda, sol üstünde ve sağ üstünde yer alan sayıların ortasından geçen düşey sütuna yazılır.

3. Bir katsayı, üst satırda, sol üstünde ve sağ üstünde yer alan sayıların toplamıdır.

Binom Teoreminin, her n doğal sayısı ve her a, b gerçek sayıları için sağlandığını söyledik. Bu genel kural yeterlidir; ancak, sayının birisi negatif, öteki pozitif olduğunda, binom teoreminin aldığı biçimi bilmek pratik kolaylık sağlar.

$$(a-b) = [a + (-b)]$$

eşitliğinden yararlanarak, $(a-b)$ nin kuvvetlerini, Binom Teoreminden çıkarabiliriz. Gerçekten, b yerine $-b = [(-1)b]$ koyar; yukarıda söylediğimiz gibi, ardışık çarpmaları yaparsak, aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

Verilen her n doğal sayısı için,

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots +$$

$$(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2}+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}ab^{n-1}+(-1)^nb^n$$

eşitliği sağlanır. Bu formülü, binom simgelerini kullanarak da yazabiliriz:

$$(a-b)^n = C(n,0)a^n - C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 - C(n,3)a^{n-3}b^3 + \cdots +$$
$$(-1)^{n-2}C(n,n-2)a^2b^{n-2} + (-1)^{n-1}C(n,n-1)ab^{n-1} + (-1)^nC(n,n)b^n$$

Örnekler:

1. $(x+y)^6$ ifadesinin açılımını Binom Teoremini kullanarak bulunuz.

$$\begin{aligned}(x+y)^6 &= x^5+\frac{6}{1}x^5y+\frac{6.5}{1.2}x^4y^2+\frac{6.5.4}{11.2.3}x^3y^3\\ &\quad+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}x^2y^4+\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}xy^5\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}y^6\\ &= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6\end{aligned}$$

   olur.

2. $(x+y)^6$ ifadesinin açılımını Pascal Üçgenini kullanarak bulunuz.

   $n=6$ için, katsayıları, Pascal üçgeninden seçelim. Katsayıların, sırasıyla, 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 olduğunu görürüz. O halde, hemen,

$$(x+y)^6 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

   yazabiliriz. Buradan anlaşıldığı gibi, Pascal üçgeni, binom açılımının katsayılarının bulunmasında kolaylık sağlar.

3. $(x+y)^7$ nin binom açılımında x^3 çarpanı içeren terimin binom katsayısını bulalım:

   Üsler toplamı 7 olacağına göre, binom açılımında $x^3y^4 = x^{7-4}.y^4$ ifadesinin katsayısını bulacağız. O halde,

$$C(3,4) = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 35$$

   olur.

4. $(x-3y)^{21}$ in binom açılımında beşinci terimi bulalım:

   Binom açılımında, soldan sağa doğru, ilk beş terimin katsayıları;

$$C(21,0),\ C(21,1),\ C(21,2),\ C(21,3),\ C(21,4)$$

olur. O halde, $C(21,4)$ ün değerini bulmalıyız.

$$C(21,4) = \frac{21.20.19.18}{1.2.3.4} = 5985$$

dir. Artık, açılımın beşinci terimini yazabiliriz:

$$C(21,4)x^{21-4}(-3y)^4 = 5985.(-3)^4x^{17}y^4 = 484785x^{17}y^4 \ .$$

$(a^n + b^n)$ ve $(a^n - b^n)$ İfadelerinin Çarpanları

Daha önce iki kare ya da küpün toplam ve farklarını veren özdeşlikleri elde etmiştik. şimdi, verilen bir n doğal sayısı için, $(a^n + b^n)$ ve $(a^n - b^n)$ ifadelerini çarpanlarına ayırmaya yarayan eşitlikleri vereceğiz.

Yukarıda söylediğimiz gibi, ardışık çarpmalar yapılarak, $\forall n \in N^+$ için;

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$$

ve

$n \in N^+$ ve n tek ise,

$$(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + b^n$$

eşitlikleri çıkarılabilir.

1.15 Alıştırmalar

1. $p(x) = 7x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 1$ ve $q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 1$ polinomları veriliyor. Aşağıdaki polinomları bulunuz.

   a) $p(x) + q(x)$ b) $p(x) - 2q(x)$
   c) $p(x) \cdot q(x)$ d) $3p(x) - q(x)$
   e) $2P(x) + (x-1)q(x)$ f) $xp(x) - x^2q(x)$

2. Aşağıdaki çarpımları bulunuz.

   a) $(x+3)(x^5 - 2x^2 + 1)$
   b) $(x-1)(2x^3 - 5x - 4)$
   c) $(2x^2 + 4x - 6)(3x^2 + 8x + 4)$
   d) $(9x^4 - 12x^3 - x)(x^3 - x^2 - 5x)$
   e) $(3x-1)(2x-5)(x^2 - 2x + 1)$

3. $p(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - x - 1$ polinomu verildiğine göre,

$$(x^2 - 1)p(x) + p(1)$$

polinomunu bulunuz.

4. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlarını bulunuz.

a) $2x^7 + 14x^3 + 5x^2 - 15 + P(x) = 7x^7 + 2x^5 - 11x^3 + 9x - 1$

b) $3x^5 + 2x^3 + 12x - 3 + Q(x) = 5x^6 + 4x^3 - 5x^2 + 15x - 3$

5. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlarını bulunuz.

a) $3x^4 - x^3 + 8x - 3 = (x - 3)p(x)$

b) $-4x^5 - 6x^3 + 3x - 4 = (x - 2)q(x)$

6. $p(x) = x^4 - 4x^2 + x - 1$ polinomu veriliyor. p polinomunun istenen değerlerini hesaplayınız.

a) $p(x - 1)$ b) $p(1 + \sqrt{2})$

c) $p(1 - \sqrt{5})$ d) $p(x - x^{-\frac{1}{2}})$

7. Aşağıdaki kareleri açınız.

a) $\left(\frac{5}{2}x - y\right)^2$ b) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{y}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{3}x + \sqrt{5}y\right)^2$ d) $\left(\frac{5}{7}x^2 + \frac{4}{3}y^2\right)^2$

e) $(3x - 4y)^2$ f) $\left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right)^2$

g) $\left(2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)^2$ h) $\left(\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}}\right)^2$

8. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $\left(\sqrt{5}x + \sqrt{3}y\right)\left(\sqrt{5}x - \sqrt{3}y\right)$

b) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right)\left(\frac{3}{4}y - \frac{1}{2}x\right)$

c) $\left(2x^{3r}+5x^{-2r}\right)\left(2x^{3r}-5x^{-3r}\right)$

d) $(x^2+x-1)\left[x^2-(x-1)\right]$

e) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+b^2\right)$

f) $\left(\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{2xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$

g) $(x^3-x^2+x)^2$

h) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^3$

i) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^5$

j) $\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)^6$

9. İki sayının toplamı ya da farkı biçiminde yazarak, aşağıdaki sayıların karelerini bulunuz.

a) $(17)^2$ b) $(101)^2$ c) $(61)^2$

d) $(-45)^2$ e) $(-39)^2$ f) $(-79)^2$

10. Aşağıdaki sayıları iki sayının toplamı ile farkı biçiminde yazarak, çarpımı bulunuz.

$$14.16, \quad 19.21, \quad 49.51, \quad 69.71$$

Bölüm 2

Polinomlarda Bölme

Polinomlar Bölme İşlemine Kapalı Değildir!

Bir polinomun başka bir polinoma bölünmesi işlemi, bir tamsayının bir başka tamsayıya bölünmesi işlemine çok benzer.

Tamsayılar Kümesinin bölme işlemine kapalı olmayışı, Rasyonel Sayılar Kümesine genişlemeyi nasıl zorunlu kılmışsa, Polinomlar Kümesinin de bölme işlemine kapalı olmayışı, Rasyonel Fonksiyonlar Kümesi'ne genişlemeyi zorunlu kılmıştır.

Bu genişlemeler, bilgi üreten araçlarımızı çoğaltmıştır.

Bu bölümde, Polinomlar Kümesi üzerinde bölme işlemini ayrıntılarıyla inceleyeceğiz.

Örnek

$8x^6 - 4x^4 - x^3 + 1$ polinomunu $2x^2 - x - 1$ polinomuna bölmek için, sırasıyla, aşağıdaki adımları izleyiniz. $8x^6 - 4x^4 - x^3 + 1$ polinomuna *bölünen polinom*, $2x^2 - x - 1$ polinomuna *bölen polinom* diyeceğiz.

1.Adım: Bölünen ve bölen polinomları, x in azalan kuvvetlerine göre sıralayınız. Sıralanmış polinomları, sayıları bölmede kullanılan *bölme tablosu*na benzer bir tabloya yerleştiriniz.

$$
\begin{array}{lll}
 & 8x^6 - 4x^4 - x^3 + 1 & \mid \; 2x^2 - x - 1 \\
 & \mp 8x^6 \pm 4x^5 \pm 4x^4 & \mid \; 4x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \\
\pm & & \\
 & \hline
 & 4x^5 - x^3 + 1 \\
 & \pm 4x^5 \pm 2x^4 \pm 2x^3 \\
\pm & & \\
 & \hline
 & 2x^4 + x^3 + 1 \\
 & \mp 2x^4 \pm x^3 \pm x^2 \\
\pm & & \\
 & \hline
 & 2x^3 + x^2 + 1 \\
 & \mp 2x^3 \pm x^2 \pm x \\
\pm & & \\
 & \hline
 & 2x^2 + x + 1 \\
 & \mp 2x^2 \pm x \pm 1 \\
\pm & & \\
 & \hline
 & 2x + 2
\end{array}
$$

2.Adım: Bölünenin ilk terimi olan $(8x^6)$ yı elde etmek için, bölenin ilk terimi olan $(2x^2)$ yi neyle çarpmak gerektiğini bulunuz. $(2x^2)(4x^4) = 8x^6$ olduğuna göre, aradığımız çarpan $4x^4$ dür. Tabloda bölüme ayrılan yere $4x^4$ yazınız. Bu, bölüm polinomunun ilk terimi olacaktır.

3.Adım: $4x^4$ ile bölen polinomu çarpınız; çarpımın terimlerini bölünenin altına yazınız. Bunu yaparken, benzer terimleri alt alta getirmek, işlemleri kolaylaştırır. Yazdığınız satırın altına, tablodaki gibi, bir çıkarma çizgisi çekiniz. Sonra, ilk iki satırdaki polinomların farkını çizginin altına yazınız. Bunun için, ikinci satırdaki terimlerin işaretlerini değiştirip, ilk iki satırı toplamak kolaylık sağlar. Neden?

4.Adım: Çizginin altına yazdığınız polinoma, birinci fark diyelim. Bu polinomun derecesine bakınız. Derecesi, bölenin derecesinden küçükse, bölme işlemi bitmiştir. Değilse, bölme işlemine devam edilecektir. Örneğimizde, birinci fark polinomu $4x^5 - x^3 + 1$ dir. Bunun derecesi, bölenin derecesinden büyük olduğuna göre, bölme işlemi bitmemiştir.

5.Adım: Birinci fark dediğimiz $4x^5 - x^3 + 1$ polinomuna, 2.Adım'daki yöntemi uygulayarak, bölümün ikinci terimini bulunuz. $4x^5$ terimini elde etmek

için $2x^2$ yi $2x^3$ ile çarpmak gerektiğini göreceksiniz. O halde, bölümün ikinci terimi $2x^3$ olacaktır.

6.Adım: $2x^3$ ile bölen polinomu çarparak, birinci farkın altına yazınız. 3.Adım'da yaptıklarınıza benzer olarak, üçüncü ve dördüncü satırdaki polinomların farkının $2x^4+x^3+1$ olduğunu görünüz. Buna ikinci fark polinomu diyeceğiz.

7.Adım: İkinci fark polinomu için, 4. , 5. , ve 6.Adım'da söylenenlerin benzerlerini tekrarlayarak üçüncü fark polinomunun $2x^3+x^2+1$ olduğunu görünüz.

8. ve 9.Adım: Yukarıdaki işlemleri tekrar ederek, dördüncü farkın $2x^2+x+1$ ve beşinci farkın $2x+2$ olduğunu görünüz.

10.Adım: Beşinci fark polinomunun derecesi, bölenin derecesinden küçük olduğundan, bölme işlemi bitmiştir. Bu sonuncu farka; yani, $2x+2$ polinomuna, *kalan polinom* diyeceğiz.

