TIMUR KARAÇAY-HAYDAR EŞ-İBRAHIM İBRAHIMOĞLU

CALCULUS

SEÇKIN YAYINCILIK

BU KITAP BAŞKENT ÜNIVERSITESINDE HAZIRLANMIŞTIR.

ANKARA

Birinci baskı, Eylül 2017

Contents

Cumhuriyeti kuranlara adanmıştır.

Katlı İntegral

$$\text{Hacim} = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Figure 1: Riemann toplamı

Bu bölümde iki ve üç katlı integral uygulmlarına yer verilecektir.

İki katlı İntegral

$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonunun tek katlı integralini, $Deltax = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}k\ t \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx = \lim{}_n \to \infty \sum_{i=1}^{n} f(t)\Delta x_i \tag{1}$$

Riemann toplamının limiti olarak tanımlamıştık. $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx$ integrali $[a,b]$ aralığı üzerinde ve f fonksiyonunun grafiği altında kalan düzlemsel bölgenin alanına eşit olduğunu biliyoruz.

Şimdi, tek değişkenli fonkiyonlar için bildiğimiz bu integral kavramının

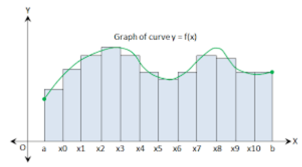


Figure 2: Riemann toplamı

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ z = f(x,y) \tag{2}$$

iki eğişkenli fonksiyonuna genelleştireceğiz. tek katlı integraldeki küçük Δz uzunluğu yerine küçük $DeltaxDelyay$ dikdörtgen alanı gelecektir. S yüzeyi

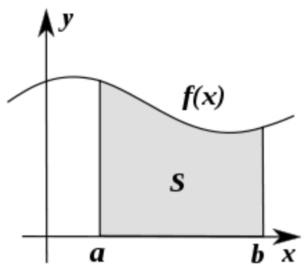


Figure 3: Riemann toplamı

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq z \leq f(x,y),\ (x,y) \in D\} \tag{3}$$

olsun.

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ z = f(x,y) \tag{4}$$

fonksiyonu D bölgesinde tanımlı ve her $(x,y) \in D$ için $|f(x,y)| \leq M$ olacak biçimde bir M sayısı var olsun. Eğer

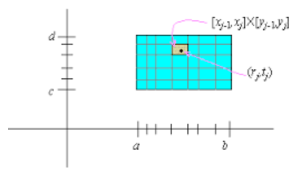


Figure 4: Bölüntü

$$D = \{(x,y) |\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\} \tag{5}$$

ise, koordinat eksenleine paraleller çizerek, D bölgesini Şekil (13) deki gibi sonlu sayıda küçük dikdörtgenlere ayıralım. Oluşan küçük dikdörtgenler ailesine D bölgesinin bir bölüntüsü (partition) denilir. Bu bölüntüyü $\mathscr{P}$ ile gösterirsek;

$$\begin{aligned} D_{ij} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y-j] \\ &= \{(x,y) |\ x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\} \\ &(i = 1,2,3,\ldots,m; \quad j = 1,2,3,\ldots,n) \end{aligned}$$

olur. Bölüntü aralıklarını eşit alarak,

$$\Delta x = \frac{b-a}{m},\ \Delta y = \frac{d-c}{n} \tag{6}$$

diyelim. D_{ij} dikdörtgenlerinin herbirisin alanı

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i.\Delta y_j \tag{7}$$

dir. Bu dikdötgen alanının köşegen uzunluğuna d_{ij} diyelim. pisagor teoreminden, $d_{ij}^2 = (\delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2$ olur.

$$||\mathscr{P}|| = \ max\{d_{ij} : \ (i = 1,2,3,\ldots,m; \ j = 1,2,3,\ldots,n)\} \tag{8}$$

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} \Rightarrow ||\mathscr{P}|| \to 0$$

olacaktır.

Tanım 0.1.

ve $(s,t) \in D_{ij}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dA &= \lim_{m\to\infty, n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s,t)\Delta A_{ij} \\ &= \lim_{||\mathscr{P}||\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s,t)\Delta A_{ij} \end{aligned}$$

limiti varsa, bu limite $f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinde *iki katlı integrali* denilir. [1] [2] [3]

[1] $f(x,y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli ise, yukarıdaki limitler vardır. Dolayısıyla, bir bölgede sürekli olan iki değişkenli fonksiyonun o bölge üzerinde iki katlı integrali vardır.

[2] $f(x,y) \geq 0$ ise $z = f(x,y)$ yüzeyinin altında ve D bölgesinin üzerinde oluşan katı cismin hacmi

$$V = \iint_D f(x,y)dA \tag{9}$$

dır.

[3] $f(x,y) = 1$ ise $z = f(x,y) = 1$ yüzeyinin altında ve D bölgesinin üzerinde oluşan katı cismin hacmi $V = A \times 1 = A$ olacağından, D bölgesinin alanı

$$A = \iint_D dA \tag{10}$$

olur.

Süreksizlik noktalarını atarak fonksiyonun sürekli olduğu bir D bölgesinde integralini tanımlayabiliriz. $D \subset R$ ve f fonksiyonu D üzerinde sürekli olmak üzere

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

tanımını yapalım. Buradan

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA \tag{11}$$

çıkar.

İki Katlı İntegralin Özelikleri

1.
$$\iint_D \alpha f(x,y)dA = \alpha \iint f(x,y)dA \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{12}$$

2.
$$\iint_D \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,dA = \iint_D f(x,y)dA \pm \iint_D f(x,y)dA \tag{13}$$

3.
$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x,y)dA \\ &= \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA, \quad (D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset) \end{aligned}$$

4. Her $(x,y) \in D$ için $f(x,y) \leq g(x,y)$ ise

$$\iint_D f(x,y)dA \leq \iint_D g(x,y)dA \tag{14}$$

5.
$$\left|\iint_D f(x,y)dA\right| \leq \iint_D \left|g(x,y)\right| dA \tag{15}$$

Bunların ispatları iki katlı integral tanımından çıkarılabilir.

Ardışık İntegral

Çok katlı integral hesabı yaparken, tanımı kullanmak pratik değildir. Onun yerine katlı integrali tek katlı integrallerin art arda uygulanması haline dönüştürebiliriz. Bu yöntem işi çok kolaylaştırır. D bölgesi (5) gibi verilsin. Bu durumda

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dx \right) dy \tag{16}$$

eşitliği vardır.

Bu eşitlikte x le y değişkenlerinin sırası değişirilebilir:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dy \right) dx \tag{17}$$

Örnek 0.2.

$$\iint_D x^2 y\,dA \tag{18}$$

integralini $D = \{0 \le x \le 3; 1 \le y \le 2\}$ *bölgesi üzerinde bulunuz.*

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 y\,dA \\
&= \int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx \\
&= \int_0^3 \left(\int_1^2 x^2 y\,dy \right) dx \\
&= \int_0^3 \left(x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{2} \right. dx \\
&= \int_1^2 \frac{3}{2} x^2\,dx \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 y\,dA \\
&= \int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,y \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^3 x^2 y\,dy \right) dx \\
&= \int_1^2 \left(y \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{3} \right. dy \\
&= \int_1^2 9y\,dy \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Theorem 0.3.

(Fubini) $f(x,y)$ fonksiyonu $D = \{a \le x \le b; c \le y \le d\}$ bölgesi üzerinde sürekli ise

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

eşitliği vardır.

Örnek 0.4. *$D = \{1 \le x \le 2; 0 \le y \le 1\}$ bölgesi üzerinde*

$$\iint_D x^2 y^5 \, dA \tag{19}$$

integralini bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 y \, dA \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2 y^5 \, dy \right) dx = \frac{7}{18} \\
&= \int_0^1 \left(\int_1^2 x^2 y^5 \, dx \right) dy = \frac{7}{18}
\end{aligned}$$

Örnek 0.5.

$$f(x, y) = 2 \tag{20}$$

fonksiyonunun $D = \{2 \le x \le 4; 3 \le y \le 6\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\iint_D 2 \, dA = \int_3^4 \int_2^4 2 \, dx \, dy = 2 \int_3^4 4 \, dy = 8$$

Örnek 0.6.

$$f(x, y) = 6xy^2 \tag{21}$$

fonksiyonunun $D = \{[2, 4] \times [1, 2]\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
\int \int_D 6xy^2 \, dA &= \int_2^4 \int_1^2 (6xy^2) \, dy \, dx \\
&= \int_2^4 \left(2xy^3\right)\Big|_1^2 \, dx \\
&= \int_1^4 14x \, dx \\
&= 7x^2\Big|_2^4 \\
&= 84
\end{aligned}$$

ntegrallerin sırasını değiştirirsek,

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
\int \int_D 6xy^2 \, dA &= \int_1^2 \int_2^4 (6xy^2) \, dy \, dx \\
&= \int_1^2 \left(3x^2 y^2\right)\Big|_2^4 \, dx \\
&= \int_1^4 14x36y^2 \, dy \\
&= 12y^3\Big|_1^2 \\
&= 84
\end{aligned}$$

Örnek 0.7.

$$f(x, y) = 2x - 4y^3 \tag{22}$$

fonksiyonunun $D = \{[-5, 4] \times [0, 3]\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
\int\int_D 2x-4y^3\,dA &= \int_{-5}^{4}\int_0^3 (2x-4y^3)\,dy\,dx \\
&= \int_{-5}^{4} (2xy-y^4)\big|_0^3\,dx \\
&= \int_{-5}^{4} (6x-1)\,dx \\
&= (3x^2-81x)\big|_{-5}^{4} \\
&= -756
\end{aligned}$$

Örnek 0.8.

$$f(x,y=2\sin x-3y^3+5, \tag{23}$$

fonksiyonunun $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int\int_D 2dA &= \int 3^4\int_2^4 (2\sin x-3y^3+5)\,dx\,dy \\
&= \int 3^4\int_2^4 (2\sin x)\,dx\,dy+\int\int_A 2dA \\
&= \int 3^4\int_2^4 (-3y^3)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

$$+\int\int_D 2dA$$

$$= \int_3^4\int_2^4 (5)\,dx\,dy$$

Örnek 0.9.

$$f(x,y=6xy, \tag{24}$$

fonksiyonunun $A=\{0\leq x\leq 2; 0\leq y\leq x^2\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
\int\int_A 2dA &= \int_0^2\int_0^{x^2} 6xydydx \\
&= \int_0^2 (3xy^2\big|_{y=0}^{x^2}\,dx \\
&= \int_0^2 3x^5dx \\
&= \frac{1}{2}x^6\big|_0^2 \\
&= \frac{1}{2}(64)-\frac{1}{2}(0) \\
&= 32
\end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$
\begin{aligned}
\int\int_A 2dA &= \int_0^2 \int_{\sqrt{y}}^2 6xydydx \\
&= \int_0^4 \left(3xy^2\Big|_{y=0}^{x^2} dx\right. \\
&= \int_0^4 3x2y\Big|_{y=0}^{2} dx \\
&= \int_0^4 (12y - 3y^2)dy \\
&= \left(6y^2 - y^3\right|_0^4 \\
&= (6(4^2) - 4^3) - 6(0^2 - 0^2) \\
&= 32
\end{aligned}
$$

Örnek 0.10.

$$f(x, y = yz \tag{25}$$

fonksiyonunun $V = \{0 \le y \le 2; -1 \le z \le y^2; 1 \le x \le z\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\int_0^2 \int -1^{y^2} \int_1^z =$$

*Neden İntegral sırasını değiştiriyoruz**

Katlı integrali ardışık integral (iterated) haline getirebidiğimiz durumlarda, birisini öne ya da sona almak çoğu kez önem taşımaz. ama bazı durumlarda birisini öne almanın kolaylık sağladığı görülebilir. Bununla ilgili iyi bilinen iki örnek verceğiz.

Örnek 0.11.

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} \tag{26}$$

fonksiyonunun $D = \{1 \le x \le y; 0 \le y \le 1\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
\int\int_D e^{\frac{x}{y}}\, dA &= \int_0^1 \int_0^y e^{\frac{x}{y}}\, dxdy \\
&= \int_0^1 (ye^{x^2}\Big|_0^y)\, dy \\
&= \int_0^1 (e - y)\, dy \\
&= (e-1)\int_0^1 ydy \\
&= \frac{1}{2}(e-1)y^2\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(e-1)
\end{aligned}
$$

Burada intgralin sırasını değiştirirsek $\int \frac{x}{y} dy$ integralini hesaplayamayız.

Örnek 0.12.

$$f(x, y) = e^{x^2} \tag{27}$$

fonksiyonunun $D = \{0 \le y \le x; 0 \le x \le 1\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int\int_D e^{x2}\, dA &= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(ye^{x^2}\Big|_0^y\right) dy \\
&= \int_0^1 (yex^2)\big|_0^x\, dx \\
&= \int_0^1 \left(xex^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}(e-1)
\end{aligned}$$

Burada intgralin sırasını değiştirirsek $\int \frac{x}{y} dy$ integralini hesaplayamayız.

Örnek 0.13.

$$f(x, y) = 6x^2 y \tag{28}$$

fonksiyonunun $D = \{-1 \le x \le 3; 0 \le y \le 1\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^3 \int_0^1 6x^2 y dy dx \\
&= \int_{-1}^3 3x^2 y^2\big|_{y=0}^1\, dx \\
&= \int_{-1}^3 3x^2 dx \\
&= x^3\big|_{-1}^3 \\
&= 28
\end{aligned}$$

Örnek 0.14.

$$f(x, y) = 6x^2 y \tag{29}$$

fonksiyonunun $D = \{0 \le x \le 1; -1 \le y \le 3\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-1}^3 6x^2 y dx dy &= \int_0^1 2x^3 y\big|_{x=-1}^3\, dy \\
&= \int_0^1 56 y dy \\
&= \frac{56y^2}{2}\Big|_{y=0}^1 \\
&= 28
\end{aligned}$$

Örnek 0.15.

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x + y^2}} \tag{30}$$

fonksiyonunun $D = \{1 \le x \le 4; 0 \le y \le 2\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\int_1^4 \int_0^2 \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} dydx = \int_1^4 \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x}\right) dx$$
$$= 2\ (\sqrt{x+4} - \sqrt{x})\Big|_1^4$$
$$= 2\left(\sqrt{8} - \sqrt{4}) - (\sqrt{5} - \sqrt{1})\right)$$
$$= 2\left((2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{5} + 1)\right)$$
$$= 2\left(2\sqrt{2} - \sqrt{5} - 1\right)$$

Örnek 0.16.