Sağlama: Yapılan bölme işleminin doğruluğunu sağlamak istersek, sayılardaki bölme işleminin sağlanmasına benzer bir yöntem izleyebiliriz:

(Bölünen) = (Bölen)(Bölüm) + (Kalan)

bağıntısı, polinomlar için de geçerlidir. Yukarıdaki örneğimizde,

$$\begin{array}{lclcl} \textit{Bölünen} & = & P(x) & = & 8x^6-4x^4-x^3+1 \\ \textit{Bölen} & = & Q(x) & = & 2x^2-x-1 \\ \textit{Bölüm} & = & B(x) & = & 4x^4+2x^3+x^2+x+1 \\ \textit{Kalan} & = & K(x) & = & 2x+2 \end{array}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} &8x^6-4x^4-x^3+1 = \\ &\qquad \left(2x^2-x-1\right)\left(4x^4+2x^3+x^2+x+1\right)+(2x+2) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Eşitliğin sağındaki işlemleri yaparak, soldaki ve sağdaki polinomların eşit olduklarını görünüz.

şimdi, polinomlar kümesi üzerinde bölme işlemini daha genel olarak tanımlayabiliriz.

$P(x)$ ile $Q(x)$ polinomları $der[P(x)] \geq der[Q(x)]$ ve $Q(x) \neq 0$ koşullarını sağlasın. $der[K(x)] < der[Q(x)]$ olmak üzere,

$$P(x) = Q(x).B(x) + K(x) \tag{1}$$

eşitliğini sağlayan $B(x)$ ve $K(x)$ polinomlarının bulunması sürecine, $P(x)$ *polinomunun* $Q(x)$ *polinomuna bölünmesi* diyeceğiz. Ayrıca, (1) eşitliğindeki;

$P(x)$ polinomuna, *bölünen*,
$Q(x)$ polinomuna, *bölen*,
$B(x)$ polinomuna, *bölüm* ,
$K(x)$ polinomuna, *kalan*,

denilir. (1) bağıntısını, bir bölme tablosu biçiminde de gösterebiliriz:

$$\begin{array}{rr|l} & P(x) & Q(x) \\ \cline{3-3} - & B(x).Q(x) & B(x) \\ \cline{1-2} & & \\ & K(x) & \end{array}$$

Bu bölme işleminde $K(x) = 0$ ise, (1) eşitliği,

$$P(x) = Q(x).B(x)$$

biçimini, bölme tablosu ise,

$$\begin{array}{rr|l} & P(x) & Q(x) \\ \cline{3-3} - & B(x).Q(x) & B(x) \\ \cline{1-2} & & \\ & 0 & \end{array}$$

biçimini alır. Bu durumda, $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna *tam bölünüyor* denilir. $P(x)$ polinomu, $Q(x)$ ile $B(x)$ polinomlarının çarpımı olduğu için,

$$der[(P(x)] = der[Q(x)] + der[B(x)]$$

eşitliği sağlanır.

Bir polinomun başka bir polinoma bölünmesi işleminin, bir tamsayının başka bir tamsayıya bölünmesi işlemine benzediğini söylemiş ve bu işlemin nasıl yapıldığını, bir örnek üzerinde açıklamıştık. Orada yapılan açıklamaları genelleştirirsek, bölme işleminde izlenecek adımları sıralayabiliriz:

- Bölünen ve bölen polinomlar, x belirsizinin azalan kuvvetlerine göre sıralanır.
- Bölen polinomun baş terimiyle çarpıldığında, bölünen polinomun baş terimini veren terim bulunur; bölümün baş terimi olarak yazılır.
- Bölümün baş terimi, bölen polinom ile çarpılır. Bu çarpım, bölünen polinomun altına yazılır. Bunu yazarken, aynı dereceli terimlerin alt alta getirilmesi işlem kolaylığı sağlayabilir.
- Bu çarpım polinom, bölünen polinomdan çıkarılarak, bulunan fark, çizilen bir çıkarma çizgisinin altına yazılır.

- Yukarıda elde edilen farkın derecesi, bölenin derecesinden küçükse, bölme işlemi biter. Sözkonusu fark, bölme işleminin kalanı olur.

- Yukarıda elde edilen farkın derecesi, bölenin derecesinden büyük ya da ona eşitse, yukarıdaki adımlar, kalan fark polinomun derecesi, bölen polinomun derecesinden küçük oluncaya kadar sürdürülür.

Örnekler:

1. Aşağıdaki bölme işleminin her adımını açıklayınız.

$$
\begin{array}{lll}
 & 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 39x - 45 & |x^2 - 2x + 3 \\ \cline{3-3}
 & \mp 3x^4 \pm 6x^3 \mp 9x^2 & |3x^2 + x - 12 \\
\pm & & \\ \cline{2-2}
 & x^3 - 14x^2 + 39x - 45 & \\
 & \mp x^3 \pm 2x^2 \mp 3x & \\
\pm & & \\ \cline{2-2}
 & -12x^2 + 36x - 45 & \\
 & \pm 12x^2 \mp 24x \pm 36 & \\
\pm & & \\ \cline{2-2}
 & 12x - 9 &
\end{array}
$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 39x - 45 = \\
&\qquad \left(x^2 - 2x + 3\right)\left(3x^2 + x - 12\right) + (12x - 9)
\end{aligned}
$$

yazabiliriz.

2. Aşağıdaki bölme işleminin her adımını açıklayınız.

$$
\begin{array}{rl}
 & 6x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x - 3 \quad \underline{|2x^2 + x - 2} \\
 & \mp 6x^4 \mp 3x^3 \pm 6x^2 \qquad\qquad\quad |3x^2 - 2x + 1 \\
\pm & \\
 & \hline \\
 & -4x^3 + 7x - 3 \\
 & \pm 4x^3 \pm 2x^2 \mp 4x \\
\pm & \\
 & \hline \\
 & 2x^2 + 3x - 3 \\
 & \mp 2x^2 \mp x \pm 2 \\
\pm & \\
 & \hline \\
 & 2x - 1
\end{array}
$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&6x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x - 3 = \\
&\qquad \left(2x^2 - 2x + 1\right)\left(3x^2 - 2x + 1\right) + (2x - 112x - 9)
\end{aligned}
$$

yazabiliriz.

3. $P(x) = x^3 - x^2 + cx + 3$ polinomu $Q(x) = x^2 + x - 1$ polinomuna bölündüğünde kalanın $K(x) = 5x + 1$ olması için c ne olmalıdır?

   Çözüm: Bölen ile bölümün dereceleri toplamı bölünenin derecesine eşittir. O halde, bölünenin derecesi ile bölenin derecesi farkı, bölümün derecesini verecektir. Dolayısıyla, bölüm polinom birinci derecedendir. $B(x) = ax + b$ diyelim.

$$
\begin{aligned}
&x^3 - x^2 + cx + 3 = \\
&\qquad \left(x^2 + x - 1\right)(ax + b) + (5x + 1)
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Eşitliğin sağ yanındaki işlemleri yaparsak;

$$
\begin{aligned}
&x^3 - x^2 + cx + 3 \\
&\quad = \left(ax^3 + bx^2 + ax^2 + bx - ax - b + 5x + 1\right) \\
&\quad = \left(ax^3 + (a + b)x^2 + (b - a + 5)x + (1 - b)\right)
\end{aligned}
$$

olur. Soldaki ve sağdaki polinomların eşit olması için, benzer terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır. O halde

$$a = 1,\ a + b = -1,\ (b - a + 5) = c,\ 1 - b = 3$$

olacaktır. Bu eşitliklerden

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2$$

bulunur.

2.1 Uygulamalar

1. Aşağıdaki eşitliklerden yararlanarak, bölünen, bölen, bölüm ve kalan polinomları belirleyiniz. Bölme tablosunu kullanarak, bölme işlemlerini yapınız.

   (a)

$$8x^5 + 3x^4 - \frac{7}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{7}{4} = \\ \left(2x^2 - x - 1\right)\left(4x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{1115}{4}x + \frac{11}{4}\right) + \left(\frac{11}{4}x + \frac{18}{4}\right)$$

   (b)

$$2x^5 - x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 5x + 3 = \\ \left(2x^2 + 3x\right)\left(x^3 - 2x^2 + 1\right) + (2x + 3)$$

2. $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + px^2 + qx + 10$ polinomunun $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ polinomuna tam bölünebilmesi için p ve q ne olmalıdır?

3. n pozitif bir tamsayı ise, $x^{2n} - y^{2n}$ ifadesini $(x^n - y^n)$ ifadesine bölünüz.

4. n pozitif bir tamsayı ise, $x^{2n} - y^{2n}$ ifadesini $(x^2 - y^2)$ ifadesine bölünüz.

Polinomlar Kümesi Bölme İşlemine Kapalı Değildir

Tamsayılar kümesinin bölme işlemine kapalı olmadığını söylemiştik. Bunun anlamı şudur:

Bir tamsayının başka bir tamsayıya bölümü, bir tamsayı olmayabilir.

Örneğin, $\frac{75}{3} = 25$ olduğundan, bölüm bir tamsayıdır. Ama, $\frac{3}{75}$, bir tamsayı değildir.

Benzer olgu, polinomlar kümesi için de geçerlidir. Bir polinomun başka bir polinoma bölümü, bazan bir polinom olur, bazan da olmaz. Bunu birer örnekle gösterelim.

Örnekler

(a) $x^2 - 3x + 2$ polinomu $x - 2$ polinomuna tam olarak bölünür; bölüm $x - 1$, kalan 0 dır.

(b) $P(x) = 3x^4 - 7x^2 - 1$ polinomunun $Q(x) = x^2 - 3$ polinomuna bölümü bir polinom değildir; çünkü, bölme işleminde kalan 5 dir; dolayısıyla, $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam bölünemez.

O halde, *polinomlar kümesi, bölme işlemine göre kapalı* değildir.

Rasyonel İfadeler

Bir $P(x)$ polinomunun, bir $Q(x) \neq 0$ polinomuna bölümünü, sayılarda olduğu gibi

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

oranıyla göstereceğiz. Bu oran bir polinom olmayabilir. Bu, yeni bir cebirsel ifadedir. Bu tür ifadelere, *rasyonel fonksiyonlar (ifadeler)* diyoruz. Özel olarak, $Q(x) = 1$ alırsak, yukarıdaki oran,

$$\frac{P(x)}{1} = P(x)$$

biçimini alır. Dolayısıyla, her $P(x)$ polinomu bir rasyonel fonksiyondur. Başka bir deyişle, rasyonel fonksiyonlar kümesi, polinomlar kümesini kapsayan daha büyük bir kümedir. Rasyonel Fonksiyonlar Kümesinin yapısını ileride inceleyeceğiz.

Örnekler

1. $3x^5 - 7x^2 + x - 4$ polinomunu, $\dfrac{3x^5 - 7x^2 + x - 4}{1}$ rasyonel foksiyonu biçiminde yazabiliriz.

2. $\dfrac{-2x^4 + x^3 + 8x^2 - 5}{x + 1}$ rasyonel fonksiyonu bir polinoma dönüşebilir; çünkü $-2x^4 + x^3 + 8x^2 - 5$ polinomu $x + 1$ polinomuna tam bölünür. Bölüm $-2x^3 + 3x^2 + 5x - 5$ polinomudur.

3. $\dfrac{3x^3 - 4x + 2}{x + 3}$ rasyonel fonksiyonu bir polinom değildir; çünkü paydaki polinom, paydadaki polinoma tam bölünemez:

$$\frac{3x^3 - 4x + 2}{x + 3} = 3x^2 - 9x + 23 - \frac{67}{x + 3}$$

4. $P(x) = x^2$ ve $Q(x) = 5x^7$ polinomlarını düşünelim.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2}{5x^7} = \frac{1}{5x^5} = \frac{1}{5}x^{-5}$$

dir. x in üssü negatif olduğundan, $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümü bir polinom değildir.

2.2 Bölme Algoritması

c

$f(x)$ ile $g(x)$ herhangi iki polinom, $g(x) \neq 0$ ise, $der[r(x)] < der[g(x)]$ koşulunu ve

$$f(x) = g(x).b(x) + r(x)$$

eşitliğini sağlayan $b(x)$, $r(x)$ polinomları vardır ve bunlar biriciktirler.