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} \tag{31}$$

fonksiyonunun $D = \{1 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 2\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\int_0^2 \int_1^4 \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} dxdy = \int_0^2 2y\left(\sqrt{4+y^2} - \sqrt{1+y^2}\right) dy$$
$$= 2\left(2\sqrt{2} - \sqrt{5} - 1)\right)$$

Örnek 0.17.

$$f(x, y) = xy \tag{32}$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 0 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3)\}$, *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$= \int\int_D xydA = \int_0^1 \int_0^3 xy\ dydx$$
$$= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^3\ dx$$
$$= \int_0^1 x(\frac{9}{2} - 0)\ dx$$
$$= \frac{9}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{9}{4}$$

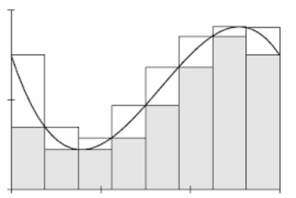


Figure 5: Riemann toplamı

Örnek 0.18.

$$f(x, y) = \sqrt{xy} \tag{33}$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4,\ 4 \leq y \leq 9\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}\int_1^4\int_4^9 \sqrt{xy}\,dydx &= \int_1^4\int_4^9 \sqrt{x}\,\sqrt{y}\,dy\,dx\\ &= \frac{2}{3}\int_1^4 \sqrt{x}\int_4^9 \sqrt{y}\,dydx\\ &= \frac{2}{3}\int_1^4 \sqrt{x}(3-2)\Big|_4^9 dx\\ &= \frac{2}{3}\int_1^4 \sqrt{x}(3-2)\,dx\\ &= (\frac{2}{3})(\frac{2}{3})\,\sqrt{x^3}\Big|_1^4\\ &= (\frac{4}{9})(8-1)\\ &= \frac{28}{9}\end{aligned}$$

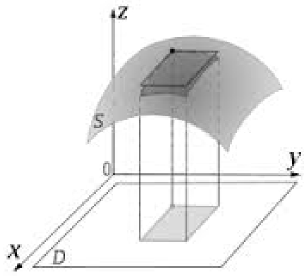


Figure 6: Riemann toplamı

Örnek 0.19.

$$f(x,y) = ye^x \tag{34}$$

fonksiyonunun $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_{-1}^1 ye^x\,dydx &= \int_0^2 e^x\frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^1\,dx\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\int_0^2 e^x dx\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\int_0^2 ye^x\,dx\,dy &= \int_{-1}^1 ye^x\Big|_{x=0}^2\,dx\\ &= \int_{-1}^1 y(e^2-1)dy\\ &= (e^2-1)\frac{y^2}{2}\Big|_{y=-1}^1\\ &= (e^2-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

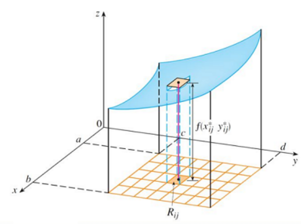


Figure 7: Yüzey Altında

Aşağıdaki integrallerde integral sırası önem kazanmaktadır. Hesabı kolaylaştıran integral sırasını belirleyerek integrali hesaplayınız.

a) $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$, $\int\int_D xe^{xy}dA$

$$\begin{aligned}\int\int_D xe^{xy}\,dA &= \int_0^1\int_1^2 xe^{xy}\;dy\;dx\\ &= \int_0^1 x\left(\int_1^2 e^{xy}\;dy\right)dx\\ &= \int_0^1 \left(e^{2x}-e^{x}\right)dx\\ &= \frac{e^{2x}}{2}-e^{x}\Big|_0^1\\ &= \left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\\ &= \frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

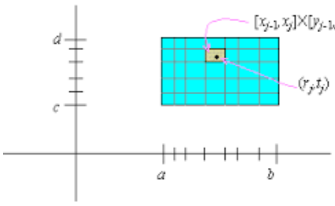


Figure 8: Bölüntü

b) $D=\{(x,y):0\le x\le 1,\;0\le y\le 1\}$, $\int\int_D \frac{x}{1+xy}dA\}$
$u=1+xy, du=xdy$ konumuyla;

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{x}{1+xy}dA &= \int_0^1 \;ln(1+xy)|_0^1\,dx\\ &= \int_0^1 [ln(1+x)-ln1]dx\\ &= \int_0^1 ln(1+x)dx\\ &= (x+1)\;(ln(x+1)-ln1)|_0^1\\ &= 2(ln2-1)\end{aligned}$$

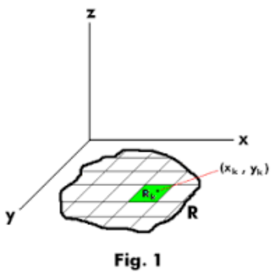


Figure 9: Bölüntü

Verilen denklemlerin grafikleri ile sınırlanan bölgeyi grafikle gösteriniz ve küme gösterimiyle, düzgün x-bölgesi ve/veya düzgün y-bölgesi olarak ifade ediniz.

a) $y=5-x^2, y=1$

$$\begin{aligned}D &= \{(x,y)|-2\le x\le 2,\quad 1\le y\le 5-x^2\}\\ &= \{(x,y)|1\le y\le 5,\quad -\sqrt{5-y}\le x\le \sqrt{5-y}\}\end{aligned}$$

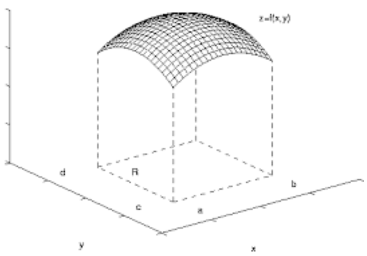


Figure 10: Yüzey Altında Hacim

b) $y=x^2, y=4$

$$\begin{aligned}D &= \{(x,y)|-2\le x\le 2,\quad x^2\le y\le 4\}\\ &= \{(x,y)|0\le y\le 4,\quad -\sqrt{y}\le x\le \sqrt{y}\}\end{aligned}$$

c) $y=x^2-6x+8,\; x+y=8$

$$D=\{(x,y)|y=x^2-6x+8,\; x+y=8\}$$

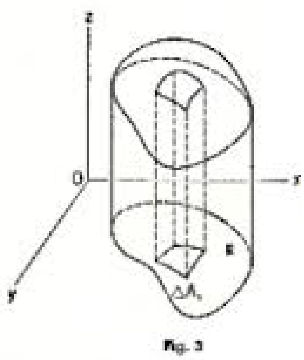
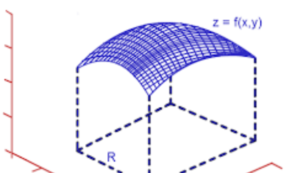


Figure 11: Sütünların Oluşumu

d) $y=5+4x-x^2,\; x+y=5$

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 5,\quad -x+5\le y\le 5+4x-x^2\}$$

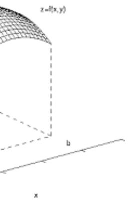


Köşeleri $(1,1),(3,3),(4,3)$ ve $(5,2)$ noktalarında olan dörtgensel bölge D olsun. D yi sadece sınır noktalarında ortak noktaları bulunan düzgün bölgelerin birleşimi olarak ifade ederek

a) $\int\int_D 24x\,dA$

$D = D_! \cup D_2 \cup D_3$

$$\begin{aligned}\int\int_D 24x\,dA &= \int\int_D 24x\,dA_1 + \int\int_D 24x\,dA_2 + \int\int_D 24x\,dA_3\\ &= \int_1^3\int_{\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}^{x} 24x\,dy\,dx\\ &+ \int_3^4\int_{\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}^{3} 24x\,dy\,dx\\ &+ \int_4^5\int_{\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}^{7-x} 24x\,dy\,dx\end{aligned}$$



mann toplamı

$$\begin{aligned}\int\int_D 24y\,dA &= \int\int_D 24y\,dA_1 + \int\int_D 24y\,dA_2 + \int\int_{D_3} 24y\,dA_3\\ &= \int_1^3\int_{\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}^{x} 24y\,dy\,dx\\ &+ \int_3^4\int_{\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}^{3} 24y\,dy\,dx\\ &+ \int_4^5\int_{\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}^{7-x} 24y\,dy\,dx\end{aligned}$$

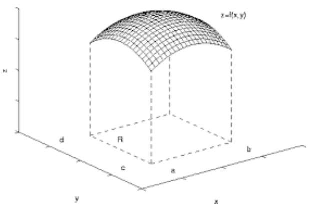


Figure 15: Riemann toplamı

İntegrasyon bölgesi verilmiş olan çift katlı integrali hesaplayınız.

a) $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 2x, 0 \le x \le 2\}, \quad \int\int_D (x^2 + xy)\,dA$

$$\int_0^2\int_0^{2x} (x^2 + xy)\,dy\,dx = 16$$

b) $D = \{(x,y) : 0 \le x <\le y, 0 \le y \le 1\}, \quad \int\int_D (24xy^3)\,dA$

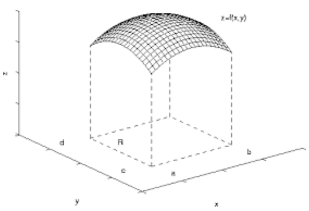


Figure 16: Riemann toplamı

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^y 24xy^3\,dx\,dy &= \int_0^1 12x^2y^3\Big|_0^y\,dy\\ &= \int_0^1 12y^3(y^2-0)\,dy\\ &= \int_0^1 12y^5\,dy\\ &= 2y^6\Big|_0^1\\ &= 2\end{aligned}$$

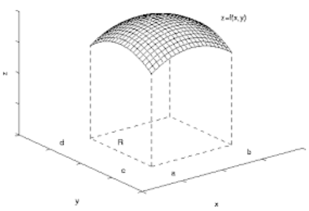


Figure 17: Riemann toplamı

c) $D = \{(x,y) : y^2 \le x \le y, 0 \le y \le 1\}, \quad \int\int_D \sqrt{xy}\,dA$

$$\int_0^1\int_{y^2}^{y} \sqrt{xy}\,dx\,dy = \frac{2}{27}$$

ç) $D = \{(x,y) : 0 \le x \le y^2, 0 \le y \le 1\}, \quad \int\int_D ye^x\,dA$

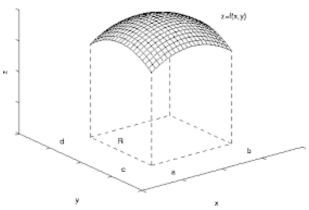


Figure 18: Riemann toplamı

$$\int_0^1 \int_0^x y e^x dx dy = \int_0^1 e^x y \Big|_{x=0}^{y^2} dy$$
$$= \int_0^1 (e^{y^2} y - y) dy$$
$$= \frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2} e - 1$$

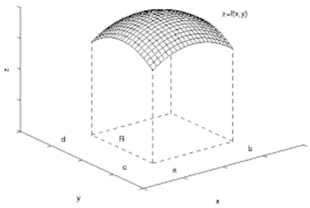


Figure 19: Riemann toplamı

d) $D = \{(x, y) : 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}, \quad \int\int_D e^{x+y} dA$

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x+y} dy dx = \int_0^1 \int_0^x e^x e^y dy dx$$
$$= \frac{1}{2}(e-1)^2$$

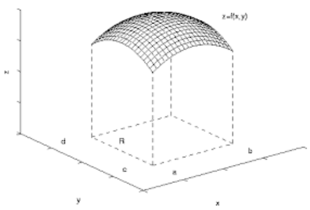


Figure 20: Riemann toplamı

İntegrasyon bölgesinin grafiğini çizerek integral sırasını değiştiriniz.
a) $\int_0^1 \int_{x^4}^{x^3} f(x, y) dy dx$

$$\int_0^1 \int_{x^4}^{x^3} f(x, y) dy dx$$
$$= \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) dx dy$$

Aşağıdaki integralleri integrai sırasını değiştirerek hesaplayınız (integral sırasını değiştirmeden hesaplamayı denemeyiniz!)

a)

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy$$
$$= \int_0^1 e^{y^2} x \Big|_0^y dy$$
$$= \int_0^1 y e^{y^2} dy$$
$$= \frac{e^{y^2}}{2} \Big|_0^y$$
$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

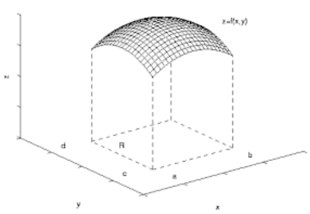


Figure 21: Riemann toplamı

b)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{y^2}^1 12ye^{x^2}\,dxdy &= \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} 12ye^{x^2}\,dydx\\ &= \int_0^1 12e^{x^2}\Big|_{y=0}^{\sqrt{x}}\,dx\\ &= 6\int_0^1 e^{x^2}xdx\\ &= 3e^{x^2}\Big|_{x=0}^{1}\\ &= 3(e-1)\end{aligned}$$

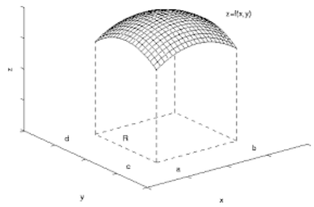


Figure 22: Riemann toplamı

c)

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_{y^2}^4 \frac{4y}{1+x^2}\,dxdy &= \int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} \frac{4y}{1+x^2}\,dydx\\ &= \int_0^4 \frac{1}{1+x^2}2y^2\Big|_0^{\sqrt{x}}\,dx\\ &= \int_0^4 \frac{2y^2}{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{x}}\,dx\\ &= \int_0^4 \frac{2x}{1+x^2}\,dx\\ &= ln(1+x^2)\big|_0^4\\ &= ln(17)-ln(1)\\ &= ln(17)\end{aligned}$$

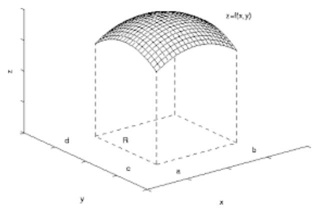


Figure 23: Riemann toplamı

ç)

$$\begin{aligned}\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^2 2\sqrt{1+2y^2}\,dydx &= \int_0^2\int_0^{2y} 2\sqrt{1+2y^2}\,dxdy\\ &= \int_0^2 2\sqrt{1+2y^2}x\Big|_0^{2y}\,dy\\ &= \int_0^2 \sqrt{1+2y^2}4ydy\\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(1+2y^2)^3}\Big|_0^2\\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3}-1\right)\\ &= \frac{2}{3}(26)\\ &= \frac{52}{3}\end{aligned}$$

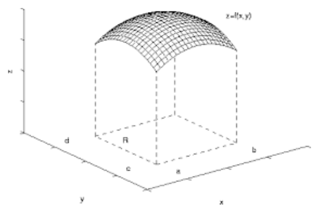


Figure 24: Riemann toplamı

b) $\int_0^1\int_0^{y^2} f(x,y)dxdy$

$$\int_0^1\int_0^{y^2} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)dydx$$

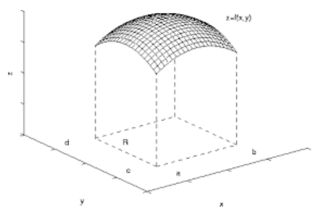
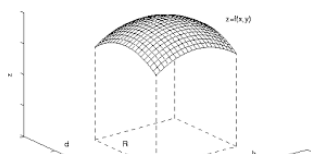


Figure 25: Riemann toplamı

c) $\int_0^2\int_{x^3}^{4x} f(x,y)dydx$



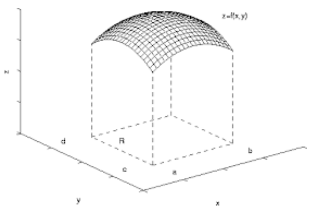


Figure 27: Riemann toplamı

$$\int_0^2 \int_{x^3}^{4x} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^8 \int_{y/4}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dydx$$

ç) $\int_0^8 \int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dydx$

$$\int_0^8 \int_{y/4}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^2 \int_{2x^2}^{4x} f(x,y)dydx$$

İntegrasyon bölgesi D verilen denklemlerin grafikleri ile sınırlanan çift katlı integrali hesaplayınız.

a) $D = \{y = x^2, y = x\}$ ile sınırlı, $\int\int_D y^2 dA$

$$\begin{aligned}
\int\int_D y^2 dA &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y^2 dydx \\
&= \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_{x^3}^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^6 - x^9)dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10}\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{70}
\end{aligned}$$

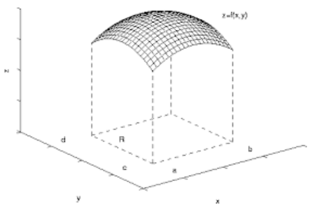


Figure 28: Riemann toplamı

b) $D = \{y^2 = 2x, y^2 = 8 - 2x$ ile sınırlı $\}$, $\int\int_D (4-y^2)dA$

$$\begin{aligned}
\int\int_D (4-y^2)dA &= 2\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x}} (4-y^2)dydx \\
&+ 2\int_2^4 \int_0^{\sqrt{8-2x}} (4-y^2)dydx \\
&= 2\left(\frac{128}{15} + \frac{128}{15}\right) \\
&= \frac{512}{15}
\end{aligned}$$

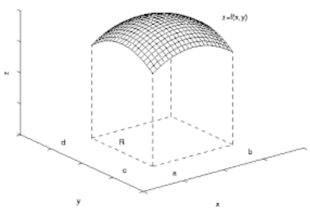


Figure 29: Riemann toplamı

$$\begin{aligned}
\int\int_D e^{x^2} dA &= \int_0^2 \int_0^{x/2} e^{x^2} dydx \\
&= \int_0^2 e^{x^2} y\Big|_0^{x/2} dx \\
&= \int_0^2 e^{x^2} \frac{x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 xe^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{4}(e^4 - 1)
\end{aligned}$$

ç) $D = \{x = 0, x = 2y, y = 1\}$ ile sınırlı bölge, $\int\int_D e^{-\frac{y}{2}} dA$

$$
\begin{aligned}
\int\int_D e^{-\frac{y}{2}} dA &= \int_0^2 \int_{x/2}^1 e^{-\frac{y}{2}} dy dx \\
&= \int_0^2 -2e^{-y/2}\Big|_{x/2}^1 dx \\
&= -2\left(\int_0^2 e^{-1/2} - e^{-x/4}\right) dx \\
&= -2\left(\int_0^2 xe^{-1/2} + 4e^{-x/2}\right)_0^2 dx \\
&= -2\left[\left(\frac{2}{\sqrt{e}} + \frac{4}{e}\right) - (0+4)\right] \\
&= 8 - \frac{4}{\sqrt{e}} - \frac{8}{e} \\
&= \frac{8e - 4\sqrt{e} - 8}{e}
\end{aligned}
$$

Katlı İntegral Uygulamaları

Theorem 0.20. *$D = \{a \le x \le b; g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ bölgesi üzerinde $f(x,y)$ fonksiyonu sürekli ise*

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

olur.