Örnek

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2$ ve $g(x) = x^2 - 3x + 2$ polinomları için, bölme algoritmasını sağlayan $b(x)$ ve $r(x)$ polinomlarını bulunuz.

$$f(x) = g(x).b(x) + r(x)$$

eşitliğinin solundaki ve sağındaki polinomlarının dereceleri ve benzer terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır. $g(x)$ in derecesi 2 dir. $der[r(x)] < der[g(x)]$ olacağından, $r(x)$ in derecesi ya 1 ya da 0 olmalıdır. O halde, $r(x) = mx+n$ diyebiliriz. Öte yandan, $g(x)b(x)$ çarpımının derecesi, $f(x)$ in derecesine eşit olmalıdır. Öyleyse, $b(x)$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bunu $b(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde gösterelim. Bunları, yukarıdaki eşitlikte yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2 &= (x^2 - 3x + 2).b(x) + r(x) \\ &= (x^2 - 3x + 2)(ax^2 + bx + c) + (mx + n) \\ &= ax^4 + (-3a + b)x^3 + (2a - 3b + c)x^2 \\ &\quad +(2b - 3c + m)x + (2c + n) \end{aligned}$$

olur. Benzer terimlerin katsayılarını eşitlersek,

$$a = 2,\ (-3a+b) = -3,\ (2a-3b+c) = 1,\ (2b-3c+m) = 1, (2c+n) = -2$$

denklemlerini elde ederiz. Bunların çözümü yapılırsa,

$$a = 2,\ b = 3,\ c = 6,\ m = 13,\ n = -14$$

çıkar. Bulunan katsayılar yerlerine konulursa,

$$b(x) = 2x^2 + 3x + 6, \qquad r(x) = 13x - 14$$

olur.

Bunları, bölme algoritmasında yerlerine koyarak,

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 3x + 6) + (13x - 14)$$

eşitliğinin sağlandığını görünüz.

Kalan Teoremi: *Bir $P(x)$ polinomunun $(x - a)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan, polinomda x yerine a değeri yazılarak elde edilen $P(a)$ gerçek sayısına eşittir.*

$P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölünmesi işleminde bölüm $B(x)$, kalan $K(x)$ olsun. Bölen polinom $(x - a)$ dır ve birinci dereceden bir polinomdur. Kalanın derecesi, bölenin derecesinden küçük olacağına göre, $K(x)$ polinomunun derecesi sıfırdır. O halde, $K(x)$ ya bir sabittir ya da sıfırdır. O halde,

$$P(x) = (x - a).B(x) + K \tag{2}$$

yazabiliriz.

(2) eşitliğinde x yerine a konulursa.

$$P(a) = (a - a)Q(a) + K \Rightarrow P(a) = K$$

olur. Bu, istenen sonuçtur.

2.3 Çarpan Teoremi

Teorem 2.1. ***Çarpan Teoremi:*** *$P(x)$ polinomunun, $(x - a)$ ya tam bölünebilmesi için gerekli ve yeterli koşul $P(a) = 0$ olmasıdır.*

Örnekler:

1. $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 2x^3 - x^2 - 1$ polinomları verildiğine göre

$$f(x) = g(x).b(x) + r(x)$$

Bölme Algoritması'nı sağlayan $b(x)$ ile $r(x)$ polinomlarını bulunuz.

Çözüm: $r(x)$ in derecesi $g(x)$ in derecesinden küçük olacağından $r(x) = mx^2 + nx + p$ biçimindedir. Öte yandan. $g(x)$ ile $b(x)$ in çarpımının derecesi, $f(x)$ in derecesinden büyük olamaz. O halde, $b(x) = 0$ olmak zorundadır. Öyleyse,

$$2x + 1 = (2x^3 - x^2 - 1)(0) + mx^2 + nx + p = mx^2 + nx + p$$

olur. Soldaki ve sağdaki polinomların eşit olabilmesi için, benzer terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır. Buradan

$$m = 0, \quad n = 2, \quad p = 1$$

bulunur. Bunlar yerlerine yazılırsa,

$$b(x) = 0, \quad r(x) = 2x + 1$$

olduğu görülür.

2. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$ polinomunun $x - 1$ ile bölünürse kalan ne olur?

Çözüm:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ve

$$P(1) = 1 + 2 - 2 + 3 = 4 = K$$

bulunur.

3. $P(x) = 2x^3 + x^2 + cx - 3$ polinomunun $x + 1$ polinomuna tam bölünebilmesi için c ne olmalıdır?

Çözüm: $P(x)$ polinomunun $x+1$ ile tam bölünebilmesi için kalan sıfır olmalıdır. Bunu simgelerle gösterirsek,

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

için,

$$K = P(-1) = 0$$

olması gerektiği görülür. O halde,

$$\begin{aligned} 2.(-1)^3 + (-1)^2 + c(-1) - 3 = 0 &\Rightarrow -2 + 1 - c - 3 = 0 \\ &\Rightarrow c = -4 \end{aligned}$$

olmalıdır.

4. $P(t) = t^3 - bt - 5$ polinomu $t + 1$ polinomuna bölündüğünde kalan 3 ise, $t - 1$ ile bölündüğünde kalan ne olur?

   Çözüm: Kalan 3 olduğuna göre

$$\begin{aligned} P(-1) = 3 &\Rightarrow (-1)^3 - (b(-1) - 5 = 3 \\ &\Rightarrow -1 + b - 5 = 3 \\ &\Rightarrow b = 9 \end{aligned}$$

   olmalıdır. O halde, $P(t) = t^3 - 9t - 5$ dir. Bunun $t-1$ ile bölünmesinden çıkacak kalan

$$K = P(1) = 1^3 - 9.1 - 5 = -13$$

   olacaktır.

5. a bir gerçek sayı ve n tek bir tamsayı ise $x + a$ nın $x^n + a^n$ polinomunu tam böldüğünü gösteriniz.

   Çözüm: $P(x)$ polinomunda $x = -a$ konulursa, n tek olduğundan,

$$K = P(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0$$

   çıkar.

6. $P(x) = x^4 + ax^2 + (3a + 1)x + 4a - 5$ polinomu $x - 2$ polinomuna bölündüğünde elde edilen kalan, $x - 1$ ile bölündüğünde elde edilen kalana eşit ise, a nedir?

   Çözüm:

$$\begin{aligned} P(2) &= P(1) \\ 2^4 + a.2^2 + (3a + 1).2 + 4a - 5 &= 1 + a + (3a + 1) + 4a - 5 \\ 16 + 4a + 6a + 4a + 2 - 5 &= 1 + a + 3a + 1 + 4a - 5 \\ 14a + 13 &= 8a - 3 \end{aligned}$$

çıkar. Buradan,

$$14a - 8a = -3 - 13 \Rightarrow 6a = -16 \Rightarrow a = -\frac{8}{3}$$

bulunur.

2.4 Uygulamalar

1. $P(x) = 5x^4 - 2x^3 + x + 5$ polinomunun $x - 2$ ile bölünmesinden elde edilen kalan nedir?
2. $P(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + 12$ polinomunun $x + 3$ ile tam bölünebilmesi için a ne olmalıdır?
3. $P(x) = x^4 + cx^2 + 3x + d$ polinomunun $x - 1$ ile bölünmesindeki kalanın 2 ve $x - 2$ ile bölünmesindeki kalanın 17 olması için c ve d ne olmalıdır?
4. $P(x) = ax^3 - 5x + 2$ polinomu $x + 1$ ile bölündüğünde, kalan 3 ise, a nedir?
5. $P(x) = x^4 + cx^3 - 4x^2 + 10x + d$ polinomunun $(x - 1)^2$ ile tam bölünebilmesi için c ve d ne olmalıdır?

Bir Polinomun $ax + b$ İle Bölünmesinden Elde Edilen Kalan

Bunu *Kalan Teoremi*'nin bir sonucu olarak çıkarabiliriz. Bir $P(x)$ polinomunun $ax + b$ ile bölünmesinden elde edilen bölüm $Q(x)$ ve kalan K olsun. $ax + b = a(x + \frac{b}{a})$, $a.Q(x) = Q_1(x)$ eşitliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} P(x) &= (ax + b).Q(x) + K \\ &= a(x + \frac{b}{a})Q(x) + K \\ &= (x + \frac{b}{a})\,[a.Q(x)] + K \\ &= (x + \frac{b}{a})Q_1(x) + K \end{aligned}$$

yazabiliriz. Öyleyse, *Kalan Teoremi* gereğince, $P(x)$ polinomunda x yerine $-\frac{b}{a}$ konulursa kalan bulunur. Bu ise,

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = K$$

demektir. O halde, *Kalan Teoremi*'ni aşağıdaki biçimde de söyleyebiliriz:

Özelik 12. *Bir $P(x)$ polinomunun $ax+b$ ile bölünmesinden elde edilen kalan, $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ dir.*

Örnekler:

1. $P(x) = -9x^3 - 6x^2 - x + 2$ polinomunun $3x+2$ ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz.

   Çözüm: Kalan Teoremi gereğince,

   $$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

   ve

   $$\begin{aligned} K = P\left(-\frac{2}{3}\right) \quad &\Rightarrow \quad K = (-9).(-\frac{2}{3})^3 - 6(-\frac{2}{3})^2 - (-\frac{2}{3}) + 2 \\ &\Rightarrow \quad K = (-9)(\frac{-8}{27}) - 6(\frac{4}{9}) - (-\frac{2}{3}) + 2 \\ &\Rightarrow \quad K = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} + \frac{2}{3} + 2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{8}{3} \end{aligned}$$

   olur.

2. $P(x) = 25x^3 + 5cx^2 - x - 1$ polinomunun $5x-2$ ile bölünebilmesi için c ne olmalıdır?

   Çözüm:

   $$5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

   olur. O halde, $P(x)$ polinomunda x yerine $\frac{2}{5}$ koyarak,

   $$K = P(\frac{2}{5}) = 0$$

eşitliğini sağlayan c sayısını bulmalıyız.

$$\begin{aligned} P(\frac{2}{5}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 25.(\frac{2}{5})^3 + 5c(\frac{2}{5})^2 - \frac{2}{5} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad 25.(\frac{8}{125}) + 5c(\frac{4}{25}) - \frac{2}{5} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad (\frac{8}{5}) + (\frac{4c}{5}) - \frac{2}{5} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{5} + \frac{4c}{5} = 0 \\ &\Rightarrow \quad c = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

bulunur.

2.5 Uygulamalar

1. $P(x) = ax^3 - x^2 - 3x + 2$ polinomunun $3x - 2$ ile bölünebilmesi için a ne olmalıdır?

2. $2x+1$ polinomunun $P(x) = 2x^3+x^2+cx-3$ polinomunu tam bölmesi için c ne olmalıdır?

3. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 3$ polinomu $2x - 1$ ile bölünüyor. Bölümü ve kalanı bulunuz.

4. $2x^3+5x^2+ax-3$ polinomunun $2x-1$ polinomuna tam bölünebilmesi için a ne olmalıdır?

2.6 Horner Yöntemi ile Bölme

Bir polinomun $(x - a)$ ya da $(ax + b)$ biçimindeki birinci dereceden bir polinoma bölünmesi işleminin kolay yapılmasını sağlayan bir yöntemdir.

Bu yöntemi aşağıdaki örnekler ile açıklayacağız.

Örnekler:

1. $P(x) = 6x^5+x^4+3x^2-x-12$ polinomunun $(x-2)$ ile bölünmesinden elde edilecek bölümü ve kalanı bulunuz.

   Çözüm: Aşağıdaki adımları, sırasıyla izleyeceğiz:

(a) Bölünen polinomun katsayıları x in azalan kuvvetlerine göre sıralanır. Polinomda varolmayan dereceler için, katsayılar 0 olarak yazılır:

$$6, \quad 1, \quad 0, \quad 3, \quad -1, \quad -12$$

Katsayılar, aşağıdaki gibi bir tabloya yerleştirilir.

	6	1	0	3	-1	-12

(b) Tablodaki düşey çizginin soluna, bölenin kökü (böleni sıfır yapan sayı) yazılır. Örneğimizde, bu kök, $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir..

2	6	1	0	3	-1	-12

(c) Bölünen polinomun baş katsayısı olan 6, tabloda görüldüğü gibi çizginin altına indirilir.

2	6	1	0	3	-1	-12
	6					

(d) 2 ile 6 çarpılır, çıkan 12 sayısı, 1 in altına yazılır.

(e) 12 ile 1 ile toplanır, çıkan 13 sayısı 12 nin altına yazılır.

2	6	1	0	3	-1	-12
		12				
	6	13				

(f) 2 ile 13 çarpılır, çıkan 26 sayısı 0 katsayısının altına yazılır. 0 ile 26 toplanır; çıkan 26 sayısı 26 nın altına yazılır.

(g) İşleme böyle devam edilirse, aşağıdaki tablo elde edilir.

2	6	1	0	3	-1	-12
		12	26	52	110	218
	6	13	26	55	109 ‖	206

Sonuçta elde edilen tablonun alt satırındaki ilk beş sayı, sırasıyla, bölümün katsayılarıdır. En sağdaki 206 sayısı ise kalandır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \textit{Bölüm} \quad &: \quad B(x) = 6x^4 + 13x^3 + 26x^2 + 55x + 109 \\ \textit{Kalan} \quad &: \quad K = 206 \end{aligned}$$

olur. O halde,

$$6x^5 + x^4 + 3x^2 - x - 12 = (x-2)(13x^4 + 13x^3 + 26x^2 + 55x + 109) + 206$$

yazılabilir.

2. $P(x) = 3x^4-8x^3+3x^2+2x+5$ polinomunun $(3x+1)$ ile bölünmesinden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.

   Polinomun katsayıları $3, -8, 3, 2, 5$ dir. Öte yandan, bölenin kökü,

   $$3x + 1 = 3(x + \frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

   dür. şimdi, bölüm ve kalanın katsayılarını bulmak için, Horner yöntemini uygulayalım:

   $$\begin{array}{c|ccccc} -\frac{1}{3} & 3 & -8 & 3 & 2 & 5 \\ & & -1 & 3 & -2 & 0 \\ \hline & 3 & -9 & 6 & 0 \,\| & 5 \end{array}$$

   Buradan, bölme algoritması uyarınca,

   $$\begin{aligned} p(x) &= (x + \frac{1}{3})(3x^3 - 9x^2 + 6x) + 5 \\ &= 3(x + \frac{1}{3})(x^3 - 3x^2 + 2x) + 5 \\ &= (3x + 1)(x^3 - 3x^2 + 2x) + 5 \end{aligned}$$

   yazabiliriz. Demek ki, alt satırdaki ilk dört sayıyı, bölenin baş katsayısı olan 3 ile bölersek, bölümün katsayıları olarak, $1, -3, 2, 0$ sayılarını buluruz. Kalan ise, satırın sonundaki 5 sayısıdır. Öyleyse, bölüm

   $$B(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

   dir. Dolayısıyla,

   $$3x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x + 5 = (3x + 1)(x^3 - 3x^2 + 2x) + 5$$

   eşitliği sağlanır.

2.7 Bir Polinomun $(x-a)(x-b)$ İle Bölünmesinden Elde Edilen Kalan

Problemi örnekler üzerinde düşünelim.

1. $P(x) = x^4 - x^3 + cx^2 + dx - 6$ polinomunun $(x - 1)(x + 3)$ çarpımı ile tam bölünebilmesi için c ve d ne olmalıdır?

Çözüm: $P(x)$ polinomunun $(x-1)(x+3)$ ile tam bölünebilmesi için, önce $P(x)$ polinomu $x-1$ ile tam bölünmelidir. Sonra, bu bölme işleminden elde edilen $Q(x)$ bölüm polinomu da $x+3$ ile bölünebilmelidir.

$P(x)$ polinomunu $x-1$ ile bölmek için, Horner yöntemini kullanalım.

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -1 & c & d & -6 \\ & & 1 & 0 & c & c+d \\ \hline & 1 & 0 & c & c+d \,\| & c+d-6 \end{array}$$

olduğundan, bölüm: $Q(x) = x^3 + cx + (c+d)$ dir. Tam bölünebilme koşulu, kalanın 0 olmasını gerektirir. O halde

$$c + d - 6 = 0$$

olmalıdır. şimdi de, elde ettiğimiz $Q(x)$ bölümünü $x+3$ ile bölelim.

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & 0 & c & c+d \\ & & -3 & 9 & -3c-27 \\ \hline & 1 & -3 & c+9 \,\| & -2c+d-27 \end{array}$$

Son satırdaki ilk üç sayı, $B(x)$ bölümünün katsayılarıdır. Sonuncusu kalandır. $Q(x)$ polinomunun $(x+3)$ ile tam bölünebilmesi için, kalan sıfır olmalıdır. O halde,

$$-2c + d - 27 = 0$$

olacaktır. Bunu ve yukarıdaki koşulu bir arada çözersek,

$$c = -7, \quad d = 13$$

çıkar. Öyleyse,

$$Q(x) = x^3 - 7x + 6, \qquad B(x) = x^2 - 3x + 2, K(x) = 0$$

dır. Buradan,

$$x^4 - x^3 + cx^2 + dx - 6 = (x-1)(x+3)(x^2 - 3x + 2)$$

eşitliği yazılabilir.

2. $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + cx^2 + dx - 4$ polinomunun $x^2 - 5x + 4$ ile tam bölünebilmesi için c ve d ne olmalıdır?

   Bölen polinomu, $Q(x) = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ biçiminde çarpanlarına ayıralım. Artık, yukarıdaki yöntemi uygulayabiliriz. $P(x)$ polinomunu $x-1$ ile bölmek için, Horner yöntemini kullanalım.

1	2	-7	c	d	-4
		2	-5	$c-5$	$c+d-5$
	2	-5	$c-5$	$c+d-5 \parallel$	$c+d-9$

olduğundan, bölüm: $S(x) = 2x^3 - 5x^2 + (c-5)x + (c+d-5)$ dir. Tam bölünebilme koşulu, kalanın 0 olmasını gerektirir. O halde

$$c + d - 9 = 0$$

olmalıdır. şimdi de, elde ettiğimiz $S(x)$ bölümünü $x-4$ ile bölelim.

4	2	-5	$c-5$	$c+d-5$
		8	12	$4c+28$
	2	3	$c+7 \parallel$	$5c+d+23$

Son satırdaki ilk üç sayı, $B(x)$ bölümünün katsayılarıdır. Sonuncusu kalandır. $S(x)$ polinomunun $(x-4)$ ile tam bölünebilmesi için, kalan sıfır olmalıdır. O halde,

$$5c + d + 23 = 0$$

olacaktır. Bunu ve yukarıdaki koşulu bir arada çözersek,

$$c = -8, \quad d = 17$$

çıkar. Öyleyse,

$$S(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 17,\ B(x) = 2x^2 + 3x - 1,\ K(x) = 0$$

dır. Buradan,

$$2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 17x + -4 = (x-1)(x-4)(2x^2 + 3x - 1)$$

eşitliği yazılabilir.

3. Bir $P(x)$ polinomunun $(2x-1)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 2 ve $(x-2)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 5 ise, $(x-2)(2x-1)$ çarpımı ile bölünmesinden elde edilen kalan nedir?

   Çözüm: $P(x)$ in $(x-2)(2x-1)$ ile bölününce, kalan ençok birinci dereceden bir polinomdur. Buna $K(x) = cx + d$ diyelim. Bölüm $Q(x)$ olmak üzere,

$$P(x) = (x-2)(2x-1)Q(x) + cx + d$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan,

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow +c\left(\frac{1}{2}\right) + d = 2$$

$$P(2) = 5 \Rightarrow 2c + d = 5$$

yazabiliriz. Bu eşitliklerden, $c = 2, \quad d = 1$ çıkar. Öyleyse, aradığımız kalan $2x + 1$ dir.

4. $P(x) = ax^3 - bx^2 - 9x + 18$ polinomunun $(x-2)(x+3)$ ile tam bölünmesi için, a ve b ne olmalıdır?

   Çözüm: $P(x)$ polinomu hem $x - 2$ hem de $x - 3$ ile tam bölünürse, çarpımları ile de tam bölünür. O halde,

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

   için,

$$\begin{aligned} P(2) = K = 0 &\Rightarrow 8a - 4b - 18 + 18 = 0 \\ &\Rightarrow 2a - b = 0 \\ &\Rightarrow 2a = b \end{aligned}$$

   ve

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

   için,

$$\begin{aligned} P(3) = K = 0 &\Rightarrow 27a - 9b - 27 + 18 = 0 \\ &\Rightarrow 27a - 9b - 9 = 0 \end{aligned}$$

   olur. Bu son eşitlikte, öncekinden elde edilen $b = 2a$ bağıntısı kullanılırsa,

$$27a - 9(2a) - 9 = 0 \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$$

$$b = 2a \Rightarrow b = 2.1 \Rightarrow b = 2$$

   bulunur.

5. $P(t) = t^5 - 6t^3 - 3t + 2$ polinomu $Q(t) = (t-2)(t+2)$ ile bölünüyor. Bölme işlemini yapmadan, elde edilen kalanı bulunuz.

   Çözüm: $Q(t) = (t-2)(t+2) = t^2 - 4$ olduğundan, bölenin derecesi 2 dir. Dolayısıyla, ya kalanın derecesi 1 dir ya da kalan bir sabittir. $K(t) = at + b$ diyelim.

$$\begin{array}{rcrcrcr} P(2) & = & -20 & \Rightarrow & 2a+b & = & -20 \\ P(1) & = & 24 & \Rightarrow & -2a+b & = & -24 \end{array}$$

   olur. Sağdaki iki eşitlikten $a = -11, \quad b = 2$ bulunur. O halde, kalan, $K(t) = -11t + 2$ dir.

   Aynı sonucu, verilen polinomda, t^2 yerine 4 koyarak da elde edebiliriz. Gerçekten,

$$P(t) = t^5 - 6t^3 - 3t + 2 = (t^2)^2.t - 6t^2.t - 3t + 2$$

   eşitliğinin sağ yanı, $t^2 = 4$ konumuyla, $K(t) = -11t + 2$ kalanını verir.

6. $Q(x) = x^2 - 2x - 3$ polinomunun $P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + 3x$ polinomunu tam bölmesi için p ve q ne olmalıdır?

   Çözüm: $Q(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ olduğundan, $P(x)$ polinomu hem $x - 3$ ile hem de $x - 1$ ile tam bölünmelidir. Öyleyse, *Kalan Teoremi* gereğince,

$$\begin{array}{rcl} P(3) = 0 & \Rightarrow & 3^4 + 3^3 p + 3^2 q + 3.3 = 0 \\ & \Rightarrow & 81 + 27p + 9q + 9 = 0 \\ & \Rightarrow & 27p + 9q + 9 = 0 \\ P(1) = 0 & \Rightarrow & (-1)^4 + (-1)^3 p + (-1)^2 q + 3(-1) = 0 \\ & \Rightarrow & 1 - p + q - 3 = 0 \\ & \Rightarrow & -p + q - 2 = 0 \end{array}$$

   çıkar. Buradan, $p = -3, \quad q = -1$ bulunur.

2.8 Uygulamalar

1. $(x-1)(x+2)$ çarpımının $P(x) = x^4 + x^3 + cx^2 + dx - 2$ polinomunu tam bölmesi için c ve d ne olmalıdır?

2. Bir $P(x)$ polinomunun $(x+1)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 6; $(x-2)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan -3 ise, $P(x)$ polinomunun $(2x-1)(2x+1)$ çarpımına bölünmesinden elde edilen kalan nedir?

3. Bir $P(x)$ polinomunun $(2x-1)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 1; $(2x+1)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan -1 ise, $(2x-1)(2x+1)$ çarpımına bölünmesinden elde edilen kalan nedir?

4. Bir $P(x) = (x^3 - cx^2 + dx + 5)^4$ polinomunun katsayıları toplamı 3 dür. Polinom $(2x-2)$ ile bölündüğünde kalan ne olur?

5. $p(x) = x^3 - ax^2 - 2x + 4$ polinomu $x+1$ ve $x-2$ ile bölündüğünde kalanlar, sırasıyla, K_1 ve K_2 dir. $K_2 = 2K_1$ olması için a kaç olmalıdır?

Bir Polinomun $(x^2 \pm a), (x^3 \pm a)$ ve $(x^4 \pm a)$ İle Bölünmesinden Elde Edilen Kalanlar

Bu problemlerde değişken değiştirmek kolaylık sağlar. Bunu örnekler üzerinde görelim.

Örnekler:

1. $P(x) = x^{27} - 2x^{18} + 4$ polinomu $x^3 + 1$ polinomuna bölünürse kalan ne olur?