Değişkenlerin yerleri değiştirilirse, benzer sonuç elde edilebilir: $D = \{c \le y \le d; h_1(y) \le y \le h_2(y)\}$ bölgesi üzerinde $f(x,y)$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy$$

olur.

İspat: Ardışık integral tanımından çıkarılır.

Örnek 0.21. *$D = \{y = 0, Y = 2x, x = 1\}$ doğruları ile sınırlı bölge ise*

$$\iint_D (x+y)dA \tag{35}$$

integralini bulunuz.

Çözüm :

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+y)dA \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x+y)dy\right) dx = \frac{4}{3} \\
&= \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 (x+y)dx\right) dy = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Örnek 0.22.

$$I = \int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)dydx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştiriniz.

Çözüm :

$$I=\int_1^{e^2}\int_{lny}^{2} f(x,y)dxdy$$

Örnek 0.23.

$$I=\int_{-1}^{2}\int_{x^2-2}^{x} f(x,y)dydx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştiriniz.

Çözüm :

$$I=\int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{y+2}}^{\sqrt{y+2}} f(x,y)dydx+\int_{-1}^{2}\int_{y}^{\sqrt{y+2}} f(x,y)dydx$$

Örnek 0.24.

$$I=\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}dydx$$

integralini hesaplayınız..

Çözüm :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_0^y e^{y^2}dxdy \\ &= \int_0^1 ye^{y^2}dy \\ &= \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$

Örnek 0.25.

$$I=\int_0^1\int_0^{x^2}(x+y)dydx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 (x+y)dxdy \\ &= \frac{7}{20} \end{aligned}$$

Örnek 0.26. *D bölgesi $x^2+y^2=1$ çemberi ile $x^2+2y^2=1$ elipsi ile sınırlı bölge ise*

$$I=\iint_D x^2dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : şekilden görüldüğü gibi $D=D_1\cup D_2$ olarak iki parçaya ayırmalıyız.

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 dA = \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy dx + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} x^2 dy dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} x^2 \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right) dx \\
&= 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx \\
&= 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx, \qquad (x = sint, dx = costdt) \\
&= 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_{0}^{\pi/2} sin^2 tcos^2 tdt \\
&= 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/2} sin^2 2tdt \\
&= 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi/2} (1-cos4t)dt \\
&= 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{8}\left(t-\frac{sin4t}{4}\right|_{0}^{\pi/2} \\
&= 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{16} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Örnek 0.27. *D bölgesi birinci dörtte birlik alanda $xy = 16, y = x, y = 0, x = 8$ eğrileri ile sınırlı bölge ise*

$$I = \iint_D x^2 dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm 1:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 dA = \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\
&= \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2 dx dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2 dx dy \\
&= \frac{1}{3}\int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3}\right) dy + \frac{1}{3}\int_0^2 (8^3 - y^3) dy \\
&= 448
\end{aligned}
$$

Çözüm 2:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 dA = \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\
&= \int_0^4 \int_0^x x^2 dy dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2 dy dx \\
&= 448
\end{aligned}
$$

Örnek 0.28. *D bölgesi $y = x^2, y = 8 - x^2$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.*

$$Alan A = \iint_D dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
I = \iint_D x^2 dA &= \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} dydx \\
&= \int_{-2}^{2} \left((8-x^2)-x^2\right) dx \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

Alıştırmalar

Aşağıdaki katlı hesaplayınız.

1. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)dydx$
2. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{1} cosy^3 dydx$
3. $\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 dxdy$
4. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)dydx$
5. $\int_0^4 \int_y^{2y} (x+e^y)dxdy$
6. $\int_{-1}^2 \int_x^{x^2+1} (xy)dydx$
7. $\int_0^{1/2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dxdy$
8. $\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} x^2 ydydx$
9. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x-y)dxdy$
10. $\int_0^1 \int_0^{2y} e^{-y^2} dxdy$
11. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xdydx$
12. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xdxdy$

Katlı integralde değişken değiştirme

Tek değişkenlilerde olduğu gibi, bazı durumlarda değişken değiştirerek katlı integral daha kolay hesaplanabilir hale dönüştürülebilir. Aslında katlı integrali ardışık integraller olarak hesaplayabildiğinmize göre, değişken değiştirimi tek değişkenli integrallerde yaptığımızın tekrarı olacaktır. Yine de bu dönüşümün yapılabilmesini mümkün kılan teoremi ifade etmekte yarar vardır.

Theorem 0.29. *1. $f(x, y)$ fonksiyonu xy-düzlemindeki bir D bölgesinde sürekli olsun.*

2. Düzlemde tanımlı bir T dönüşümü

$$T : \begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

parametrik biçiminde verilsin.

3. g ve h fonksiyonları D^* üzerinde sürekli olsunlar.

4. T dönüşümü bire-bir örten olacak biçimde D bölgesini D^* bölgesine dönüştürsün.

5.

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \tag{36}$$

6. $J(u, v) \neq 0$
varsayıları sağlanıyorsa

$$\iint_D f(x, y)dydx = \iint_{D^*} f\big(g(u, v), h(u, v)\big)\,|J(u, v)|\,dudv \tag{37}$$

dir.

İspat: T dönüşümü uv-düzlemindeki bir (u, v) noktasını xy-düzlemindeki (x, y) noktasına götüren dönüşümdür. g, h fonksiyonları D^* bölgesinde tanımlı ve sürekli türevlere sahip fonksiyonlardır. T dönüşümünü vektör değerli bir fonksiyon imiş gibi düşünebiliriz. $(0, 0)$ baş noktasını (x, y) noktasına birleştiren vektörü $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ya da $\vec{r} = g(u, v)\vec{i} + h(u, v)\vec{j}$ biçiminde yazabilirz. g, h fonksiyonları süreli türevlere sahip olduğuna göre $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}$ kısmi türevleri var ve süreklidirler. $u = u_0$ ve $v = v_0$ eğrileinin teğet vektörleri $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ olacaktır.

T dönüşümü altında boyutları $\Delta u \times \Delta v$ olan dikdörtgen xy-düzleminde biçemi bozulmuş dikdörtgenimsi bir bölgeye dönüşür. Bunun alanı yaklaşık olarak,

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta u \Delta v$$

olur. Ayrıca,

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = k \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$$

olur. Buradan,

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta u \Delta v = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u \Delta v$$

elde edilir. Şimdi integral tanımına dönersek,

$$\sum f\big(g(u, v), h(u, v)\big)\,|J(u, v)|\,dudv$$

toplamının limiti varsa, bu limit

$$\iint_D f(x,y)dydx$$

integraline eşit olacaktır. O halde,

$$\iint_D f(x,y)dydx = \iint_{D^*} f\left(g(u,v),h(u,v)\right)|J(u,v)|\,dudv \tag{38}$$

çıkar. Simgelerde birliği sağlamak için,

$$\begin{aligned} dA &= dxdy \\ &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \end{aligned}$$

olduğunu vurgulamak yeterlidir.

Örnek 0.30. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ *ile sınırlı D bölgesinin alanını değişken değiştirme yöntemi ile bulunuz.*

Çözüm:$x = au,\ y = bv$ değişken değiştirimini yaparsak, D bölgesi $u^2+v^2\le 1$ açık diskine dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (36) uygulanabilir. ($a>0,\ b>0$ olmak üzere

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \left|\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right| = ab\,dudv$$

olur. Dolayısıyla,

$$\iint_D 1\,dxdy = \iint_{D^*} ab\,dudv = ab(\pi 1^2) = \pi ab$$

çıkar.

Örnek 0.31. *Köşeleri* $(0,0),(1,1),(2,0)$ *olan D üçgeninin üzerinde,*

$$\iint_D (x+y)^3\,dxdy$$

integralini değişken drğiştirimi yaparak bulunuz.

Çözüm:$u = y-x,\ v = y+x$ değişken değiştirimini yaparsak, D bölgesi köşeleri $(0,0),(0,2),(-2,2)$ olan D^* üçgenine dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (36) uygulanabilir.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

dir. Buradan,

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2}\,dudv$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)^3\,dxdy &= \iint_{D^*} \frac{1}{2} v^3\,dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \int -v^0 v^3\,dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 v^4\,dv \\ &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Örnek 0.32. *Köşeleri* $(0,0),(1,1),(2,0)$ *olan* D *üçgeninin üzerinde,*

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$$

integralini değişken drğiştirimi yaparak bulunuz.

Çözüm:$u = y-x,\ v = y+x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u+v),\ y = \frac{1}{2}(v-u \Rightarrow u = v, u = -v, v = 2)$ değişken değiştirimini yaparsak, D bölgesi köşeleri $(0,0),(2,2),(-2,2)$ olan D^* üçgenine dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (36) uygulanabilir.

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy &= \iint_{D^*} e^{\frac{u}{v}}\,dudv\\ &= \frac{1}{2}\int_0^2\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,dudv\\ &= \frac{e-\frac{1}{e}}{2}\int_0^2 v\,dv\\ &= e-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

Alıştırmalar

1. Köşeleri $(1,0),(2,0),(0,-2),(0,-1)$ olan D yamuğu üzerinde,

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$$

   integralini bulunuz.

2. $x-2y=0, x-2y=4, 3x-y=1, 3x-y=8$ doğrularının sınırladığıD bölgesi üzerinde,

$$iint_D\frac{x-2y}{3x-y}dA$$

   integralini hesaplayınız.

3. Köşeleri $(1,0),(2,0),(0,2),(0,1)$ olan D yamuğu üzerinde,

$$\iint_D \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA$$

   integralini hesaplayınız.

4. $D = \{(x,y): \quad \pi < x+y < 2\pi,\ -\pi < x-y < \pi\}$ bölgesi üzerinden,

$$iint_D(x^2-y^2)\sin^2(x+y)\,dxdy$$

   integralini hesaplayınız.

5. $9x^2+4y^2=1$ elipsi üzerinden,

$$\iint_D \sin(9x^2+4y^2)dA$$

   integralini hesaplayınız.

6. $|x|+|y| \le 1$ eitsizliği ile belirlenen D bölgesi üzerinden,

$$\iint_D e^{x+y} dA$$

integralini hesaplayınız.

7. Köşeleri $(0,0),(2\pi,0),(0,\pi)$ olan D üçgeni üzerinden,

$$\iint_D \sin(x+2y).\cos(x-2y) dA$$

integralini hesaplayınız.

8. $y = x^2, y = 4x^2, xy = 1, xy = 5$ eğrilerinin sınırladığı D bölgesi üzerinden,

$$\iint_D xy dA$$

integralini hesaplayınız.

İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı

1. Pappus teoremini kullanarak dik dairesel koninin yanal yüzeyinin alanını ve hacmini bulunuz.

   Çözüm:

   Genel olması için koninin yüksekliği olarak herhangi bir r sayısı alalım. Koninin simetri doğrusu $Oy-$ ekseni olacak şekilde tepe noktasını (O,O) başlangıç noktasına koyalım. Koni şekilde görüldüğü gibi baş aşağı konumlanmış olsun.

   Koninin yanal yüzeyindeki $|OB|$ doğru parçasını kütle merkezi, $|OB|$ bin orta noktasıdır: $(\overline{x},\overline{y}) = (\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}h)$ dir (bkz.). Alan

$$\begin{aligned} A &= |OB|.2\pi R = 2\sqrt{r^2+h^2}.\pi\frac{r}{2} \\ &= \pi r\sqrt{r^2+h^2} \end{aligned}$$

   OAB üçgeninin kütle merkezi $(\frac{r}{3}, \frac{h}{2})$ dır. Hacim

$$V = (2\pi R)\frac{rh}{2} = 2i\frac{r}{3}.\frac{rh}{2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

   olur.

2. Pappus'un ikinci teoremini kullanarak $y = \sqrt{r^2-x^2}, -r \le x \le r$ yayının kütle merkezini bulunuz.

   Çözüm:

   Pappus'un ikinci teoremini kullanacağız. Kürenin lanının $4\pi r$ olduğunu biliyouz. Buna göre;

$$\overline{x} = 0, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{\int \tilde{y} dm}{y dm} \\
&= \frac{\int \sqrt{r^2 - x^2}.\sqrt{-t1 + y^2}\, dx}{ds} \\
&= \frac{\int \sqrt{r^2 - x^2}.\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}\, dx}}{\int \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx} \\
&= \frac{\int_{-r}^{r} r dx}{\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx} \\
&= \frac{2r^2}{\pi r} \\
&= \frac{2r}{\pi}
\end{aligned}$$

Yüzey Alanı S:

$$S = (r\pi)2\pi(\frac{2r\pi}{)} = 4\pi r^2 \tag{40}$$

çıkar. Buunu daha kısa yolla yapabiliriz.

$$4\pi r^2 = (r\pi)2\pi\overline{y}$$

$$\Rightarrow \overline{y} = \frac{2}{\pi} r$$

Verilen iki denklemin grafikleri arasında kalan bölgenin alanını çift katlı integralle hesaplayınız.

a) $y = \frac{x^2}{4}, y = \frac{1}{2}x + 2$

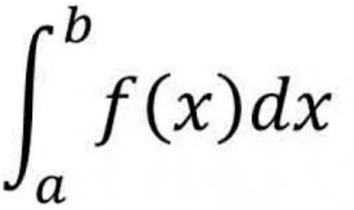


Figure 30: Soru7-11a

$$\begin{aligned}
Alan &= \int_{-2}^{4} \int_{x^2/4}^{2+x/2} dy dx \\
&= \int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4} \right) dx \\
&= (4 + 8 - \frac{64}{8}) * (1 - 4 + \frac{8}{12}) \\
&= 15 - 6 \\
&= 9
\end{aligned}$$

b) $xy = 5, x + y = 6$

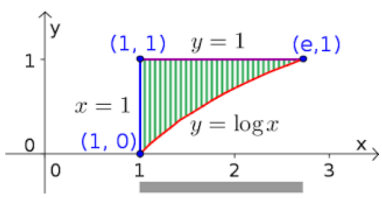


Figure 31: $xy = 5, x + y = 6$

$$\begin{aligned}
Alan &= \int_{1}^{5} \int_{5/x}^{6-x} dy dx \\
&= \int_{1}^{5} \left((6 - x) - \frac{5}{x} \right) dx \\
&= (6 - \frac{x^2}{2} - 5ln(x))\Big|_1^5) \\
&= (30 - \frac{25}{2} - 5ln5) - (6 - \frac{1}{2} - 5ln1) \\
&= 30 - 18 - 5ln5 \\
&= 12 - 5ln5 \\
&= 9
\end{aligned}$$

c) $y = x, y = x^3$

$$
\begin{aligned}
Alan &= 2\int_0^1 \int_{x^3}^{x} dydx \\
&= 2\int_0^1 \left((x - x^3)\right) dx \\
&= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1 \\
&= 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Örnek

r yarıçaplı bir çember, çember düzleminde ve çember merkezine $b, (b > r)$ uzaklıkta sabit duran bir eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin (simit, torus, daughnut) yüzey alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm:

Çemberin ağırlık merkezi kendi merkezidir. Çemberin merkezi eksen etrafında bir dönüş yapınca $2\pi b$ kadar yol alır. Çemberin alanı πr^2 dir. Pappus teoremine göre hacim

$$V = (2\pi b)(\pi r^2) = 2\pi^2 br^2$$

olur, yüzey alanı ise

$$S = (2\pi b)(2\pi r) = 4\pi^2 br$$

olur.