   Çözüm: Bu tür problemlerde değişken değiştirmek uygun olur. $x^3 = t$ dersek, verilen polinomu

   $$P(x) = (x^3)^9 - 2(x^3)^6 + 4 = t^9 - 2t^6 + 4 = Q(t)$$

   biçiminde yazabiliriz. Ayrıca $x^3 + 1 = t + 1$ olduğuna göre,

   $$Q(-1) = K = (-1)^9 - 2(-1)^6 + 4 = 1$$

   olur.

2. $P(x) = 4x^8 - 2x^6 - 2x^2 + 3$ polinomunun $(x^2 - 2)$ ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz.

   $$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$$

   olur.

   $P(x)$ polinomunu x^2 nin kuvvetlerine göre düzenleyelim.

   $$P(x) = 4(x^2)^4 - 2(x^2)^3 - 2x^2 + 3$$

   tür.

$P(x)$ polinomunun (x^2-2) ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulmak için $P(x)$ polinomunda x^2 yerine 2 yazılır.

$$\begin{aligned} K &= 4(2)^4 - 2(2)^3 - 2(2) + 3 \\ &= 4.16 - 2.8 - 4 + 3 \\ &= 47 \end{aligned}$$

bulunur.

3. $P(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + 1$ polinomunun (x^3+2) ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulalım.

$$x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = -2$$

olur. Polinom,

$$P(x) = (x^3)^2.x + 2(x^3).x^2 - x^3.x + 1$$

biçiminde düzenlenip, kalanı bulmak için, x^3 yerine -2 yazmak yetecektir.

$$\begin{aligned} K(x) &= (-2)^2.x + 2.(-2)x^2 - (-2)x + 1 \\ &= -4x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

4. Bir $P(x)$ polinomunun $(x-a)(x-b)$ çarpımına bölünmesinde, bölme işlemini yapmadan bölümü ve kalanı bulunuz.

Çözüm: $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölünmesinden elde edilen bölüm $Q(x)$, kalan K_1 olsun. Bölme Algoritması gereğince,

$$P(x) = (x-a)Q(x) + K_1 \qquad (*)$$

dir. Aynı düşünüşle, $Q(x)$ polinomunun $(x-b)$ ye bölünmesinden çıkan bölüm $B(x)$, kalan K_2 ise, Bölüm eşitliği,

$$Q(x) = (x-b)B(x) + K_2$$

olur. Bu değer, (*) eşitliğinde yerine yazalırsa,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a)[(x-b)B(x) + K_2] + K_1 \\ &= (x-a)(x-b)B(x) + (x-a)K_2 + K_1 \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlik şu anlama gelir: $P(x)$ polinomunun $(x-a)(x-b)$ çarpımı ile bölünmesinden elde edilecek bölüm $B(x)$, kalan ise,

$$K(x) = (x-a)K_2 + K_1$$

dir.

2.9 Alıştırmalar

1. $-3x^3+x^2+2x-2+x$ polinomunu $-3x+x^2+2$ polinomuna bölünüz.
2. $3x^5+19x^4-25x^3+50x^2-28x+16$ polinomunu x^3+7x^2-5x+4 polinomuna bölünüz.
3. x^3-x^2+5x+4 polinomunu x^2-2x-1 polinomuna bölünüz.
4. $2x^4+12x^3+61x^2+5x-4$ polinomunu $2x^2-7x+5$ polinomuna bölünüz.
5. $16x^3+4x^2-6$ polinomunu $4x^2-2x+1$ polinomuna bölünüz.
6. $P(x)=7x^5-4x^4-13x^3+2x-1$ polinomunun $(x-2)$ ile bölünmesinden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.
7. $P(x)=x^3+x+q$ polinomunun $x+2$ ile tam bölünebilmesi için q ne olmalıdır?
8. $P(x)=2x^4-3x^3+22x-15$ polinomunun $(x+2)(x-3)$ çarpımı ile bölünmesinden elde edilen kalanı, bölme işlemi yapmadan bulunuz.
9. $3x^4+5x^3+2x^2-3x+2$ polinomu x^3+x^2-1 ile bölündüğünde, kalan 4 ise, bölüm nedir?
10. $P(x)=x^4+3x^2+mx+n$ polinomunun x^2+5x+1 ile tam bölünebilmesi için m ve n nin alacağı değerleri bulunuz.
11. x^7+1 polinomunu $x-1$ polinomuna bölünüz.
12. $P(x)=x^6+2x^4-2x^2-3$ polinomunun (x^2+3) ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz.
13. $2x+1$ polinomunun, ax^3-x^2+x+1 polinomunu tam bölmesi için a ne olmalıdır?
14. $P(x)=ax^3-x^2-5x+2$ polinomunun $(3x-2)$ ile bölünebilmesi için a ne olmalıdır?
15. $P(x)=(x+4)^3-(x+3)^{n+1}-3$ polinomu $x+4$ ile bölününce kalan 2 ise n ne olmalıdır?
16. Bir $P(x)$ polinomu $x+1$ ile bölününce kalan -8 dir. Bir $Q(x+1)$ polinomu $x+2$ ile bölündüğünde kalan 3 dür. $P(x)+x^4.Q(x)$ polinomu $x+1$ ile bölününce kalan ne olur?

17. $P(x) = x^3 - cx^2 - 2x + 4$ polinomu $x+1$ ile bölünürse kalan K_1, $x-2$ ile bölünürse kalan K_2 dir. $2k_1 = K_2$ olması içim c ne olmalıdır?

18. $(x-1)P(x+1) = x^3 + x - 2$ ise, $P(x)$ nedir?

19. x^3+1 polinomunun $P(x) = 2x^6+cx^3+5$ polinomunu tam bölebilmesi için, c ne olmalıdır?

20. $p(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 27$ polinomu $q(x)$ ile bölündüğünde bölüm $x + 5$ ise, kalan nedir?

21. $P(x)$ polinomunun, $Q(x) = x^2 - 2x + 3$ polinomuna bölünmesinden elde edilen bölüm $B(x) = 4x^2 + 4x - 1$ ve kalan $K(x) = 5x - 1$ ise, $P(x)$ polinomunu nedir?

22. $P(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x + 4$ polinomunun $(x - 2)$ ile bölünmesinden elde edilecek kalanı, bölme işlemini yapmadan bulunuz.

23. $P(x) = 2x^3 - mx^2 + 3x - 1$ polinomunun $(x - 3)$ ile bölünebilmesi için m ne olmadır?

24. $P(x) = x^4 + ax^2 + (3a + 1)x + 2a - 5$ polinomunun $(x - 2)$ ile bölünmesinden kalan, $(x - 1)$ ile bölünmesinden kalana eşit ise, m nedir?

25. $P(x) = -x^3 + 3x^2 + mx + n$ polinomunun $x + 3$ e bölünmesinden kalan 49 ve $x - 5$ e bölünmesinden kalan -39 ise, m ve n nin değerini bulunuz.

26. Bir $P(x)$ polinomunun $(x + 1)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 23, $(x - 4)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 3 ise, $(x + 1)(x - 4)$ çarpımına bölünmesinden elde edilecek kalanı bulunuz.

27. Bir $P(x)$ polinomunun $(3x - 4)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 2, $(x - 1)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 1 ise, $(3x - 4)(x - 1)$ çarpımına bölünmesinden elde edilecek kalanı bulunuz.

28. Bir $P(x)$ polinomunun $(2x-1)(3x+2)$ çarpımına bölünmesinden elde edilen kalan $(7x - 11)$ dir. Bu polinomun $(3x + 2)$ ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz.

29. $P(x) = x^5 - 6x^3 - 3x + 2$ polinomunun $(x - 2)(x + 2)$ çarpımına bölünmesinden elde edilecek kalanı, bölme işlemi yapmadan bulunuz.

30. $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2ax + 1$ polinomunun $x - 1$ ile tam bölünebilmesi için a ne olmalıdır?

31. $P(2x + 4) = mx^3 - 6x^2 + 8$ ise, $P(x)$ polinomunun $x - 2$ ye tam bölünebilmesi için m ne olmalıdır?

32. $P(x) = x^4 - 2x^2 + ax - 1$ polinomunun $x - 2$ ve $x + 1$ ile bölünmesinden elde edilen kalanlar aynı ise, a nedir?

33. $x^{24} - 3x^{16} + x^8 - 2$ polinomunu $x^4 - \sqrt{2}$ polinomuna bölünüz.

34. $x^3 + (mm + 1)x^2 + (n + 2)x - 64$ ifadesinin bir tam küp olması için, m ile n arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır? $(a - 2 + c)^{10}$ açılımında katsayılar toplamı ne olur?

35. $P(x) = x^3 - 4x^2 + mx + n$ polinomunun $(x^2 - x)$ ile bölümünden elde edilen kalan $3x + 2$ ise, $m.n$ kaçtır?

36. $2x^{-3r} + x^3 - 1$ polinomu, r nin hangi değerleri için, $x + 1$ ile tam bölünebilir?

37. $P(x) = x^{15} + x^{10} - 3x^7 - 8x^6 + x^5 - x^2 + 9$ polinomunu $x^3 - 2$ ile bölünüz.

38. Bir $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ ile bölümü $x^2 - 1$ ise, $Q(x)$ in derecesi en az kaç olmalıdır?

39. $P(x) = x^{4r+2} - 2x^{4r+1} + 3x^2 - 2x + 1$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan nedir? $P(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölünmesinden kalan 3; $x + 3$ ile bölünmesinden kalan -17 dir. $(x - 1)((x + 3)$ ile bölünmesinden kalan ne olur?

40. $P(x + 3) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ veriliyor. $P(x + 2)$ polinomu $x - 2$ ile bölünürse, kalan nedir?

Bölüm 3

Polinomlaarın Çarpanlara Ayrılması

3.1 Karmaşıkları Basite İndirgemek!

Polinomların çarpanlara ayrılması, tamsayıların çarpanlara ayrılmasına benzer. Örneğin,

$$192 = 3.64, \qquad 192 = 3.4.16, \quad 192 = 2.3.32$$

ifadeleri, 192 nin farklı çarpanlara ayrılışıdırlar. Bu farklılıkları ortadan kaldırmak için, tamsayıları asal çarpanlarına ayırırız. 192 tamsayısını asal çarpanlarına ayırırsak,

$$192 = 2.2.2.2.2.2.3 = 2^6.3$$

olur. Asal çarpanlara ayrılış tektir ve her tamsayıya uygulanabilir.

Benzer uygulamayı polinomlar için yapacağız.

Tanım: *Bir polinomun çarpanlara ayrılması, birden fazla polinomun çarpımı olarak ifade edilmesidir.*

Bir $P(x)$ polinomu bir $Q(x)$ polinomuna bölündüğünde, bölüm $B(x)$ ve kalan $K(x)$ ise,

$$P(x) = Q(x).B(x) + K(x)$$

eşitliğinin varlığını biliyoruz. Bu eşitlikte, kalan sıfır ise, $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam olarak bölünür ve yukarıdaki bölme eşitliği,

$$P(x) = Q(x).B(x)$$

biçimini alır. Sağ taraf, $P(x)$ in çarpanlara ayrılmışıdır. Bu eşitlikteki $Q(x)$ ile $B(x)$ polinomlarına $P(x)$ polinomunun çarpanları, $P(x)$ polinomuna da çarpanlara ayrılan polinom denilir.

Örnekler
1) $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$
2) $2x^3 + 5x^2 + 3x - 3 = (2x-1)(x^2+3x+3)$
3) $2x^5 - x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x = x(2x+3)(x^3 - 2x^2 + 1)$
4) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$
5) $x^2 - 25 + 3(x+5) = (x-2)(x+5)$

Bir polinomun yukarıdaki gibi çarpanlara ayrılması tek bir biçimde olmayabilir. Öyleyse, tamsayılarda olduğu gibi, çarpanlara ayırmanın tek bir biçimde olacağı bir kavramı geliştirmeliyiz. Bunu yapabilmek için, tamsayılar kümesinde asal sayıların oynadığı role benzer bir rolü, polinomlar kümesinde oynayacak ögeler tanımlamalıyız. Asal sayı, 1 den farklı tamsayı çarpanı olmayan sayıdır. Bunun benzerini polinomlar için tanımlamak zor olmayacaktır.

İndirgenemeyen Polinom

Sabit olmayan polinomların çarpımı olarak yazılamayan bir polinoma *indirgenemeyen polinom* denilir.