Alıştırmalar

1. $x = a, y = a$ karesinden a yarıçaplı çember çıkarılıyor. Geri kalan düzlemsel bölgenin alanını bulınız.

Hacim hesapları

Aşağıda tanımlanan hacimleri hesaplayınız (Sadece D bölgesinin grafiğini çiziniz).

a) Köşeleri (0,0), (0,1), (1,0) olan D üçgeni ile $z = x + y$ nin grafiği arasındaki hacim,

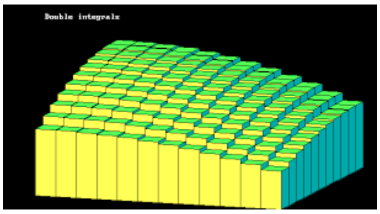


Figure 33: Köşeleri:$(0,0),(0,1),(1,0)$

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_D (x+y)\,dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{-x^2}{2} + \frac{1}{2}\right] dx \\
&= \left.\frac{-x^3}{6} + \frac{x}{2}\right|_0^1 \\
&= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{12} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

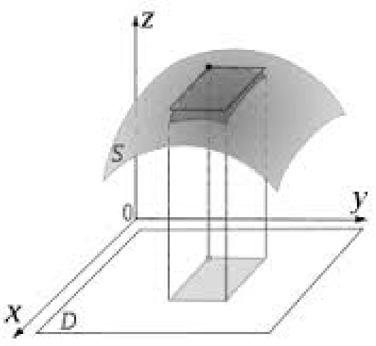


Figure 34: Köşeleri: $(0,0),(0,2),(2,2)$

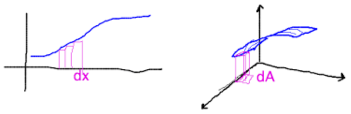


Figure 35: Köşeleri: $y=1-x^2, y=0, z=4$

b) Köşeleri (0,0), (0,2), (2,2) olan D üçgeni ile $z=(x-y)^2$ nin grafiği arasındaki hacim,

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_D (x-y)^2 dA \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} (x-y)^2 dydx \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Hacim Hesapları

$y=l-x^2$ ve $y=0$ ile sınırlanan D bölgesi ile $z=4$ düzlemi arasında kalan hacim.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_D 4dA \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} 4dydx \\
&= \int_{-1}^{1} 4y\Big|_{y=0}^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (4-4x^2)dx \\
&= 2(4x-\frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

Dönel Cisimleri Hacimlerin

Düzlemsel bir R bölgesinin, kendisini kesmeyen bir doğru etrafında dönmesiyle oluşan cisme dönel katı cisim denilir. Bu cisim gerçekte uxayda var olmayan ama hayal ettiğimiz bir cisimdir.

Düzlemsel R bölgesinin D doğrusuna göre üst sınırı $f(x)$ fonksiyonu ile belirlensin. R bölgesinin her noktasından onu kesmeyen D doğrusuna dikmeler inelim. R bölgesi parçalı değilse, dikmelerin ayakları D doğrusu üzerinde bir $[a,b]$ aralığı oluşturur. D doğrusunu koordinat ekseni olarak alırsak, $[a,b]$ aralığı f fonksiyonunun tanım bölgesi içinde olacaktır. Dikmelerin ayaklarını içeren $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsünü (partition) P ile gösterelim:

$$a = x_0 < x_1 < -x_2 < \ldots < x_n = b \tag{41}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, M = max\{\Delta x_i| \quad i = 1,2,\ldots,n\} \tag{42}$$

olsun. Her bölüntü içinde bir $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ olacak şekilde bir t_i noktası seçelim. Şimdi tabanı Δx_i ve yüksekliğ $h_i = |f(t_i)|$ olan dikörtgenin D doğrusu etrafında bir tam dönüş yaptığını varsayalım. Yarıçapı h_i olan bir silindir oluşur. Bu silindirin hacmi

$$\pi h_i^2 \Delta x_i = \pi f(t_i)^2 \Delta x_i \tag{43}$$

olacaktır. Bunların toplamı da asıl S cisminin hacmine yakın olacaktır.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f(t_i)^2 \Delta x_i \tag{44}$$

Eğer $M = max\{\Delta x_i\} \to 0$ iken (44) toplamının limiti varsa, bu limit

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx \tag{45}$$

integrali ile ifade edilir ve bu intgral S cisminin hacmine eşit olur.

Dönme ekseni değişirse, $Ox-$ ile $Oy-$ eksenlerini yer değiştirebiliriz:

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy = \pi \int_c^d x^2\,dy \tag{46}$$

Şimdi dönen R düzlemsel bölgesinin üstten $y = f(x)$, alttan $y = g(x)$ fonksiyonları ile sınırlı olduğunu düşünelim. Bu düzlem parçasının bir tam dönüş yapmasıyla oluşan dönel katı cismin hacmı f ile g fonksiyonlarına karşılık gelen iki dönel katı cismin hacimleri farkıdır. Dolayısıyla;

$$V = V_f - V_g = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\,dx \tag{47}$$

Silindirik Kabuklar Yöntemi

$y = f(x), x = a, x = bveOx-$ ekseni ile çevrili düzlemsel bölgenin $Oy-$ ekseni çevreinde bir tam dönüş yaptığını düşünelim. Bu dönme sonunda x ve $x + \Delta x$ aralığı üzerindeki dar şeridin $Oy-$ ekneni çevresinde kabuğu Δx kalınlığıda olan silindirik bir cisim oluşur. Bu silindirin merkex ekseni $Oy-$ ekseni ve iç yarıça x dış yarıçapı, Şimdi $\eta_i \in [x, x + \delta]$ olan bir η_i noktası düşünelim. η_i noktasının sözkonusu dönüş esnasında çizdiği çemberin uzunluğu $2\pi\eta_i$ olacaktır. O halde η_i üzerine kurulan silindirin yüzey alanı

$$A(\eta_i) = 2\pi\eta_i f(\eta_i) \tag{48}$$

olacaktır. $x_i, \le \eta_i \le x_i + \Delta x_i$ olduğuna göre

$$f(x_i)\Delta x_i \le f(\eta_i)\Delta x_i \le f(x + \Delta x_i)\Delta x_i$$

olmalıdır.

$x + \delta x$ olur. $[x, x + \delta x$ aralığının orta noktası

$$r = \frac{x + x + \Delta x}{2} = x + \frac{\Delta x}{2}$$

olur. Sözkonusu silindirin iç ve dış yüzeyleri maksimum $\Delta x \to 0$ iken, söz konusu küçük aralığın r orta noktasından geçen silindir yüzeyine yaklaşacaklardır. r orta noktası söyldiğimiz bir tam dönüş sonunda r yarıçaplı bir çember çizer. Bu çemberin uzunluğu $2\pi r$ olduğuna göre, silindir duvarının alanı

$$\Delta A = 2\pi r$$

Dilimleme Yöntemiyle Hacim Bulma

Şekilde hacmi hesaplanacak bir cisim görülüyor. Uygun bir Ox- ekseni seçelim. Eksenin hangi konumda seçildiği ancak pratik değer taşır. Cismin her noktasından D doğrusuna dikmeler inildiğini varsayalım. Dikmelerin ayaklarını içeren $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsünü (partition) P ile gösterelim:

$$a = x_0 < x_1 < -x_2 < \ldots < x_n = b \tag{49}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, M = max\{\Delta x_i | \quad i = 1,2,\ldots,n\} \tag{50}$$

olsun. x_i noktasından D doğrusuna dikey olacak biçimde çizilen düzlem S cismiyle kesişir ve onunla arakesiti düzlemsel bir R_i bölgesi oluşturur. R_i bölgesinin alanına $A(x_i)$ diyelim. Bölüntünün ardışık x_{-i-1}, x_i noktalarından deçen dikey düzlemlerin S ile arakesitleri arasında kalan dilimi düşünelim. Bu dilimin hacmı yaklaşık olarak, $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$ olmak üzere,

$$\Delta V(x_i) \approx A(x_i).\Delta x_i \tag{51}$$

olacaktır. Bu yaklaşık hacimlerin toplamı S cisminin V hacmine yakın olur:

$$V \approx \sum_{i=0}^{n} \Delta V(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \Delta A(x_i)\Delta x_i \tag{52}$$

Δx_i bölüntü aralıklarının M maksimum uzunluğu sifıra giderken (52) toplamının limiti varsa söza konusu limit

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \tag{53}$$

integraline eşit olur. Bu değer S cismini hacmidir.

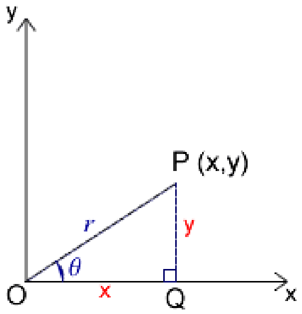


Figure 36: Kutupsal koorinatlar

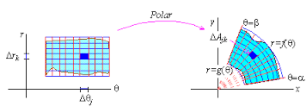


Figure 37: Dönüşüm

Kutupsal Koordinatlar

Kutupsal koordinatlara dönüşümü incelerken

$$T : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

dönüşümü ile xOy- dikey kartezyen koordinat sisteminden (r,θ) kutupsal koordinat sitemine nasıl dönüşüm yapıldığını incelemiştik. Bu kesimde, bu dönüşümün katlı integrallerde kullanılışını ele alacağız.

$$r^2 = x^2 + y^2,\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

ve

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}\right| = r$$

çıkar. Öyleyse aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz:

Theorem 0.33. *$D = \{(r,\theta) | \quad a \le r \le b, \alpha\theta \le \beta, \quad 0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ bölgesinde f fonksiyonu sürekli ise*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int \alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr d\theta \tag{54}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Önceki kesimde ifade edilen Teorem 36'in varsayımları sağlandığından, sözkonusu teoremin burada geçerliolacağı açıktır. □

Örnek 0.34. $x^2 + y^2 \leq 4$ *kapalı diski üzerindeki*

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right|_0^2 \\ &= 12\pi \end{aligned}$$

Örnek 0.35. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = e^2$ *çemberleri arasında kalan D halka bölgesi üzerindeki*

$$\iint_D ln(x^2 + y^2) dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \iint_D ln(x^2 + y^2) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^e ln(r^2) r dr d\theta \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{2} r^2 ln r - \frac{1}{4} r^2 \right)_2^e \\ &= \pi(e^2 + 4 - 8ln2) \end{aligned}$$

Theorem 0.36. $R = \{(r,\theta) | \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), r_1(\theta) \geq 0, r_2(\theta) \geq 0\}$ *bölgesinde f fonksiyonu sürekli ise*

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA = \int \alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta) r\, dr d\theta \qquad (55)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 0.37. *a yarıçaplı kürenin hacmini kutupsal koordinatları kullanarak hesplayınız.*

Çözüm: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin xy-düzleminin üstünde kalan yarısını hacmini bulup çıkaı 2 ile çarpabiliriz.

$$z \geq 0, \quad z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

dir. Yarı kürenin xy düzlemi üzerindeki izdüşümü $D = \{(x, y) | \quad x^2 + y^2 \leq$

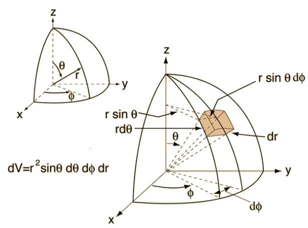


Figure 38: Kürenin hacmi

a^2 dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
V &= 2\iint_D ln(r^2-x^2-y^2)\,dydx = 2\int_0^{2\pi}\int_0^r \sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)_0^a d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left((a^2-a^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2-0^2)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(a^3\theta\, d\theta \\
&= \frac{2}{3}\,(a^3\theta|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

Örnek 0.38. *D bölgesi birinci dörtte birlik (first quadrant) bölgede $r = 3\cos\theta$ diskinden ile $r = 1+\cos\theta$ kalp eğrisi (cardioid) atılınca geri kalan bölge olsun.*

$$\iint_D \frac{1}{x}dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

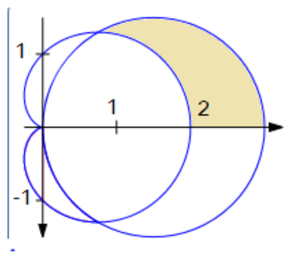


Figure 39: Alan

Çözüm: $3\cos\theta = 1+\cos\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 1, \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{x}dA &= \int_0^{\pi/3}\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta}\frac{1}{r\cos\theta}rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta}\sec\theta\, drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} r\sec\theta|_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}(3\cos\theta\sec\theta-(1+\cos\theta)\sec\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}/2-\sec\theta)d\theta \\
&= 2\theta - ln|\sec\theta+\tan\theta||_0^{\pi/3} \\
&= \frac{2\pi}{3} - ln(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Örnek 0.39. *D bölgesi birinci dörtte birlik (first quadrant) bölgesi olsun. Bu sınırsız bölgede,*

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm: Bu has olmayan bir integraldir. Öyleyse, Kutupsal koorinat sistemine geçerek,

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dA &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^n e^{-r^2} r\, dr d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^n \right) d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} e^{-n^2} + \frac{1}{2} \right) d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-n^2} \right) .\theta \Big|_0^{\pi/2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{n^2} \right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Örnek 0.40.

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\
I_a &= \int_0^a e^{-x^2} dx
\end{aligned}$$

dersek, değişken adını serbestçe seçebildiğimizi de düşünerek,

$$\begin{aligned}
(I_a)^2 &= \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^a e^{-y^2} dy \right) \\
&= \iint_R e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(önceki problemden)}
\end{aligned}$$

çıkar. Önceki problemin sonucunun bilinmediğini, varsayarak çözümü bulabiliriz. Şimdi, birinci dörtte birlik (first quadrant) bölgede R_1 bölgesi a yarıçaplı disk, R bölgesi kenar uzunluğu a olan kare, R_2 bölgesi $\sqrt{2}a$ yarıçaplı disk olmak üzere,

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \leq \iint_R e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \leq \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$$

yazabiliriz. Kutupsal koordinatları kullanırsak,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^a e^{-r^2} \, r dr d\theta \leq (I_a)^2 \leq \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2} \, r dr d\theta$$

buradan,

$$\frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-r^2} \right) \leq (I_a)^2 \leq \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-2a^2} \right)$$

$\lim_{a\to\infty}$ için istene sonuç elde edilr:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Alıştırmalar

1. $D = \{(x,y) | \quad \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ ise

$$\iint_D \cos\left(\sqrt{x^2 4y^2}\right)\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

2. $z = x^2 + y^2$ parabolünün altında, $xy-$ düzleminin üstünde ve $x^2 + y^2 = 2x$ silindirinin içinde kalan katı cismin havcini bulunuz.

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi ile üstten ve $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi ile alttan sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

4. D bölgesi $x = \sqrt{4 - y^2}$ yarıçemberi ve $y-$ekseni ile sınırlı bölge ise,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA$$

integralini hesaplayınız.

5. D bölgesi $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4$, çemberleri ile sınırlı bölge ise,

$$\iint_D x\, dA$$

integralini hesaplayınız.

6. D bölgesi $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4$, çemberleri sınırlı bölge ise,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

7.
$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

8.
$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} (x^2.y^2)\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

9.
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dydx$$

integralini hesaplayınız.

10. Aşağıdaki ntegralleri tek bir integral işareti atında yazınız.

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\, dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\, dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

integralini hesaplayınız.

Fiziksel uygulamalar

Düzlemsel bölgelerin kütle merkzi

Tanım 0.41. *Düzlemsel bi bölgenin kütle merkezi, bütün noktalarının konsantre olduğu kabul edilen* ($\overline{x}, \overline{y}$ *noktasıdır.*

Düzlemsel bir A bölgesinin ($\overline{x}, \overline{y}$ kütle merkezi

$$M_y = \overline{x}A = \int x dA \tag{56}$$

$$M_x = \overline{y}A = \int y dA \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

eşitliklerini sağlar. Bu eşitliklerden

$$\overline{x}A = \frac{\int x dA}{A} \tag{59}$$

$$\overline{y}A = \frac{\int y dA}{A} \tag{60}$$

bağıntıları çıkarılır.

Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri

Mekanikte bir cismin kütle merkezi (ağırlık merkezi), cismin bütün noktalarının konsantre olduğu bir noktadır.

1. $x32 + y^2 = 25$ çemberinin sınırladığı diskin ikinci dörttebirlik böldede (second quadrant) kalan kısmının ağırlık merkezini bulunuz.

   Çözüm:

$$A = \frac{\pi}{4}5^2 = \frac{25}{4}\pi \tag{61}$$

$$\overline{x} = \frac{4}{25\pi}\int_{-5}^{0} x\sqrt{25 - x^2}\, dx = -\frac{20}{3\pi} \tag{62}$$

$$\overline{y} = \frac{4}{25\pi}\int_{-5}^{0} y\sqrt{25 - y^2}\, dx = -\frac{20}{3\pi} \tag{63}$$

$$\tag{64}$$

   olur.

2. $x^2 + y^2 = a^2$ ile sınırlı birim diskin birinci dörtte birlik bölgede (first quadrant) kalan kısmının kütle merkezini bulunuz.

Çözüm:

Yoğunluğun her yerde aynı ve olduğunu varsayalım $\delta = 1$ olur.

$$\begin{aligned} dm &= \delta dA \\ &= \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^a y\, dm \\ &= \int_0^a y\sqrt{a^2 - y^2}\, dy \\ &= \frac{-1}{2}\int_0^a (-2y)\sqrt{a^2 - y^2}\, dy \\ &= \frac{-2}{3(2)}\left(\sqrt{a^2 - y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}} \\ &= \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{M_y}{A} \qquad \text{simetri nedeniyle} \\ &= \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

3. $y = h^2 - x^2$ parabolü ile $Ox-$ekseni arasında kalan bölgenin kütle merkzini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} M_x &= \int\int_R dA \\ &= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2 - x^2} y\, dy \\ &= \int_{-h}^{+h}\frac{1}{2}(h^2 - x^2)^2\, dx \\ &= \frac{8}{15}h^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int\int_R dA \\
&= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2-x^2} y\,dy dx \\
&= \int_{-h}^{+h} (h^2-x^2)\,dx \\
&= \left. h^2x - \frac{1}{3}x^3 \right|_{-h}^{h} \\
&= \frac{4}{3}h^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\
&= \frac{2h^2}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \int\int_R x dA \\
&= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2-x^2} x\,dy dx \\
&= \int_{-h}^{+h} x(h^2-x^2)\,dx \\
&==
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{M_y}{A} \\
&= \frac{0}{A} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. Birim kareden birim disk çıkarılıyor. Geri kalan üçgen benzeri düzlemsel bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

   Çözüm:

   Birim kareyi koordinat eksenind $x = 1, y = 1$ doğruları ile koordinat eksenlerinin sınırladığı düzlemsel bölgedir. Birim disk $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ve içidir. Şekilden birim kareden birim disk atılınca kalan bölge görülüyor.

   Problemi daha genel tutmak içim 1 yerine a alalım.

$$\begin{aligned}
M_x &= \int\int_R y dA \\
&= \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a y\,dy dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a \left(a^2-(a^2-x^2)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a x^2\,dx \\
&= \frac{1}{6}a^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a dydx \\ &= a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 \\ &= \frac{a^2(4-\pi)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{a^3}{6}\frac{4}{a^2(4-\pi)} \\ &= \frac{2a}{12-3\pi} \end{aligned}$$

Simetri nedeniyle,

$$\overline{x} = \frac{2a}{12-3\pi}$$

olur.

5. $y = sinx, 0 \le x \le \pi$ ile $Ox-$ ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} M_x &= \int\int_R ydx \\ &= \int_0^\pi \int_0^{sinx} (ydy)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-cos2x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{8}sin2\pi \\ &= \frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int\int_R ydA \\ &= |\int_0^\pi \int_0^{sinx} dydx| \\ &= |\int_0^\pi sinx dx| \\ &= |cosx|_0^\pi| \\ &= |-1-1| \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{1}{8}\pi \\ \overline{x} &= \frac{M_y}{A} \qquad \text{simetri nedeniyle} \\ &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

Alıştırmalar

Aşağıda verilen eğrilerle sınırlanmış düzlemsel bölgelerin kütle merkezlerini bulunuz.

1. $y^2 = 4x, x^2 = 4y;$ $\quad (\frac{9}{5}, \frac{9}{5})$
2. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0;$ $\quad (\frac{1}{e-1}, \frac{e+1}{4})$
3. $x = a(\theta - sin\theta), y = a(1 - cos\theta);$ $\quad (\pi a, \frac{5a}{6})$
4. $x = asin\theta, y = acos\theta;$ $\quad (\frac{4a}{3i}, \frac{4a}{3i})$

Yay'ın Kütle merkezi

Düzlemsel bölgenin kütle merkezine benzer olarak bir yay'ın kütle merkezi tanımlanabilir:

$$M_y = s\overline{x} = \int xds$$
$$M_x = s\overline{y} = \int yds$$

Örnek:
$y = \sqrt{a^2 - x^2}, a > x, x > 0$ yayının kütle merkezini bulunuz.
Çözüm:

$$M_x = \overline{y}s = \overline{y}\int ds = \overline{y}a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\overline{y}asin^{-1}\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\overline{y}a\pi}{2}$$

$$\overline{y} = \frac{2a}{\pi}$$
$$\overline{x} = 0 \qquad \text{simetri}$$

Alıştırmalar

Aşağıdaki yayların kütle merkezlerini bulunuz:

1. $x = 3t^2, y = 6t, 0 \le t \le 2$
2. $x = e^{-t}cost, y = e^{-t}sint, 0 \le t \le 2\pi$
3. $x = e^y, 0 \le y \le 1$
4. $x = asin^3t, y = acos^3t$
5. $y = coshx, -1 \le x \le 1$

Yoğunluk

Bir cismin P noktasını içeren küçük bir elementini ΔV ile ve ΔV nin kütlsini Δm ile gösterlim. Eğer

$$\delta = \lim_{\Delta V to 0}\frac{\Delta m}{\delta V} \tag{65}$$

limiti varsa, buna cismin P noktasındaki yoğunluğu denilir. Bu tanımdan anlaşıldığı gibi, bir cismin yoğunluğu sabit olmayabilip her noktada farklı bir yoğunluğa sahip olabilir. Tabii, bazı cisimlerde yoğunluk her noktada aynı olabilir. (134) limitini

$$\delta = \frac{dm}{dV} \qquad \text{dersek,} \quad dm = \delta dV \tag{66}$$

biçiminde de yazabiliriz. Şimdi bir cismin kütlesi Δm olan çok küçük ΔV parçacıklarına ayrıldığını varsayalım. Her parçacığın içerdiği P noktasındaki yoğunluğun δ olduğunu kabul edersek,

$$\Delta m \approx \delta \Delta V \tag{67}$$

yazabiliriz. Şimdi bütün cismin bir noktaya yoğunlaştını ve bu noktanın koordinantlarının

$$\tilde{x}\Delta m, \qquad \tilde{y}\Delta m, \qquad \tilde{z}\Delta m \tag{68}$$

koşulunu sağladığını varsayalım. $\Delta V \to 0$ iken, () ifadelerinden, koordinat düzlemlerine göre cismin momentlerini yazabiliriz:

$$M_{yz} = \int \tilde{x} dm, \quad M_{zx} = \int \tilde{y} dm, \qquad M_{xy} = \int \tilde{z} dm \tag{69}$$

Buradan , kütle merkezinin koordinatlarını yazabiliriz:

$$\overline{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm}, \quad \overline{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm}, \quad \overline{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm} \tag{70}$$

Moment

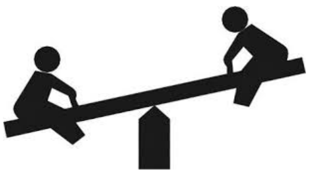


Figure 40: Moment

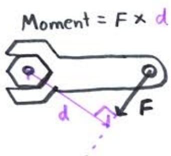


Figure 41: Moment

Noktaya Göre Moment

Tanım 0.42. *Bir parçacığın sabit bir noktaya göre momenti, parçacığın noktaya olan uzaklığı ile kütlesinin çarpımına eşittir.*

Parçacığın kütlesi m ve sabit noktaya olan uzaklığı d ise moment dm dir.

Doğru üzerinde Moment

Bir doğru üzerinde konuşlanan ve kütleleri $m_1, m_2, \ldots, m_n$ olan n-tane parcağın her birisinin doğru üzerideki sabit bir O noktasına uaklıkları, sırasıyla, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ise, bu parçacıklardan oluşan cismin O noktasına göre momenti,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k m_k \tag{71}$$

sayısıdır. Bütün kütlenin söz konusu doğru üzerindeki $\overline{x}$ noktasına yığıldığını varsayarsak

$$\sum m_k = M$$

kütlesinin momenti

$$\overline{x}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) = \overline{x}M \tag{72}$$

olur. Yukarıdaki varsayımlar altında, kütlenin sabit noktaya olan uzaklığı olarak alınan $\overline{x}$ sayısına M cisminin *kütle merkezi* denilir. Buradan şunu yazabiliriz:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{M} \tag{73}$$

Buna göre,bir cisim n-tane parçacıktan oluşuyor ve n-tane parçacığın her birisinin kütlesi $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ve $Oy-$ eksenine uzaklıkları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ise cismin $Oy-$ eksenine göre momenti

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{74}$$

olur. Aynı cisim için Oy-ekseni yerine $Ox-$ eksenini koyarak, cismin $Ox-$ eksenine göre momentinin

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \tag{75}$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Kütle Merkezi

Tanım 0.43.

$$\text{Kütlesi } M = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{76}$$

olan bir cisim düşünelim. Sabit bir koordinat sistemine göre,

$$M\,\overline{x} = M_y \quad \text{ve} \quad M\,\overline{y} = M_x \tag{77}$$

koşulunu sağlayan $(\overline{x}, \overline{y})$ noktasına cismin *kütle merkezi* denilir.

Noktanın Eksene Göre Momenti

Şimdi parçacıkların bir doğru üzerinde değil de bir düzlem içine serpilmiş olduklarını düşünelim. Düzlemde sabit bir doğruya göre bu parçacıkların momentlerini bulmak istiyoruz. Önce bir parçacığın sabit doğruya göre momentini tanımlayalım:

$$M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} \left[f(x)\right]^2 dx$$

Figure 42: Moment

Tanım 0.44. *Kütlesi m olan bir parçacığın sabit bir doğruya uzaklığı d ise, parçacığın doğruya göre momenti dm dir.*

Fiziksel uygulamalarda parçacığın koordinat eksenlerine göre momenti söz konusu olur. Buna göre, düzlem üzerinde koordinatları

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

olan n-tane patçacığın her birisinin kütlesi, sırasıyla,

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

ise, bu parçacıkaların koordinat eksenlerine göre momentleri;

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} x_k m_k \tag{78}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_k m_k \tag{79}$$

olur. Bu parçacıklardan oluşam M cisminin bir $(\overline{x}, \overline{y})$ noktasınna yoğunlaştığını varsayarsak, bu noktaya söz konusu koordinat sistemine göre cismin kütle merkezi denilir. Söylediklerimizden şu bağıntıları yazabilirz:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{i=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_k m_k}{M} \tag{80}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{i=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_k m_k}{M} \tag{81}$$

Figure 43: Moment

Figure 44: Moment

Düzleme Göre Moment

Kütlesi m olan bir parçacığın uzayda sabit bir düzleme uzaklığı d ise, parçacığın sabit düzleme göre momenti dm dir.

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$$

noktalarının üç boyutlu uzayda serpiştirildiğini düşünelim. Bu noktaların sabit bir koordinat sisteminde koordinat düzlemlerine göre momenti, sırasıyla,

$$M_{yz} = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k \tag{82}$$

$$M_{zx} = \sum_{k=1}^{n} y_k m_k \tag{83}$$

$$M_{xy} = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k \tag{84}$$

(85)

olur. Burada, örneğn yz düzlemi yOz koordinat düzlemidir. Bu düzlemlere göre kütle merkezinin koordinatları

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{M} \tag{86}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{M} \tag{87}$$

$$\overline{z} = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{M} \tag{88}$$

(89)

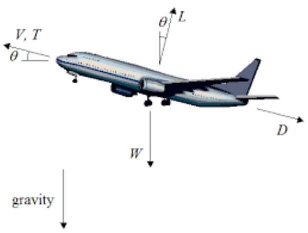


Figure 45: Moment

olur.

Fiziksel dünyada kütle parçacıklarına ayrılmamış sürekli bir bütündür. O tür cisimlerin kütle merkezleri ve momentleri için limit işleminden yararlanırız. Anımsarsanız, integrali sonlu toplamların limiti olarak tanımlamıştır. Fiziksel uygulamlarda da hep aynı işi yapacağız.

Alanı A olan düzlemsel bir R bölgesinin kordinat eksenlerne göre momentleri, sırasıyla,

$$m_x = \iint_R y\,dA, \qquad M_y = \iint_R x\,dA \tag{90}$$

biçiminde tanımlanır. Düzlemsel R bölgesinin, aynı düzlemdeki sabit bir koordinat sistemine göre $(\overline{x}, \overline{y})$ ile gösterilen kütle merkezi,

$$\overline{x}A = M_y \qquad \overline{y}A = M_x$$

eşitliğini sağlayan

$$\overline{x} = \frac{\iint_R x\,dA}{\iint_R dA}, \qquad \overline{y} = \frac{\iint_R y\,dA}{\iint_R dA} \tag{91}$$

Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti

A bir düzlemsel alan ve d bir doğru olsun. Şekil **??**'de görüldüğü gibi, A bölgesini ΔA_i dar şertlerine bölelim. Şerit içinde alınan bir noktanı d doğrusuna uzaklığı l_i olsun.

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \delta A_i \tag{92}$$

toplamının , $max|A_i| \to 0$ iken (92) limitine A alanının d doğrusuna göre momenti denilir. Bu ifadeden;

$$M_d = \lim_{max|A_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} l_i \delta A_i = \int l\,dA \tag{93}$$

çıkar. Tabii, sağdaki integrain bürün A alanı üzrinden alındığı açıktır.

Tek değişkenli fonksiyonla çalışıyorsak, M_d hesaplanırken alanı çevreleyen $y = f(x), y = g(x)$ fonksiyonlarının olduğunu ve dA nın dx cinsinden ifadwe edildiğini varsay yoruz.