Örnekler Aşağıdaki polinomlar, sabit olmayan polinomların çarpımı olarak yazılamazlar; dolayısıyla, indirgenemeyen birer polinomdur.
1) $2x - 7$
2) $5x + 10$
3) $x^2 + 1$
4) $x^2 + x + 64$
5) $2x^2 - 3x + 23$

Asal Polinom *Baş katsayısı 1 olan indirgenemeyen polinom.*

Örnekler

$$x^2 + 3, \quad x^2 - x + 2, \quad x^2 - x + 41, \quad x^4 + 5$$

3.2 ebob, ekok

Polinomlar için *ebob* ve *ekok* kavramları tamsayılardakine çok benzer.

Tam katsayılı iki ya da daha çok polinomu tam bölen bir polinom, söz konusu polinomlar için bir ortak bölendir (çarpandır). Ortak bölenler arasında, derecesi ve başkatsayısı en büyük olan polinom, sözkonusu polinomlar için, *en büyük ortak bölen (ebob)*'dir. $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlarının en büyük ortak böleni $ebob(p(x), q(x))$ simgesiyle gösterilir.

Tam katsayılı iki ya da daha çok polinoma tam bölünen bir polinom, söz konusu polinomlar için bir ortak kat'dır. Ortak katlar arasında, derecesi ve başkatsayısı en küçük olan polinom, sözkonusu polinomlar için, *en küçük ortak kat (ekok)*'dır. $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlarının en küçük ortak katı $ekok(p(x), q(x))$ simgesiyle gösterilir.

Bir polinomun terimleri için *ebob* ve *ekok* tanımları, polinomun terimleri ayrı ayrı birer polinom imiş gibi düşünülerek, yukarıdaki tanımlardan çıkarılır.

Sabit polinomlar için, bu kavramlar, tamsayılar için verilen tanımlarına indirgenmiş olur.

1 sayısından başka ortak bölenleri (çarpanları) olmayan cebirsel ifadelere, *aralarında asaldır,* denilir.

İki ya da daha çok polinomun *ebob*'i, indirgenemez ortak çarpanların en küçük üslülerinin çarpımına eşittir.

İki ya da daha çok polinomun *ekok*'ı, indirgenemez ortak çarpanların en büyük üslüleri ile ortak olmayanların hepsinin çarpımına eşittir.

Aralarında asal iki polinomun *ekok*, bu polinomların çarpımıdır.

Örnekler

1. $p(x) = 3x^3 + 6x^2 + 3x$ ve $q(x) = 5x^2 - 5$ polinomlarının *ebob*'i ile *ekok*'nı bulunuz.

   Bu polinomları asal çarpanlarına ayıralım: $p(x) = 3x(x+1)^2$ ve $q(x) = 5(x+1)(x-1)$ olduğundan,

   $$ebob(p(x), q(x)) = (x+1)$$
   $$ekok(p(x), q(x)) = 3.5x((x-1)(x+1)^2$$

2. $p(x) = 9x^3 - 3x^2 - 8x + 4$ ve $q(x) = 4x^4 - 12x^2 - 8x$ polinomlarının *ebob*'i ile *ekok*'nı bulunuz.

Bu polinomları indirgenemez çarpanlarına ayıralım: $p(x) = (x+1)(3x-2)^2$ ve $q(x) = 2^2x(x+1)^2(x-2)$ olduğundan,

$$ebob(p(x), q(x)) = (x+1)$$

$$ekok(p(x), q(x)) = 2^2x(x-2)(x+1)^2(3x-2)^2$$

3. $p(x) = 18x^2 - 3x$ ve $q(x) = 25x - 5$ polinomlarının *ebob*'i ile *ekok*'nı bulunuz.

   Bu polinomları indirgenemez çarpanlarına ayıralım: $p(x) = 3x(6x-1)$ ve $q(x) = 5(5x-1)$ olduğundan,

   $$ebob(p(x), q(x)) = 1$$

   $$ekok(p(x), q(x)) = 3.5(5x-1)(6x-1)$$

   olur.

Gruplama (Paranteze Alma)

Birden çok terimi olan bir cebirsel ifadede, bazı terimleri bir bütün olarak işlemlere sokmak istediğimizde, o terimleri bir araya getirip ortak parantez içine yazarız. Ortak parantez olarak , (),[],{} çiftlerinden herhangi birisini kullanabiliriz.

Terimleri gruplandırarak paranteze alırken, şu kurallar uygulanır:

1. Parantezin önüne + ya da - simgeleri konulabilir.
2. Parantezin önünde + simgesi varsa, paranteze giren terimler, kendi işaretleriyle alınır; yani + lar + işaretiyle, - ler - işaretiyle yazılırlar.
3. Parantezin önünde - simgesi varsa, paranteze giren terimler, kendi işaretlerinin tersiyle alınır; yani + lar - işaretiyle, - ler + işaretiyle yazılırlar. Başka bir deyişle, parantezin önüne - simgesini koymak, parantez içindeki terimleri -1 ile çarpmak demektir.

Örneğin, $7a^3b^4x^2y - 3a^5b^3x^2y^5 - 6bbx^4y^2 + 8a^2x^4y^5 - 3xy$ ifadesinde birinci ve dördüncü terimleri bir arada gruplamak istersek,

$$-3a^5b^3x^2y^5 - 6bbx^4y^2 - 3xy + (7a^3b^4x^2y + 8a^2x^4y^5)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada, parantezin önüne - koyacak olursak, ifademiz,

$$-3a^5b^3x^2y^5 - 6bbx^4y^2 - 3xy - (-7a^3b^4x^2y - 8a^2x^4y^5)$$

biçimini alır.

Gruplamada, gerekirse, iç-içe parantezler kullanılabilir. İç-içe parantez kullanılırken de, yukarıda söylenen işaret kuralına uyulur. İçteki her parantez, bir terim imiş gibi işlem görür.

Grubun Bozulması (Parantez Açma)

Parantezlerin kaldırılarak, grubun bozulması işlemi, gruplamanın tersidir:

1. İç içe parantezler varsa, önce en içteki açılır; sonra, sırasıyla dışa doğru gidilir.
2. Parantezin önünde + simgesi varsa, terimler, parantezden kendi işaretleriyle çıkarılır.
3. Parantezin önünde - simgesi varsa, terimler, parantezden çıkarılırken işaretleri değiştirilir.
4. Parantezin önünde 1 den farklı bir çarpan varsa, çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine dağılması kuralı uygulanır.

3.3 Cebirsel İfadeleri Çarpanlara

Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayıran genel bir yöntem yoktur. Dolayısıyla, şimdiye kadar öğrendiğimiz gruplama, dağılma, üs alma işlemleri yanında özdeşlikleri de kullanarak, verilen ifadeyi çarpanlarına ayırmaya çalışırız. Gene de, teorik olarak çarpanları olduğu bilinse bile, pratikte cebirsel ifadelerin büyük çoğunluğunu çarpanlarına ayıramayız.

Bu derste, polinomları (daha genel olarak, cebirsel ifadeleri) çarpanlarına ayırmak için, aşağıda verilen basit yöntemleri ele alacağız.

3.3.1 Ortak Çarpan Parantezine Alma

Polinomun terimlerinin *ebob*'i varsa, terimler *ebob* parantezine alınır.

Örnekler:

1. $16x^2y^3z^4 - 24x^3y^2z^3 - 8xyz$ polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: $8xyz$ terimi, polinomun her terimini böler; yani bir ortak bölendir. Ayrıca, derecesi bundan büyük olan başka ortak bölen yoktur. O halde, $8xyz$, polinomun terimlerinin *ebob* dir. Öyleyse,

$$\begin{aligned} & 16x^2y^3z^4 - 24x^3y^2z^3 - 8xyz \\ = \; & 8xyz(\frac{16x^2y^3z^4}{8xyz} - \frac{24x^3y^2z^3}{8xyz} - \frac{8xyz}{8xyz}) \\ = \; & 8xyz(2xy^2z^3 - 3x^2yz^2 - 1) \end{aligned}$$

olur.

2. $(2x+y)(x-3)+(3-x)(x-y)$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

   Çözüm:

$$\begin{aligned} & (2x+y)(x-3)+(3-x)(x-y) \\ = \; & (2x+y)(x-3)-(x-3)(x-y) \\ = \; & (x-3)(x+2y) \end{aligned}$$

   olur.

3. $(ax+by)^3+(ax+by)^2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{aligned} & (ax+by)^3+(ax+by)^2 \\ = \; & (ax+by)(ax+by)^2+(ax+by)^2 \\ = \; & (ax+by)^2\,[(ax+by)+1] \\ = \; & (ax+by)^2\,(ax+by+1) \end{aligned}$$

3.4 Uygulamalar

1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

   (a) $3.2^3+12.2^3-9.2^3$

   (b) $x^5+\frac{1}{3}x^5-\frac{7}{2}x^5+3x^5$

   (c) $3a^{p-q}+a^{p-q}+\frac{3}{5}a^{p-q}-4a^{p-q}-\frac{4}{3}a^{p-q}$

   (d) $\frac{6}{7}a^{x-y}-2a^{x-y}+15a^{x-y}-\frac{101}{7}-14a^{x-y}+35a^{x-y}+65a^{x-y}-34a^{x-y}$

   (e) $2a^2y^3-4a^3y^5-3a^2y^4+a^3y^2$

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

   (a) $2a^xb^y - 12a^xb^y + \frac{3}{5}a^xb^y - a^xb^y + 13a^xb^y$
   (b) $12(a+b)^x - \frac{4}{5}(a+b)^x - 5\frac{3}{2}(a+b)^x - 5 \cdot \frac{3}{2}(a+b)^x$
   (c) $(a-b)(5x+y-1) + (a-b)(3x+7y+6) - (b-a)(x-y+2)$
   (d) $(a+b+1)^2 - (a-b+1)^2 + (a+b-1)^2 - (a-b-1)^2$
   (e) $4(a+b)x^2y^3 + 8(a+b)x^3y^2 - 12(a+b)x^2y^2$

Cebirsel İfadeleri Gruplayarak Çarpanlara Ayırma

Verilen cebirsel ifadenin bütün terimlerinin ortak bir böleni yoksa, hepsini bir ortak çarpan parantezine alma olanağı olamaz. Böyle olduğunda, bütün terimler yerine, bazı terimlerinin ortak çarpanları olup olmadığına bakılır. Varsa, söz konusu terimlerden bir grup yapılır. Uygun gruplamaların olası olduğu cebirsel ifadelerde, dağılma ve yer değiştirme kurallarından yararlanıp, ifadeyi çarpanlara ayırabiliriz. Bunu örnekler üzerinde inceleyelim.

Örnekler:

1. $xy + 2x + 3y + 6$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: Aşağıda her adımda yapılan işlemleri açıklayınız.

$$\begin{aligned} xy + 2x + 3y + 6 &= (xy + 2x) + (3y + 6) \\ &= x(y+2) + 3(y+2) \\ &= (x+3)(y+2) \end{aligned}$$

   Aynı sonuca başka bir gruplama ile de ulaşabiliriz:

$$\begin{aligned} xy + 2x + 3y + 6 &= (xy + 3y) + (2x + 6) \\ &= y(x+3) + 2(x+3) \\ &= (x+3)(y+2) \end{aligned}$$

2. $ax^2 - axy - ax + bx - by - b$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

$$\begin{aligned} ax^2 - axy - ax + bx - by - b &= (ax^2 - axy - ax) + (bx - by - b) \\ &= ax(x-y-1) + b(x-y-1) \\ &= (ax+b)((x-y-1) \end{aligned}$$

3. $4t(s^2+1)+s(16+t^2)$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: Verilen polinomun terimleri arasında ortak böleni olanlar yoktur. Ortak bölen bulabilmek umuduyla, önce, parantezleri açalım. Sonra gruplama yapmayı deneyelim:

$$\begin{aligned} 4t(s^2+1)+s(16+t^2) &= 4ts^2+4t+16s+st^2 \\ &= (4ts^2+4t)+(16s+st^2) \\ &= 4s(st+4)+t(st+4) \\ &= (4s+t)((st+4) \end{aligned}$$

4. $64a^3b^3xy^2z-16a^5b^3xy^2z+32a^2b^3xy^2z-16a^3b^3xy^2z$ ifadesini gruplayarak çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

$$\begin{aligned} & 64a^3b^3xy^2z-16a^5b^3xy^2z+32a^2b^3xy^2z-16a^3b^3xy^2z \\ = \; & 16abxy^2z[4a^2b^2-a^4b^2+2ab^2-a^2b^2] \\ = \; & 16abxy^2z[(4a^2b^2-a^4b^2)+b(2ab-a^2b)] \\ = \; & 16abxy^2z[(2ab-a^2b)(2ab+a^2b)+b(2ab-a^2b)] \\ = \; & 16abxy^2z[(2ab-a^2b)(2ab+a^2b+b)] \\ = \; & 16abxy^2z[(2ab-a^2b)(a+1)^2b] \\ = \; & 16a^2b^3xy^2z(2-a)(1+a)^2 \end{aligned}$$