Örnek

$y = \frac{1}{3}x^2$ parabolü ilşe $y = x$ doğrusu arasınada kalan alanın $Oy-$ eksenine gör momemntini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^3 x\,dA \\ &= \int_0^3 x(x\frac{1}{3}x^2)\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^3 4}{12} \\ &= 2.25 \end{aligned}$$

Bir Yayın Momenti

Düzlemsel alanların momemtlerini bulurken izlediğimiz yönteme benzer yöntemle bir yayın bir doğruya göre momentini bulabiliriz:

$$M_d = \int l\,ds \tag{94}$$

burada l yaya ait noktanın doğruya uzaklığıdır.

Örnek

Üst yarı düzlemdeki çember yayının $Ox-$ eksenine göre momentini bulunuz.

Çözüm:

Üst yarı düzlemdeki çember yayının denklemi $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (y \geq 0)$ dir. Yay uzuluğu

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{95}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} M_x &= \int y\,ds \\ &= \int_{-a}^{+a} \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\ &= \ ax|_{-a}^{+a} \\ &= a^2 - a^2 = 0 \end{aligned}$$

Örnek

I.dörtte birlik bölgedeki (first quadrant) çember yayının $Ox-$ eksenine göre momentini bulunuz.

Çözüm:

I.dörtte birlik bölgedeki çember yayının denklemi $y = \sqrt{a^2-x^2}$, $(0 \le x \le a$ dir. Yay uzuluğu

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{96}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} M_x &= \int y\,ds \\ &= \int_{0}^{+a} \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\ &= \ ax|_{0}^{+a} \\ &= a^2 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Uygulamalar

Aşağıdaki yayların koordinat eksenlerine göre momentlerini bulunuz.

1. $y^2 = 8x, \quad 0 \le x \le 4$
2. $y = e^x, \quad 0 \le x \le 1$
3. $y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
4. $y = \cosh x, \quad -1 \le x \le 4$
5. $y = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta), \quad cycloid$
6. $y = a\cos\theta, y = b\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$

Örnek

Üst yarı düzlemdeki yarı diskin $y = -r$ eksenine göre momentini bulunuz.

Çözüm:

Üst yarı düzlemdeki yarı yarı diskin üst sınırı $y = \sqrt{a^2-x^2}$, $(-a \le x \le$

a), ve alt sınırı $y = 0$ doğrusudur. Buna göre;

$$
\begin{aligned}
M_{\overline{y}+r} &= \iint_R x\,dA \\
&= \int_{-r}^{+r} \int_{-r}^{\sqrt{r^2-x^2}} x\,dx\,dy \\
&= \int_{-r}^{+r} (\sqrt{r^2-x^2}+r)x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\Big((r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + rx\Big)_{-r}^{+r} \\
&= -r^2
\end{aligned}
$$

Örnek

$x = a, y = a$ karesinden a yarıçaplı çember çıkarılıyor. Geri kalan düzlemsel bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int\int_R y\,dA \\
&= \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a y\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a \big(a^2-(a^2-x^2)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a x^2\,dx \\
&= \frac{1}{6}a^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a dy\,dx \\
&= a^2 - \frac{\pi a^2}{4} \\
&= \frac{a^2(4-\pi)}{4}
\end{aligned}
$$

Simetri nedeniyle;

$$\overline{x} = \frac{2a}{12-3\pi}$$

yazılabilir.

Üç Katlı İntegral İle Moment

4

(x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\rho(x, y, z)$ ile österelim. T katı cisminin kütlesi,

$$m = \iiint_T \rho(x,y,z)dV \tag{97}$$

dir. Koordinat düzlemlerine göre momentler,

$$M_{xy} = \iiint_T z\rho(x,y,z)dV \tag{98}$$

$$M_{xz} = \iiint_T y\rho(x,y,z)dV \tag{99}$$

$$M_{yz} = \iiint_T x\rho(x,y,z)dV \tag{100}$$

[4] Yoğunluk, birim hacim başına düşen kütledir.

eşitlikleri ile tanımlanır.

5 6

T cisminin kütle merkezi $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$'nin koordinatları,

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} \tag{101}$$

dir.

[7] eylemsizlik momenti

7

T cisminin eylemsizlik momentleri,

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV \tag{102}$$

$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV \tag{103}$$

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV \tag{104}$$

dir.

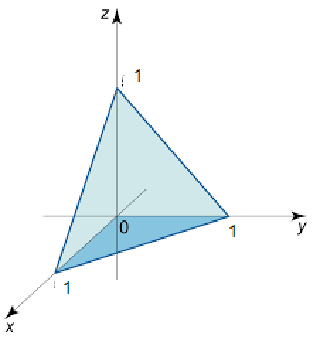


Figure 46: Düzgün Dörtyüzlü

Örnek 0.45. *Birinci sekizde birlik (octant) bölgede yer alan $x + y + z = 1$ düzgün dörtyüzlüsünün yoğunluk fonksiyonu $\rho(x, y, z)) \frac{16}{(1+x+y+z)^3)}$ dür. Kütlesini bulunuz.*

Çözüm:

Dörtyüzlüyü T ile gösterelim:

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_T \rho(x, y, z)\frac{15}{(1 + x + y + z)^3}dV \\
&= 16\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dzdydx}{(1 + x + y + z)^3)} \\
&= 16\int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{(1 + x + y + z)^2)}\right|_0^{1-x-y} dydx \\
&= 8\int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{(1 + x + y + z)^2)} - \frac{1}{4}\right)dy \\
&= 8\int_0^1 \left(-\frac{1}{1 + x + y} - \frac{y}{4}\right|_0^{1-x} dx \\
&= 8\int_0^1 \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{x - 3}{4}\right)dx \\
&= 8\left(ln(x + 1) + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x\right)\Big|_0^1 \\
&= 8\ln 2 - 5
\end{aligned}$$

olur.

Work (İş)

İş günlük yaşamda farklı anlamlara sahiptir. Biz burada yalnızca işin fiziksel anlamı üzerinde duracağız. İşin fiziksel anlamı, bir kuvvetin etkisiyle cismin yer değiştirmesiyle orantılı oluşan fiziksel niceliktir. Buna göre, örneğin, üstündeki büyük ağırlığı taşıyan bir köprünün ayakları hiç iş yapmıyor. Ağır bavulunu elinde tutan ama hareketsiz duran kişinin kol kasları ağrısa bile hiç iş yapmıyor. Ama o bavulu alıp bineceği taşıtın rafına koyarsa bir iş yapmış olur.

Tanım 0.46. *Sabit bir kuvvet x-ekseni boyunca bir cisme etki ediyor ve cisim a noktaından b noktasına gidiyorsa, yapılan iş*

$$W = F(b-a) \tag{105}$$

olarak tanımlanır.

Başka bir deyişle, *iş*, kuvvet ile cismin aldığı yolun çarpımıdır.

Tanım 0.47. *Bir F kuvvetinin etkisiyle hareket eden cisim F vektörünün doğrultusunda s kadar yol giderse, yapılan iş*

$$W = Fs \tag{106}$$

dir.

Fiziksel olayların çoğunda olduğu gibi, F kuvveti sabit olmayabilir; noktadan noktaya değişebilir. Bu durumda cismin s kadar yer değiştirmesini küçük Δs aralıklarının toplamı olarak düşünürüz. Böylece yapılan işi bir integralle ifade etme olanağı doğar.

Bunu biraz ayrıntılı açıklayalım: Bir cisim sürekli bir kuvvetin etkisiyle a noktasından b noktasına gitsin. F kuvveti sabit olmasın ve her x noktasındaki değeri $f(x)$e eşit olsun. $F(x)$ fonksiyonunu sürekli varsayalım. $[a,b]$ aralığını $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ ve $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ koşulunu sağlayan küçük $[x_{i-1}, x_i]$ aralıklarına bölelim. Başka bir deyişle $[a,b]$ aralığının bir ayrışımını (partition) oluşturalım. $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere kuvvetin t_i noktasında $f(t_i)$ olduğunu varsayalım. Cismin a noktasından b noktasına gitmesi halinde yapılan iş yaklaşık olarak

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \tag{107}$$

olcaktır. Şimdi $max_{1\le i\le n}|\Delta x_i| \longrightarrow 0$ iken

$$W = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \tag{108}$$

olur.

Örnek:

Helikoid biçimindeki bir yayın doğal uzunluğu 10 cm'dir. yayın 2 cm gerilmesi (genişlemesi) için 3 gr kuvvet gerekiyor. yayın doğal halinden 15cm gerilmesi halinde yapılan iş ne kadardır?

Çözüm:

Hook kuralına göre, yayın doğal halinden x kadar sündürülmedi için gereken $F(x)$ kuvvetinin

$$F(x) = kx \quad \text{(k yaya bağlı sabit)} \tag{109}$$

olduğu bilinir. Asıl problemi çözmek için k sabitini bulmalıyız. Verienlerden;

$$F(2) = 3 \Rightarrow 3 = 2km \Rightarrow k = \frac{3}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}x$$

çıkar. Bu değeri (108)'de kullanırsak,

$$W = \int_0^5 \frac{3}{2}x\,dx = \frac{3}{2}x\frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{3}{4}(25-0) = 18\frac{3}{2}$$

olur.

Örnek:

kütleleri m_1 ve m_2 oln cisimlerinin birbirlerini çekimleri $G\frac{m_1.m_2}{s^2}$ bağıntısı ile verilir. Bu bağıntıda G sayısı çekim (gravitasyon) katsayısı denilen bir sabit, s ise iki cisim arasındaki uzaklıktır. Kütlesi m_1 oln cisme göre kütlesi m_2 olan cismin s_1 konumundans_2 konumuna gitmesi halinde yapılan iş nedir?

Çözüm:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(x)\,dx = \int_{s_1}^{s_2} G\frac{m_1.m_2}{s^2}\,dx = gm - 1m_2\left(\frac{1}{s_2^2} - \frac{1}{s_1^1})\right)$$

Düzlemsel Bölgelerin Kütle Merkezi

Tanım 0.48. *Düzlemsel bi bölgenin kütle merkezi, bütün noktalarının konsantre olduğu kabul edilen $(\overline{x}, \overline{y}$ noktasıdır.*

Düzlemsel bir A bölgesinin $(\overline{x}, \overline{y}$ kütle merkezi

$$M_y = \overline{x}A = \int xdA \tag{110}$$

$$M_x = \overline{y}A = \int ydA \tag{111}$$

$$\tag{112}$$

eşitliklerini sağlar. Bu eşitliklerden

$$\overline{x}A = \frac{\int xdA}{A} \tag{113}$$

$$\overline{y}A = \frac{\int ydA}{A} \tag{114}$$

bağıntıları çıkarılır.

Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri

Mekanikte bir cismin kütle merkezi (ağırlık merkezi), cismin bütün noktalarının konsantre olduğu bir noktadır.

1. $x32 + y^2 = 25$ çemberinin sınırladığı diskin ikinci dörttebirlik böldede (second quadrant) kalan kısmının ağırlık merkezini bulunuz.

   Çözüm:

$$A = \frac{\pi}{4}5^2 = \frac{25}{4}\pi \tag{115}$$

$$\overline{x} = \frac{4}{25\pi}\int_{-5}^{0} x\sqrt{25 - x^2}\,dx = -\frac{20}{3\pi} \tag{116}$$

$$\overline{y} = \frac{4}{25\pi}\int_{-5}^{0} y\sqrt{25 - y^2}\,dx = -\frac{20}{3\pi} \tag{117}$$

$$\tag{118}$$

olur.

2. $x^2 + y^2 = a^2$ ile sınırlı birim diskin birinci dörtte birlik bölgede (first quadrant) kalan kısmının kütle merkezini bulunuz.

Çözüm:

Yoğunluğun her yerde aynı ve olduğunu varsayalım $\delta = 1$ olur.

$$\begin{aligned} dm &= \delta dA \\ &= \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^a y\, dm \\ &= \int_0^a y\sqrt{a^2 - y^2}\, dy \\ &= \frac{-1}{2}\int_0^a (-2y)\sqrt{a^2 - y^2}\, dy \\ &= \frac{-2}{3(2)}\left(\sqrt{a^2 - y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}} \\ &= \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{M_y}{A} \qquad \text{simetri nedeniyle} \\ &= \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

3. $y = h^2 - x^2$ parabolü ile $Ox-$ekseni arasında kalan bölgenin kütle merkzini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} M_x &= \int\int_R dA \\ &= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2-x^2} y\, dy \\ &= \int_{-h}^{+h}\frac{1}{2}(h^2 - x^2)^2\, dx \\ &= \frac{8}{15}h^5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int\int_R dA \\
&= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2-x^2} y\,dy\,dx \\
&= \int_{-h}^{+h} (h^2-x^2)\,dx \\
&= h^2x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-h}^{h} \\
&= \frac{4}{3}h^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\
&= \frac{2h^2}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_y &= \int\int_R x\,dA \\
&= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2-x^2} x\,dy\,dx \\
&= \int_{-h}^{+h} x(h^2-x^2)\,dx \\
&==
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{M_y}{A} \\
&= \frac{0}{A} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

4. Birim kareden birim disk çıkarılıyor. Geri kalan üçgen benzeri düzlemsel bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

   Çözüm:

   Birim kareyi koordinat eksenind $x = 1, y = 1$ doğruları ile koordinat eksenlerinin sınırladığı düzlemsel bölgedir. Birim disk $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ve içidir. Şekilden birim kareden birim disk atılınca kalan bölge görülüyor.

   Problemi daha genel tutmak içim 1 yerine a alalım.

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int\int_R y\,dA \\
&= \int_0^a\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a y\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a \left(a^2-(a^2-x^2)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a x^2\,dx \\
&= \frac{1}{6}a^3
\end{aligned}
$$

$$A = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a dydx$$
$$= a^2 - \frac{\pi}{4}a^2$$
$$= \frac{a^2(4-\pi)}{4}$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{A}$$
$$= \frac{a^3}{6}\frac{4}{a^2(4-\pi)}$$
$$= \frac{2a}{12-3\pi}$$

Simetri nedeniyle,
$$\overline{x} = \frac{2a}{12-3\pi}$$
olur.

5. $y = sinx, 0 \le x \le \pi$ ile $Ox-$ ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$$M_x = \int\int_R ydx$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{sinx}(ydy)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sin^2x\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-cos2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{8}sin2\pi$$
$$= \frac{1}{4}\pi$$

$$A = \int\int_R ydA$$
$$= |\int_0^{\pi}\int_0^{sinx} dydx|$$
$$= |\int_0^{\pi} sinx\,dx|$$
$$= |cosx|_0^{\pi}|$$
$$= |-1-1|$$
$$= 2$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{A}$$
$$= \frac{1}{8}\pi$$
$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} \qquad \text{simetri nedeniyle}$$
$$= \frac{1}{2}\pi$$

Alıştırmalar

Aşağıda verilen eğrilerle sınırlanmış düzlemsel bölgelerin kütle merkezlerini bulunuz.

1. $y^2 = 4x, x^2 = 4y;$ $(\frac{9}{5}, \frac{9}{5})$
2. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0;$ $(\frac{1}{e-1}, \frac{e+1}{4})$
3. $x = a(\theta - sin\theta), y = a(1 - cos\theta);$ $(\pi a, \frac{5a}{6})$
4. $x = asin\theta, y = acos\theta;$ $(\frac{4a}{3i}, \frac{4a}{3i})$

Yay'ın Kütle merkezi

Düzlemsel bölgenin kütle merkezine benzer olarak bir yay'ın kütle merkezi tanımlanabilir:

$$M_y = s\overline{x} = \int xds$$
$$M_x = s\overline{y} = \int yds$$

Örnek:
$y = \sqrt{a^2 - x^2}, a > x, x > 0$ yayının kütle merkezini bulunuz.
Çözüm:

$$M_x = \overline{y}s = \overline{y}\int ds = \overline{y}a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\overline{y}asin^{-1}\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\overline{y}a\pi}{2}$$

$$\overline{y} = \frac{2a}{\pi}$$
$$\overline{x} = 0 \qquad \text{simetri}$$

Alıştırmalar

Aşağıdaki yayların kütle merkezlerini bulunuz:

1. $x = 3t^2, y = 6t, 0 \leq t \leq 2$
2. $x = e^{-t}cost, y = e^{-t}sint, 0 \leq t \leq 2\pi$
3. $x = e^y, 0 \leq y \leq 1$
4. $x = asin^3t, y = acos^3t$
5. $y = coshx, -1 \leq x \leq 1$

Yoğunluk

Bir cismin P noktasını içeren küçük bir elementini ΔV ile ve ΔV nin kütlsini Δm ile gösterlim. Eğer

$$\delta = \lim_{\Delta V to 0} \frac{\Delta m}{\delta V} \tag{119}$$

limiti varsa, buna cismin P noktasındaki yoğunluğu denilir. Bu tanımdan anlaşıldığı gibi, bir cismin yoğunluğu sabit olmayabilip her noktada farklı bir yoğunluğa sahip olabilir. Tabii, bazı cisimlerde yoğunluk her noktada aynı olabilir. (134) limitini

$$\delta = \frac{dm}{dV} \qquad \text{dersek,} \quad dm = \delta dV \tag{120}$$

biçiminde de yazabiliriz. Şimdi bir cismin kütlesi Δm olan çok küçük ΔV parçacıklarına ayrıldığını varsayalım. Her parçacığın içerdiği P noktasındaki yoğunluğun δ olduğunu kabul edersek,

$$\Delta m \approx \delta \Delta V \tag{121}$$

yazabiliriz. Şimdi bütün cismin bir noktaya yoğunlaştını ve bu noktanın koordinantlarının

$$\tilde{x}\Delta m, \qquad \tilde{y}\Delta m, \qquad \tilde{z}\Delta m \tag{122}$$

koşulunu sağladığını varsayalım. $\Delta V \to 0$ iken, () ifadelerinden, koordinat düzlemlerine göre cismin momentlerini yazabiliriz:

$$M_{yz} = \int \tilde{x} dm, \quad M_{zx} = \int \tilde{y} dm, \qquad M_{xy} = \int \tilde{z} dm \tag{123}$$

Buradan , kütle merkezinin koordinatlarını yazabiliriz:

$$\overline{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm}, \quad \overline{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm}, \quad \overline{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm} \tag{124}$$

Düzlemsel Bölgelerin Kütle Merkezi

Tanım 0.49. *Düzlemsel bir bölgenin kütle merkezi, bütün noktalarının konsantre olduğu kabul edilen* $(\overline{x}, \overline{y})$ *noktasıdır.*

Düzlemsel bir A bölgesinin $(\overline{x}, \overline{y}$ kütle merkezi

$$M_y = \overline{x}A = \int x dA \tag{125}$$

$$M_x = \overline{y}A = \int y dA \tag{126}$$

$$\tag{127}$$

eşitliklerini sağlar. Bu eşitliklerden

$$\overline{x}A = \frac{\int x dA}{A} \tag{128}$$

$$\overline{y}A = \frac{\int y dA}{A} \tag{129}$$

bağıntıları çıkarılır.

Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri

Mekanikte bir cismin kütle merkezi (ağırlık merkezi), cismin bütün noktalarının konsantre olduğu bir noktadır.

1. $x32 + y^2 = 25$ çemberinin sınırladığı diskin ikinci dörttebirlik böldede (second quadrant) kalan kısmının ağırlık merkezini bulunuz.

   Çözüm:

$$A = \frac{\pi}{4}5^2 = \frac{25}{4}\pi \tag{130}$$

$$\overline{x} = \frac{4}{25\pi}\int_{-5}^{0} x\sqrt{25 - x^2}\,dx = -\frac{20}{3\pi} \tag{131}$$

$$\overline{y} = \frac{4}{25\pi}\int_{-5}^{0} y\sqrt{25 - y^2}\,dx = -\frac{20}{3\pi} \tag{132}$$

$$\tag{133}$$

   olur.

2. $x^2 + y^2 = a^2$ ile sınırlı birim diskin birinci dörtte birlik bölgede (first quadrant) kalan kısmının kütle merkezini bulunuz.

   Çözüm:

   Yoğunluğun her yerde aynı ve olduğunu varsayalım $\delta = 1$ olur.

$$\begin{aligned} dm &= \delta dA \\ &= \sqrt{a^2 - y^2}\,dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^a y\,dm \\ &= \int_0^a y\sqrt{a^2 - y^2}\,dy \\ &= \frac{-1}{2}\int_0^a (-2y)\sqrt{a^2 - y^2}\,dy \\ &= \frac{-2}{3(2)}\left(\sqrt{a^2 - y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}} \\ &= \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{M_y}{A} \qquad \text{simetri nedeniyle} \\ &= \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

3. $y = h^2 - x^2$ parabolü ile $Ox-$ekseni arasında kalan bölgenin kütle merkzini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} M_x &= \int\int_R dA \\ &= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2-x^2} y\,dy \\ &= \int_{-h}^{+h}\frac{1}{2}(h^2-x^2)^2\,dx \\ &= \frac{8}{15}h^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int\int_R dA \\ &= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2-x^2} y\,dydx \\ &= \int_{-h}^{+h}(h^2-x^2)\,dx \\ &= h^2x-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-h}^{h} \\ &= \frac{4}{3}h^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{2h^2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int\int_R xdA \\ &= \int_{-h}^{+h}\int_0^{h^2-x^2} x\,dydx \\ &= \int_{-h}^{+h}x(h^2-x^2)\,dx \\ &== \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{M_y}{A} \\ &= \frac{0}{A} \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Birim kareden birim disk çıkarılıyor. Geri kalan üçgen benzeri düzlemsel bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

Birim kareyi koordinat eksenind $x = 1, y = 1$ doğruları ile koordinat eksenlerinin sınırladığı düzlemsel bölgedir. Birim disk $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ve içidir. Şekilden birim kareden birim disk atılınca kalan bölge görülüyor.

Problemi daha genel tutmak içim 1 yerine a alalım.

$$\begin{aligned} M_x &= \int\int_R y dA \\ &= \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a y\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \left(a^2 - (a^2 - x^2)\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a x^2\,dx \\ &= \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a dy\,dx \\ &= a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 \\ &= \frac{a^2(4-\pi)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{a^3}{6}\frac{4}{a^2(4-\pi)} \\ &= \frac{2a}{12-3\pi} \end{aligned}$$

Simetri nedeniyle,

$$\overline{x} = \frac{2a}{12-3\pi}$$

olur.

5. $y = sinx, 0 \le x \le \pi$ ile $Ox-$ ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} M_x &= \int\int_R y dx \\ &= \int_0^\pi \int_0^{sinx} (ydy)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi sin^2 x\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi (1 - cos2x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{8}sin2\pi \\ &= \frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int\int_R y dA \\
&= |\int_0^{\pi}\int_0^{sinx} dy dx| \\
&= |\int_0^{\pi} sinx dx| \\
&= |cosx|_0^{\pi}| \\
&= |-1-1| \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{M_x}{A} \\
&= \frac{1}{8}\pi \\
\overline{x} &= \frac{M_y}{A} \qquad \text{simetri nedeniyle} \\
&= \frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

Alıştırmalar

Aşağıda verilen eğrilerle sınırlanmış düzlemsel bölgelerin kütle merkezlerini bulunuz.

1. $y^2 = 4x, x^2 = 4y;$ $(\frac{9}{5}, \frac{9}{5})$
2. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0;$ $(\frac{1}{e-1}, \frac{e+1}{4})$
3. $x = a(\theta - sin\theta), y = a(1 - cos\theta);$ $(\pi a, \frac{5a}{6})$
4. $x = asin\theta, y = acos\theta;$ $(\frac{4a}{3i}, \frac{4a}{3i})$

Yay'ın Kütle merkezi

Düzlemsel bölgenin kütle merkezine benzer olarak bir yay'ın kütle merkezi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
M_y &= s\overline{x} = \int xds \\
M_x &= s\overline{y} = \int yds
\end{aligned}$$

Örnek:
$y = \sqrt{a^2 - x^2}, a > x, x > 0$ yayının kütle merkezini bulunuz.
Çözüm:

$$M_x = \overline{y}s = \overline{y}\int ds = \overline{y}a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\overline{y}asin^{-1}\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\overline{y}a\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{2a}{\pi} \\
\overline{x} &= 0 \qquad \text{simetri}
\end{aligned}$$

Alıştırmalar

Aşağıdaki yayların kütle merkezlerini bulunuz:

1. $x = 3t^2, y = 6t, 0 \leq t \leq 2$
2. $x = e^{-t}cost, y = e^{-t}sint, 0 \leq t \leq 2\pi$
3. $x = e^y, 0 \leq y \leq 1$
4. $x = asin^3 t, y = acos^3 t$
5. $y = coshx, -1 \leq x \leq 1$

Yoğunluk

Bir cismin P noktasını içeren küçük bir elementini ΔV ile ve ΔV nin kütlsini Δm ile gösterlim. Eğer

$$\delta = \lim_{\Delta V to 0} \frac{\Delta m}{\delta V} \tag{134}$$

limiti varsa, buna cismin P noktasındaki yoğunluğu denilir. Bu tanımdan anlaşıldığı gibi, bir cismin yoğunluğu sabit olmayabilip her noktada farklı bir yoğunluğa sahip olabilir. Tabii, bazı cisimlerde yoğunluk her noktada aynı olabilir. (134) limitini

$$\delta = \frac{dm}{dV} \qquad \text{dersek,} \quad dm = \delta dV \tag{135}$$

biçiminde de yazabiliriz. Şimdi bir cismin kütlesi Δm olan çok küçük ΔV parçacıklarına ayrıldığını varsayalım. Her parçacığın içerdiği P noktasındaki yoğunluğun δ olduğunu kabul edersek,

$$\Delta m \approx \delta \Delta V \tag{136}$$

yazabiliriz. Şimdi bütün cismin bir noktaya yoğunlaştını ve bu noktanın koordinantlarının

$$\tilde{x}\Delta m, \qquad \tilde{y}\Delta m, \qquad \tilde{z}\Delta m \tag{137}$$

koşulunu sağladığını varsayalım. $\Delta V \to 0$ iken, () ifadelerinden, koordinat düzlemlerine göre cismin momentlerini yazabiliriz:

$$M_{yz} = \int \tilde{x} dm, \quad M_{zx} = \int \tilde{y} dm, \qquad M_{xy} = \int \tilde{z} dm \tag{138}$$

Buradan , kütle merkezinin koordinatlarını yazabiliriz:

$$\overline{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm}, \quad \overline{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm}, \quad \overline{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm} \tag{139}$$

Örnek 0.50. *r yarıçaplı bir çember, çember düzleminde ve çember merkezine $b, (b > r)$ uzaklıkta sabit duran bir eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin (simit, torus, daughnut) yüzey alanını ve hacmini bulunuz.*

Çözüm:

Çemberin ağırlık merkezi kendi merkezidir. Çemberin merkezi eksen etrafında bir dönüş yapınca $2\pi b$ kadar yol alır. Çemberin alanı πr^2 dir. Pappus teoremine göre hacim

$$V = (2\pi b)(\pi r^2) = 2\pi^2 b r^2$$

olur, yüzey alanı ise

$$S = (2\pi b)(2\pi r) = 4\pi^2 b r$$

olur.

Üç Katlı İntegraller

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV$$

Figure 47: Üç katlı integral

Üç katlı ya da n-katlı integral tanımı iki katlı integralin genellemesidir. Bu bölümde üç katlı integralleri iele alacağız. İki katlı intgralde integral bölgesi olarak düzlemdel bir D blgesini alıyorduk. Üç katlı integralde, integral bölgesi düzlemsel olmak yerine üç boyutlu uzayda bir T hacmi olacaktır. $w = f(x, yz)$ fonksiyonunun tanım bölgesi

$$T = \{(x,y,z)| \quad w = f(x,y,z),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f,\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

kümesidir. Bazı yerlerde $\le$ yerine $<$ bağıntısı gelebilir. Tabii bu küme bir dikdörtgenler prizmasıdır. Ama bu özel bir durumdur; T her zaman uzayda bilinen bir geometrik şekle benzemeyebilir. T kümesi üç boyutlu uzayda bir yer (hacim) doldurur. Bu hacme *katı cisim* (solid) denilir.

Üç katlı interali tanımlamak için, ilk işimiz T tanım kümesinin bir bölüntüsünı oluşturmak olacaktır. Tek katlı integralde bir doğru parçasının ,iiki katlı integralde bir dikdörtgenin bölüntüsünı oluşturmuştuk. Üç katlı integralde ise bir dikdörtenler prizmasının bölüntüsünı oluşturacağız. Bu iş, önce yaptıklarımızın bezeri oacaktır:

$[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü n tane alt aralıktan oluşan

$$\mathscr{P} = a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$[c,d]$ aralığının bir bölüntüsü m tane alt aralıktan oluşan

$$\mathscr{Q} = c = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d \quad m \in \mathbb{N}^+$$

$[e,f]$ aralığının bir bölüntüsü s tane alt aralıktan oluşan

$$\mathscr{R} = e = z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_{s-1} < z_s = f \quad s \in \mathbb{N}^+$$

olsun. T hacminin aytrışımını

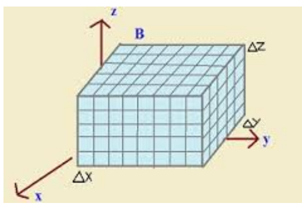


Figure 48: Katı cismin bölüntüsü

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= \mathscr{P} \times \mathscr{Q} \times \mathscr{R} \\ &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_i] \\ &1 \le i \le I,\ 1 \le j \le J,\ 1 \le k \le K, \quad I,J,K \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

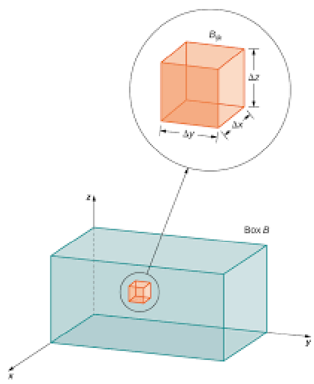


Figure 49: Bir bölüntünün hacmi

biçiminde ifade edebiliriz. İnteral tanımında bölüntü aralıklarının en uzununun uzunluğu sıfıra giderken limit alındığı için, her üç boyuttaki bölüntü aralıklarını kendi aralarında eşit almak bir kısıtlama getirmez. Simgeleri basitleştirmek için, P bölüntüsündeki aralıkların uzuluklarının aynı ve Δx, Q bölüntüsündeki aralıkların uzuluklarının aynı ve Δy, R bölüntüsündeki aralıkların uzuluklarının aynı ve Δz olduğunu varsayalım. Buna göre T prizmasının T_{ijk} küçük prizmalarından oluştuğunu ve onların her birisinin hacminin

$$\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z \tag{140}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Artık integral tanımı için Riemann toplamını oluşturabiliriz:

$$(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in T_{ijk}$$

olmak üzere

$$S_{nms} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \Delta V \tag{141}$$

diyelim.

Tanım 0.51. *T bölgesi üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayında bir bölge ve $f(x, y, z)$ fonksiyonu bu bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.*

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \lim_{n,m,s\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \Delta V \tag{142}$$

diyelim. Sağdaki limit varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun T bölgesi üzerindeki üç katlı integrali denilir ve soldaki simge ile gösterilir.

Anımsanacağı gibi, iki katlı integrali tanımında hesaplamanın zorluğunu aşmak için, katlı integraliintegral tanımından hesaplamak yerine ardışık integrallerle hesaplama yoluna gitmiştik. Benzer düşünceyi üç katlı integrallere de uygulayacağı. Üç katlı integrali art arda uygulanan üç tane tek katlı integralin hesplanmasına indirgeyebiliriz. O durumda, tek katlı integral için bildiğimiz bütün integral alma yöntemlerini uygulayabileceğiz. Bu olgu Kaatlı integrallerin hepsi için geçerlidir ve integral hesabını çok kolaylaştırır.