5. $(a^2-b^2)(ab-b^2)-(a-b)^2(a^2+ab)$ ifadesini gruplayarak çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

$$\begin{aligned} & (a^2-b^2)(ab-b^2)-(a-b)^2(a^2+ab) \\ = \; & b(a^2-b^2)(a-b)-a(a+b)(a-b)^2 \\ = \; & (a-b)\left[b(a^2-b^2)-a(a^2-b^2)\right] \\ = \; & (a-b)(a^2-b^2)(b-a) \\ = \; & -(a-b)(a^2-b^2) \\ = \; & -(a-b)^2(a+b) \end{aligned}$$

3.5 Uygulamalar

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $9ab^2 - 3a^2b - 6a^2b^2$
b) $3ax + 5ay - 2az$
c) $a^2b^2c^2 - a^3b^2c^2 - a^3bc^3 + a^2bc^3$
d) $12x^3 + 16x^4 + 4x^2$
e) $x^2 - 2x^2 - 5x^4 - 3x^3$
f) $a^2bc - ab^2c + abc^2$
g) $ab - 3ay + 2bx - 6xy$
h) $6x^4y - 15x^3y^2 - 9xy^3$
i) $2x^3 - 1 - 2x + x^2$
j) $15p^3q^2 - 5p^2q^3 + 10pq^4$

3.6 Özdeşlikler

Özdeşliklerden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

Bazan, verilen polinomun bütün terimleri ya da bzı terimleri, bir özdeşliğin terimleri olabilir. Bu durumlarda, ilgili özdeşlik kullanılarak, polinom çarpanlara ayrılabilir.

Tam Kare Özdeşliğinden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

Verilen polinomun bütün terimleri ya da gruplandırılacak bazı terimleri,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

özdeşliklerinin sağ yanına benzerse, onları, sol yandaki tam kare çarpanı haline getirebiliriz. şimdi, bunu örneklerle gösterelim.

Örnekler:

1. $4x^2 - 4x + 1$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

   olduğu hemen görülür.

2. $a^6x^4 - 6a^3x^2 + 9$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$a^6x^4 - 6a^3x^2 + 9 = (a^3x^2)^2 - 2.(a^3x^2).3 + 3^2 = (a^3x^2 - 3)^2$$

   olur.

3. $0,32 + 0,16x + 2x^2$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

$$\begin{aligned} 0,32 + 0,16x + 2x^2 &= 2(0,16 + 0,8x + x^2) \\ &= 2(0,4 + x)^2 \end{aligned}$$

4. $x^{2k}y^{2k} - 12x^ky^k + 36$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

$$x^{2k}y^{2k} - 12x^ky^k + 36 = (x^ky^k)^2 - 2.x^ky^k.6 + 6^2 = (x^ky^k - 6)^2$$

   olur.

3.7 Uygulamalar

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

1. $9x^2 + 12x + 4$
2. $27x^4y - 72x^3y^2 + 48x^2y^3$
3. $\frac{9}{25}x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{9}y^2$
4. $16x^4y^2 - 24x^2y + 9$
5. $a^{4r} - 8a^{2r} + 16$
6. $a^{2r}b^{2r} - 10a^rb^r + 25$
7. $49a^{2n} + 14a^n + 1$
8. $a^6b^4 - 6a^3b^2 + 9$
9. $45a^3b^3 - 30a^2b^2(x-3) + 5ab(x-3)^2$
10. $0,09 + 0,6a^2 + a^4$
11. $25a^2b^2 - 30ab + 9$
12. $(a-b-1)^2 + 2(a-b-1)(b+1) + (b+1)$

İki Kare Farkı Özdeşliğinden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

Verilen polinomun bütün terimleri ya da gruplandırılacak bazı terimleri,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

özdeşliğinin sağ yanına benzerse, onları, sol yandaki iki kare farkı haline getirebiliriz. şimdi, bunu örneklerle gösterelim.

Örnekler:

1. $25x^2 - 9$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$25x^2 - 9 = (5x)^2 - 3^2 = (5x-3)(5x+3)$$

   olur.

2. $x^2 - 0,0196$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$x^2 - 0,0196 = x^2 - (0,14)^2 = (x-0,14)(x+0,14)$$

   olur.

3. $\sqrt{x^6} - \sqrt{y^6}$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$\begin{aligned} \sqrt{x^6} - \sqrt{y^6} &= \left(\sqrt{x^3}\right)^2 - \left(\sqrt{y^3}\right)^2 \\ &= \left[\left(\sqrt{x^3}\right) - \left(\sqrt{y^3}\right)\right]\left[\left(\sqrt{x^3}\right) + \left(\sqrt{y^3}\right)\right] \end{aligned}$$

   olur.

4. $\frac{4}{81}x^2 - \frac{16}{25}x^2$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$\begin{aligned} \frac{4}{81}x^2 - \frac{16}{25}y^2 &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 x^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 y^2 \\ &= \left(\frac{2}{9}x - \frac{4}{5}y\right)\left(\frac{2}{9}x + \frac{4}{5}y\right) \end{aligned}$$

   olur.

5. $x^{2k} - y^{2k}$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

$$x^{2k} - y^{2k} = (x^k)^2 - (y^k)^2 = (x^k - y^k)(x^k + y^k)$$

   olur.

6. $\frac{4}{81}a^2 - \frac{16}{25}$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{4}{81}a^2 - \frac{16}{25} &= 4\left(\frac{1}{9}a\right)^2 - 4\left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ &= 4\left[\left(\frac{1}{9}a\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\right]\left[\left(\frac{1}{9}a\right) - \left(\frac{2}{5}\right)\right] \end{aligned}$$

3.8 Uygulamalar

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

1)$a^4 - 16$	2) $a^2 - \frac{4}{9}x^2$
2) $7a^2 - 175$	4) $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2}$
5) $(x-y)^2 - (x+y)^2$	6) $a^4 - 25b^8$
7) $x^{2r} - y^{2r}$	8) $a^2 - 0,0625$
9) $a^8 - b^8$	10) $(2x-1)^2 - 9(x-1)^2$

3.9 Özdeşlikleri Kullanma

İki Küp Toplamı ya da Farkı Özdeşliklerinden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

Verilen polinomun bütün terimleri ya da gruplandırılacak bazı terimleri,

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

özdeşliklerinin sağ yanına benzerse, onları, sol yandaki iki küp farkı ya da toplamı haline getirebiliriz. şimdi, bunu örneklerle gösterelim.

Örnekler:

1. $64 - x^3$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$64 - x^3 = 4^3 - x^3 = (4 - x)(16 + 4x + x^2)$$

   olur.

2. $27x^3 + 0,008$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$27x^3 + 0,008 = (3x)^3 + (0,2)^3 = (3x + 0,2)(9x^2 - 0,6x + 0,04)$$

   olur.

3. $x^{3n} - y^{3n}$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm:

   $$\begin{aligned} x^{3n} - y^{3n} &= (x^n)^3 - (y^n)^3 \\ &= (x^n - y^n)\left((x^n)^2 + x^n y^n + (y^n)^2\right) \\ &= (x^n - y^n)\left(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}\right) \end{aligned}$$

   olur.

4. $27x^3 + 64y^3$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.

   $$\begin{aligned} 125x^3 + 8y^3 &= (5x)^3 + (2y)^3 \\ &= (5x + 2y)[(5x)^2 - (5x).(2y) + (2y)^2] \\ &= (5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2) \end{aligned}$$

   olur.

3.10 Uygulamalar

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

1) $27a^6 - 64$ 2) $x^3 + 1$

3) $81a^3 - 125$ 4) $x^3 - 1$

5) $a^{3n} - 1$ 6) $(a-b)^3 + b^3$

7) $a^{3n} - b^{3n}$ 8) $1 - 8(a+b)^9$

9) $a^6 + b^6$ 10) $x^6 - y^6$

$ax^2 + bx + c$ Biçimindeki Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Bu türdeki polinomların kökleri bilinince, çarpanlara ayırmanın çok kolay olduğunu ileride göreceğiz. Burada, pratik bir yöntemi göstereceğiz. Gene, ileride göreceğimiz bir kuralı ispatsız olarak ifade etmek yararlı olacaktır:

$ax^2 + bx + c$ polinomunun çarpanlara ayrılabilmesi için, $b^2 - 4ac \geq 0$ olmalıdır.

şimdi pratik yöntemimizi geliştirelim. İki ayrı durum vardır.

$a = 1$ **Durumu:** Önce $x^2 + bx + c$ biçimindeki Polinomları ele alalım. İkinci dereceden olan bu polinom, sabit olmayan çarpanlara ayrılabiliyorsa, çarpanları birinci dereceden olmak zorundadır. Baş katsayısı da 1 olduğuna göre, çarpanlar (varsa), $(x+p), (x+q)$ biçimindedirler. O halde,

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq = x^2 + bx + c$$

olmalıdır. Benzer terimlerin katsayılarını eşitlersek,

$$b = p + q, \qquad c = pq \qquad (*)$$

çıkar. Öyleyse, toplamları b ye ve çarpımları c ye eşit olacak şekilde p, q sayılarını bulursak, $x^2 + bx + c$ polinomunun $(x+p)(x+q)$ biçimindeki çarpanlarını bulmuş oluruz. p, q için rasyonel çözümler c nin tam bölenleri olmalıdır. Neden? şimdi, problemi örnekler üzerinde inceleyelim.

Örnekler:

1. $x^2 - x - 6$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: Toplamları -1, çarpımları -6 olan p, q sayılarını, sınamayanılma yöntemiyle bulabiliriz. Çarpımları -6 olacağına göre, rasyonel çözümler -6 nın tam bölenleri olmalıdır. Bu bölenleri denersek,

   $$(-3).2 = -6, \qquad -3 + 2 = -1$$

   olduğunu görürüz. O halde,

   $$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

   olur.

2. $x^2 + 5x + 4$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: 4 ün bölenlerini deneyerek $1.4 = 4, \quad 1 + 4 = 5$ olduğunu görebiliriz. O halde,

   $$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$

   olur.

$a \neq 1$ **Durumu:**

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

eşitliğinden yararlanarak, yukarıda yapıldığı gibi, önce

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

polinomunu çarpanlara ayırırız. Eğer, bu polinomun çarpanları varsa,

$$(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \qquad (**)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her tarafını a ile çarparsak,

$$a(x + p)(x + q) = ax^2 + a(p + q)x + apq = ax^2 + bx + c$$

çıkar. $a = 1$ durumuna benzeterek, $a \neq 1$ durumu için de (**) eşitliğinden yararlanarak p, q sayılarını bulabiliriz. Toplamları $\frac{b}{a}$ ve çarpımları $\frac{c}{a}$ olan p, q sayılarını arayacağız.

Örnekler:

1. $6x^2 - x - 1$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: Verilen polinomu,

$$6x^2 - x - 1 = 6\left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right)$$

   biçiminde yazabiliriz. şimdi, sağ yandaki,

$$\left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right)$$

   polinomunu çarpanlara ayıralım. Bu polinomun baş katsayısı 1 olduğundan, önceki yöntemi uygulayabiliriz.

$$p + q = -\frac{1}{6}, \qquad p.q = -\frac{1}{6}$$

   bağıntılarını sağlayan p, q sayılarını, sınama-yanılma yöntemiyle arayacağız. Bunu yaparken, p ile q nun, $-\frac{1}{6}$ nın bölenleri olması gerektiğini unutmayacağız. Denemelerimiz sonunda, $p = -\frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{3}$ olduğunu buluruz. Buradan,

$$(x+q)(x+p) = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right)$$

   yazabiliriz. şimdi, bu eşitliğin her iki yanını 6 ile çarparsak,

$$\begin{aligned} 6(x+q)(x+p) &= 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= 6\left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right) \\ &= 6x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

2. $4x^2 + 12x + 5$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: Yukarıda söylediklerimize göre, aşağıdaki işlemleri yapabiliriz:

$$4x^2 + 12x + 5 = 4\left(x^2 + 3x + \frac{5}{4}\right)$$

   eşitliğinin sağ yanındaki parantezin içini çarpanlara ayırmak için,

$$q + p = 3. \qquad q.p = \frac{5}{4}$$

bağıntılarını sağlayan q, p sayılarını bulmalıyız. Bu sayılar, $\frac{5}{4}$ ün bölenleri olduğundan, sınama-yanılma yöntemiyle, $q = \frac{5}{2}$, $p = \frac{1}{2}$ sayılarının istenen koşulları sağladığı görülebilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} 4(x+q)(x+p) &= 4\left(x+\frac{5}{2})(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= 4x^2+12x+5 \end{aligned}$$

dir.

3.11 Uygulamalar

1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

   a) x^2+x+2 b) x^2-x-2

   c) x^2+2x+3 d) x^2-2x-3

   e) x^2+3x+4 f) $3x^2-3x-4$

   g) x^2+3x+4 h) x^2-3x-4

   i) x^2-4x-5 j) x^2+4x+5

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

   a) $3a^2+8a+5$ b) $3x^2+x-2$

   c) $5x^2+7x+2$ d) $5x^2+3x-2$

   e) $2x^2+3x+1$ f) $2x^2+3x-2$

   g) $2x^2+7x+6$ h) $2x^2+x-1$

   i) $7x^2+9x+2$ j) $7x^2-5x-2$

x^n+y^n veya x^n-y^n Biçimindeki Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Bu türlerde, önce n üssüne bakarız. Eğer n üssü, 2 ya da 3 ün bir katı ise, iki karenin ya da iki küpün toplamı ya da farkı biçimine dönüştürülebilirler. Bu özelikler yoksa, bu tür polinomların çarpanlara ayrılmasında aşağıdaki özdeşlikler kullanılır.

Her n tamsayısı için,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

dir. n tek bir tamsayı ise

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

dir.

Örnekler

1. $x^{15} - y^{15}$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: Terimlerin ortak üssü 15 tir ve 3 ün katıdır. Dolayısıyla iki küp farkına dönüştürebiliriz:

$$\begin{aligned} x^{15} - y^{15} &= \left((x^5)^3 - (y^5)^3\right) \\ &= \left((x^5) - (y^5)\right)\left((x^5)^2 + x^5y^5 + (y^5)^2\right) \\ &= \left((x^5) - (y^5)\right)\left((x^5)^2 + x^5y^5 + (y^5)^2\right) \\ &= \left((x^5) - (y^5)\right)\left(x^{10} + x^5y^5 + y^{10}\right) \end{aligned}$$

   olur.

2. $512a^3b^3 + 729d^3e^3x^3$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: Verilen polinomu iki küp toplamı biçimine dönüştürebiliriz:

$$\begin{aligned} 512a^3b^3 + 729d^3e^3x^3 &= \left((8ab)^3 - (9dex)^3\right) \\ &= ((8ab) - (9dex))\left((8ab)^2 + 8ab.9dex + (9dex)^2\right) \\ &= (8ab - 9dex)\left(64a^2b^2 + 72abdex + 81d^2e^2x^2\right) \end{aligned}$$

   olur.

3. $x^5 + y^5$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

   Çözüm: Ortak üs olan 5 sayısı ne 2 nin ne de 3 ün bir katıdır. Dolayısıyla, iki karenin ya da küpün toplam ya da farkına dönüştürülemez. Ama, üs tek olduğu için $x^n + y^n$ ifadesi için yukarıda yazılan özdeşlik kullanılabilir:

$$x^5 + y^5 = (x+y)\left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right)$$

   olur.

4. $16a^4 - x^4y^4$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 16xa^4 - x^4y^4 &= (4a^2)^2 - (x^2y^2)^2 \\ &= (4a^2 - x^2y^2)(4a^2 + x^2y^2) \\ &= (2a - xy)(2a + xy)(4a^2 + x^2y^2) \\ &= (2a - xy)(2a + xy)(4a^2 + x^2y^2) \end{aligned}$$

olur.

3.12 Uygulamalar

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $1 + a^3$ b) $a^{12} - 1$

c) $a^8 - 256$ d) $x^{3n} + 1$

e) $27 + x^6y^6$ f) $a^7120 - 1$

g) $a^3x^8 - y^3$ h) $a^{13} - 1$

i) $x^{11} + y^{11}$ j) $a^{15} - b^{15}$

Ekleme-Çıkarma Yolu ile Çarpanlara Ayırma

Uygun bir terim eklenir ve çıkarılırsa, bazı polinomlar, bir özdeşliğe dönüştürülebilir.

Örnek

$16a^4 + y^4 - a^2y^2$ polinomunu çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{aligned} & 16a^4 + y^4 - a^2y^2 \\ = & \underbrace{16a^4 + 8a^2y^2 + y^4} - \underbrace{8a^2y^2 - a^2y^2} \\ = & (16a^4 + 8a^2y^2 + y^4) - (9a^2y^2) \\ = & (4a^2 + y^2)^2 - (3ay)^2 \\ = & (4a^2 - 3ay + y^2)(4a^2 + 3ay + y^2) \\ = & (a - y)(4a - y)(a + y)(4a + y) \end{aligned}$$

olur.

Örnekler:

1. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\frac{(a+b)^2-25}{(a+5)^2-b^2}\left[(b-5)^2-a^2\right]$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
& \frac{(a+b)^2-25}{(a+5)^2-b^2}\left[(b-5)^2-a^2\right] \\
= & \frac{[(a+b)-5]\,[(a+b)+5]\,[(b-5)-a]\,[(b-5)+a]}{[(a+5)-b]\,[(a+5)+b]} \\
= & -(a+b-5)^2
\end{aligned}$$

2. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\frac{x^{n-2}(x^2-2x+1)}{x^n(1-x)}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
& \frac{x^{n-2}(x^2-2x+1)}{x^n(1-x)} \\
= & \frac{x^{n-2}(x-1)^2}{x^n(1-x)} \\
= & (1-x)x^{n-2}x^{-n} \\
= & (1-x)x^{-2} \\
= & \frac{1-x}{x^2}
\end{aligned}$$

3. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\frac{3x^4+6x^3-3x^2-6x}{x^4+2x^3-x^2-2x}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^4+6x^3-3x^2-6x}{x^4+2x^3-x^2-2x} &= \frac{x(x-1)(x+1).3.(x+2)}{(x+1)(x-1).x.(x+2)} \\
&= 3
\end{aligned}$$

4. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$(x-y)^2(z-x)+(x-z)^2(x-y)$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}(x-y)^2(z-x)+(x-z)^2(x-y) &= (x-y)\left[(x-y)(z-x)+(x-z)^2\right]\\ &= (x-y)(x-z)\left[(x-y)+(z-x)\right]\\ &= (x-y)(x-z)(z-y)\end{aligned}$$

5. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x^2}} : \frac{x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}&\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x^2}} : \frac{x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}\\ =\ &\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}-1}{x-\frac{1}{x}}\\ =\ &\frac{x^3-1}{x}\frac{x^2}{x^3-1}\frac{1-x}{x}\frac{x}{x^2-1}\\ =\ &-\frac{-x}{x+1}\end{aligned}$$

6. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\frac{a^2-1}{4a}.\left(\frac{1}{a-1}-\frac{a}{a+1}+1\right)$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}&\frac{a^2-1}{4a}.\left(\frac{1}{a-1}-\frac{a}{a+1}+1\right)\\ =\ &\frac{a^2-1}{4a}.\left(\frac{a+1-a^2+a+a^2-1}{a^2-1}\right)\\ =\ &\frac{2a}{4a}\\ =\ &\frac{1}{2}\end{aligned}$$

7. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\left(a-b-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
& \left(a-b-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right) \\
= & \frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{a-b}\cdot\frac{b^2-a^2}{ab} \\
= & 4(a+b)
\end{aligned}$$

8. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\left(2a+\frac{b}{a}\right)^{-1}\left[(2a)^{-1}+\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right]$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
& \left(2a+\frac{b}{a}\right)^{-1}\left[(2a)^{-1}+\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right] \\
= & \frac{a}{2a^2+b}\left[\frac{1}{2a}+\frac{a}{b}\right] \\
= & \frac{a}{2a^2+b}\cdot\frac{2a^2+b}{2ab} \\
= & \frac{1}{2b}
\end{aligned}$$

9. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\left(1-\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)\frac{2}{x^2-2x+1}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
& \left(1-\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)\frac{2}{x^2-2x+1} \\
= & \left(1-\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}}\right)\frac{2}{x^2-2x+1} \\
= & \frac{-4}{(x^2-1)(x-1)^2}
\end{aligned}$$

10. Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\frac{xy-y^2}{x^2-xy} : \frac{\left(xy-y^2\right)^2}{\left(x^2-xy\right)^2}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} & \frac{xy-y^2}{x^2-xy} : \frac{\left(xy-y^2\right)^2}{\left(x^2-xy\right)^2} \\ = & \frac{y(x-y)}{x(x-y)} \cdot \frac{x^2(x-y)^2}{y^2(x-y)^2} \\ = & \frac{x}{y} \end{aligned}$$

3.13 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

   a) a^4+4 b) $4a^4+1$

   c) $9x^4-12x^2y^2+3y^2$ d) $x^6-2x^3y^3$

   e) $8x^9-4x^6+2x^2+7$ f) $9x^4+12x^2y^2$

   g) $18a^4-26a^2b^2+8b^4$ h) $8x^3-4ax^2+2a^2x$

   i) a^8+x^4-2 j) $a^8+b^8+a^4b^4$

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

   a) $15x^3y^4-25x^2y^3z^2$ b) $a^2-b^2-c^2+2bc$

   c) $a^3-3a^2-4a-12$ d) x^6+7x^3-8

   e) $(a^2+4a)^2-2(a^2+4a)-15$ f) $ax-6by-3ay+2bx$

   g) $x^2-2xy+y^2-a^2+2ab-b^2$ h) $1-x^{2n}+a-ax^n$

   i) $x^3+y^3-x^2+xy-y^2$ j) $4a^4-29a^2b^2+25b^4$

3. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $a^4 + 3a^2 + 4$ b) $(a^2 - 1) + 4(a + 1) + (a + 1)^2$

c) $x^2 - y^2 + 4x - 4y$ d) $2x^2y^3 - 4x^3y^5 - 3x^2y^4 + x^3y^2$

e) $(a - 1)^2 - (a - 1)^4$ f) $(2a - 3)(3x - 2y) - (5a + 1)(3x - 2y) - 4x + 6y$

g) $x^4 - y^4$ h) $ax + 3x - a - 3 - x^3 + x^2$

i) $a^3b^4 - a^2b^5$ j) $64 - 9a^2 + 24ab - 16b^2$

4. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $a^7 + b^7$ b) $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$

c) $(x^2 + 3x - 10)^2 - (x^2 + 2x - 8)^2$ d) $12 - 4x^3 - 3y^2 + x^3y$

e) $16 + 14xy - x^2 - 49y^2$ f) $(a + b)^2 - 4a^2b^2$

g) $2x^3 - 6ax^2 - 6a^2x + 18a^3$ h) $3x^5 - 2ax^4 - 3a^4x + 2a^5$

i) $x^{2n}y^{2n} - 25$ j) $x^3 - y^3 - x^2 + y^2$

5. $2x^3 + 3x^2 + ay + b$ polinomunun iki çarpanı $x + 1$ ve $x - 1$ ise, üçüncü çarpan nedir?

6. $x^3 + y^3 + axy + 64$ polinomunun bir çarpanı $x + y + 4$ ise, öteki çarpanı nedir?

7. $x^3 - 2x^2 - 5x + y$ polinomunun $x - 1$ ile tam bölünebilmesi için y ne olmalıdır?

8. $x^2 - y^2$ ile $x^2 + xy - 2y^2$ polinomlarının *ekok* 'nı bulunuz.

9. $x^4 - ax^2 + 36$ polinomu $x - 2$ ile tam bölünüyor. Polinomu çarpanlarına ayırınız.

10. Aşağıdaki polinomların *ekok* ile *ebob* nini bulunuz.

$$x^2, \quad 3x^3y, \quad 4x^4y^3$$

11. Aşağıdaki polinomların *ekok* ile *ebob* nini bulunuz.

$$\begin{aligned} p(x,y) &= x^3 - 9xy^2 \\ q(x,y) &= 2x^3 + 6x^2y \\ r(x,y) &= 4x^2 + 24xy + 36y^2 \\ s(x,y) &= x + 3y \end{aligned}$$