Yine anımsayacağınız gibi, düzlemsel bir D bölgesi üzerinden iki katlı integrali ardşık integrallere dönüştürüken D bölgesinin $Ox-$ ve $Oy-$ eksenleri üzerine izdüşümlerini alıyor ve izdüşümün uç noktalarını en dıştaki integralinsınırları olark kullanıyorduk. Benzer işi üç boyut için de düşünebiliriz.Ancak, bu kz izdüşümler koordinat eksenlei yerine xy, xz, yz koordinat düzlemleri üzerine yapılacaktır. Bu üçünü ayrı ayrı bir teorem halindeyazalım:

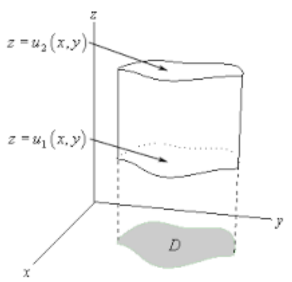


Figure 50: xy düzlemine izdüşüm

Theorem 0.52.

1. xy koordinat düzlemine izdüşüm:

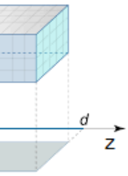
   $f(x, y, z)$ fonksiyonu

   $$T_{xy} = \{(x, y, 0) | \quad (x, y, z) \in T,\ g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$$

   bölgesi üzerinde sürekli ise,

   $$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{T_{xy}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, 0)\, dz \right) dA \tag{143}$$

   eşitliği sağanır.



mine izdüşüm

2. xz koordinat düzlemine izdüşüm:

$f(x,y,z)$ fonksiyonu

$$T_{xz} = \{(x,0,z) | \quad (x,y,z) \in T,\ h_1(x,z) \leq z \leq h_2(x,z)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_{T_{xz}} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,0,z)\, dy \right) dA \tag{144}$$

eşitliği sağanır.

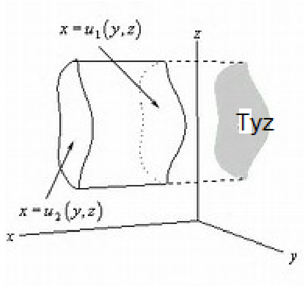


Figure 52: yz düzlemine izdüşüm

3. xz koordinat düzlemine izdüşüm:

$f(x,y,z)$ fonksiyonu

$$T_{yz} = \{(0,y,z) | \quad (y,z) \in T,\ k_1(y,z) \leq z \leq k_2(y,z)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_{T_{xz}} \left(\int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(0,y,z)\, dy \right) dA \tag{145}$$

eşitliği sağanır.

Hacim

T tanım bölgesine $f(x,yz) \equiv 1$ ise, f nin T blgesi üzeinden ç katı interali T katı cisminin hacmine eşitir. Bunu bir teoremolarak ifade edbiliriz:

Theorem 0.53.

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_{T_{xy}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,0)\, dz \right) dA \tag{146}$$

$$= \iint \left(g_2/x,y) - g_1(x,y) \right) dA \tag{147}$$

ifadesi iki yüzey araasında kalan katı cismin hacmini verir.

Örnek 0.54. *T katı cismi $x = 0, y = 0, z = 0, x4y + z = 1$ düzlemlerinin sınırladığı düzgün dörtyüzlüdür.*

$$\iiint_T z dV \tag{148}$$

integralini hesaplayınız.

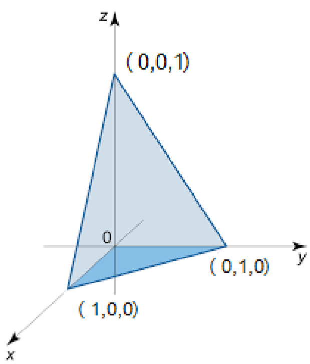
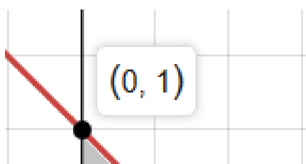


Figure 53: Düzgün dörtyüzlü

Çözüm: T bölgesinin xy düzlemi üzeeine izdüşümü T_{xy} olsun. T bölgesi üstten $z = 1 - x - y$ düzlemi ile ve alttan $z = 0$ düzlemi ile sınırlıdır:

$$T = \{(x,y,z): \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 11 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\} \tag{149}$$



dir. O halde,

$$
\begin{aligned}
\iiint_T z dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{1-x-y} dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{1-x-y} dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2; dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left. -\frac{(1-x-y)^3}{3} \right|_0^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx \\
&= \frac{1}{6} \left(\left. -\frac{(1-x)^4}{4} \right|_0^1 \right. \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

Ödev

Aynı integrali T nin xz ve yz düzlemlei üzerine izdüşümleri için hesaplayınız.

Örnek 0.55. *T katı cismi $z = 8 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2$ paraboloidleri arısında kalan bölgedir.*

$$\iiint_T dV \tag{150}$$

integralini T nin xz düzlemi üzerine izdüşümü (2.Tip) ve xz düzlemi üzerine izdüşümü (3.Tip) üzerinde hesaplayınız.

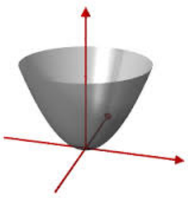


Figure 55: paraboloid

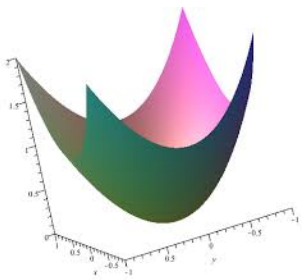


Figure 56: paraboloid

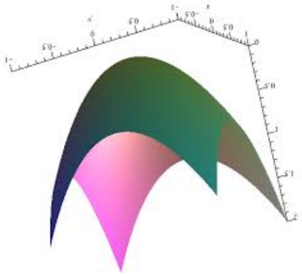


Figure 57: paraboloid

Çözüm: xy-düzlemi üzerindeki izdüşümü $T_{xy} = x^2 + y^2 = 4$ diskidir. Çünkü $z = 8 - x^2 - y^2$ denkleminde $z = 0$ konulursa T_{xy} izdüşümü $x^2 + y^2 = 4$ olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
I = \iiint_T dV &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx \\
&= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(8 - 2(x^2+y^2)\right) dy dx \\
&= 16\pi
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca,

$$I = \int_0^4 \int_{y^2}^4 \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx dz dy + \int_{-2}^{2} \int_4^{8-y^2} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} dx dz dy$$

ya da

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dx dz dy + \int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dx dy dz$$

ve

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dz dx + \int_{-2}^{2} \int_4^{8-x^2} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dy dz dx$$

ya da

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dydxdz + \int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dydxdz$$

olur.

Üç KAtlı İntegrallerde Değişken Değiştirme

Tek ve iki katlı inegrallerde yaptığımız gibi, üç katlı integral alırken de hesaplamayı kolaylaştıracak değişken değiştirimi yapabiliriz. Bunu sağlayan teorem şudur:

Theorem 0.56. *1.*
$\phi = f(x, y, z)$ fonksiyobu üç boyutlu uzaydaki bir S hacmi bölgesinde sürekli, bire bir ve örten τ dönüşümü,

$$\tau : \begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \\ z = k(u, v, w) \end{cases}$$

S bölgesini S^* bölgesine dönüştürsün.

g, h, k fonksiyonları S^* üzerinde sürekli türevlenebilir olsunlar.

τ dönüşümünün jacobian'ı

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{matrix} \right\|$$

olmak üzere $J(u, v, w) \neq 0$ ise

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \iiint_{S^*} f\left(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)\right) |J(u, v, w)| \; dudvdw$$

olur.

Kanıt: İki katlı integrallerde yaptığımıza benzer olarak yapılabilir.

Örnek 0.57. $S = \{(x, y, z)| \quad 1 \leq x \leq 2, \; 0 \leq xy \leq 2, \; 0 \leq z \leq 1\}$ *olmak üzere,*

$$\tau : \begin{cases} u = x \\ v = xy \\ w = 3z \end{cases}$$

dönüşümü altına

$$\iiint_S (x^2 y + 3xyz) \; dxdydz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = x, v = xy, w = 3z \Rightarrow x = u, y = \frac{v}{u}, z = \frac{w}{3}$ yazılablir. Buradan,

$$\iiint_S (x^2y + 3xyz)\, dxdydz$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{S^*} \left(u^2(\frac{v}{u}) + 3u(\frac{v}{u})(\frac{w}{3})\right) |J(u,v,w)|\, dudvdw \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^2 \int_1^2 (v + \frac{vw}{u}\, dudvdw \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^2 (1 + w\ln 2)\frac{v^2}{2}\bigg|_o^2\, dw \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 (1 + w\ln 2)\, dw \\
&= \frac{2}{3}\left((w + \frac{w^2}{2}\ln 2\right) \\
&= \frac{2}{3}(2 + 3\ln 2) \\
&= 2 + \ln 8
\end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırmalar

1. $x = uv, y = vw, z = uv$ dönüşümünün Jacobiyanını bulunuz.
2. $x = e^{u-v}, y = d^{u+v}, z = e^{u+v+w}$ dünüşümünün Jacobiyanını bulunuz.
3. $S : \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 1$ elipsoidinin sınırladığı bölgenin hacmini $x = 2u, y = 3v, z = 5w$ dönüşümünü kaullanarak hesaplayınız.

Silindirsel Koordinatlar

Üç boyutlu uzayda bir (x,y,z) noktasının dikey kartezyen koordinat sisteminden silindirsel koordinatlara dönüşümü,

$$\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

denklemleri ile verilir.

Silindirsel koordinatlar kullanılarak üç katlı integraller kolayca hesaplanabilir.

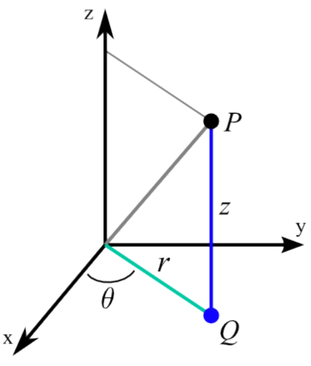


Figure 58: Siindirsel koordinatlar

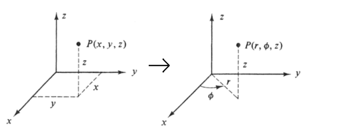


Figure 59: Kartezyenden silindirsele dönüşüm

Örnek 0.58. *$x^2+y^2 = a^2$ denklemini silindirsel koordinatlsra dönüştürünüz.*

Çözüm:

Dikey kartezyen koordinat sisteminde silindirsel koordinat sisatemine dönüşüm formülleri kullanılırsa,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}, z = z$$

çıkar.

Örnek 0.59. *$x^2 + y^2 = a^z$ paraboloidini silindirsel koordinatlara dönüştürünüz.*

Çözüm:

Dikey kartezyen koordinat sisteminde silindirsel koordinat sisatemine dönüşüm formülleri kullanılırsa,

$$V =$$

çıkar.

Silindirsel kootlilardaki üç katlı integrali ardışık integrallere dönüştürmk için şu teoremi kullanırız:

Theorem 0.60. *T cismi üstten $z = v(t,\theta)$ v3 alttan $z = u(r,\theta)$ yüzeyleri le sınırlı olsun.*

1. *T nin $xy-$ düzlemi üzerine D izdşümü kutupsal koordinatlarda verilsin.*

2. *$f(x,\theta,z)$ fonksiyonu S üzerinde sürekli olsun.*

3. $$r = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \left\|\begin{matrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_v & z_\theta & z_z \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

ise,

$$\iiint_S f(r,\theta,z)dV = \iint_D \int_{u(r,\theta}^{v(r,\theta} f(r,\theta,z)r\,dzdrd\theta \qquad (151)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Öncekiler gibi yapılabilir.

Özel olarak,

$$D = \{(r,\theta): \quad \alpha \le \theta\beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$$

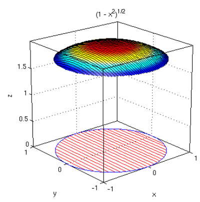


Figure 60: xy düzlemine izdüşüm

ise,

$$\iiint_S f(r,\theta,z)dV = \iint_D \int_{alpha}^{beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u(r,\theta)}^{v(r,\theta)} f(r,\theta,z)r\,dzdrd\theta \qquad (152)$$

olur.

Örnek 0.61. *S bölgesi birinci sekizde birlik (first octant) bölgde $x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 = 4$ silindirleri ile $z = 0, z = 1, x = 0, x = y$ düzlemleri tarafından sınırlı bölge ise,*

$$\iiint_S (x^2 + y^2)dV \qquad (153)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

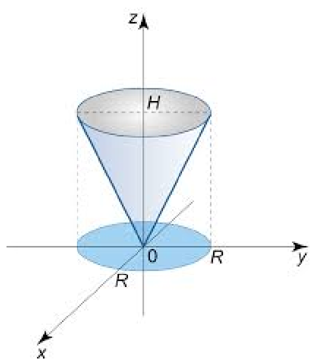


Figure 61: İzdüşüm

$$S = \{(x,y,z): \quad -2 \le 2. -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\iiint_S (x^2+y^2)\,dV \\
&\qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\, r\,dz\,dr\,d\theta \\
&\qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 z\Big|_r^2\,dr\,d\theta \\
&\qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(2-r)\,dr\,d\theta \\
&\qquad = 2\pi\left(\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{5}r^5\Big|_0^2\right. \\
&\qquad = \frac{16}{5}\pi
\end{aligned}$$

Örnek 0.62. *$S=\{(x,y,z):\quad x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$ ise*

$$\iiint_S z e^{-x^2-y^2}\,dV \tag{154}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Silindirik koordinatlar kullanılır ve ardılık integraller uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\iiint_S z e^{-x^2-y^2}\,dV \\
&\qquad = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 z e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta\,dz \\
&\qquad = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)
\end{aligned}$$

çıkar.

Figure 62: xy düzlemine izdüşüm

Örnek 0.63. *S cismi $8-r^2$ ve $z=r^2$ paraboloidleri ile sınırlı bölge ise S cisminin hacmini bulunuz.*

Çözüm: Hacim formülüuygulanırsa,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^{8-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8-r^2-r^2)\,r\,dr\,d\theta \\
&= 16\pi
\end{aligned}$$

bulunur.

Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar

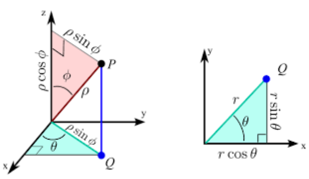


Figure 63: Küresel koordinatlar

Üç boyutlu uzayda bir $P(x,y,z)$ noktasının dikey kartezyen koordinat sisteminden küresel koordinatlardaki (ρ,ϕ,θ) noktasına dönüştüren η dönüşümü,

$$\eta:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\begin{cases} x=\rho\cos\theta\sin\phi \\ y=\rho\sin\theta\sin\phi \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

denklemleri ile verilir. Burada P noktasının başlangıç noktasına uzaklığı ρ, P noktasının $xy-$ düzlemine izdüşümü olan Q noktasının başlangıç noktasına uzaklığı $r = \rho \sin\phi$, OQ nun $Ox-$ ekseniyle pozitif yöne yaptığı açı $\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$, OP nin $Oz-$ ekseni ile pozizitif yönde yaptığı açı ϕ, $(0 \le \phi \le \pi)$ dır.

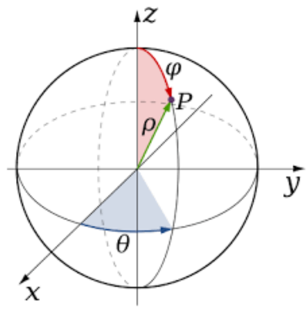


Figure 64: Küresel koordinatlar

Örnek 0.64. *Dikey kartezyen koordinat sistemindeki denklemi*

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

olan küreyi küresel koordinat sisteminde gösteriniz.

Çözüm: Yukrıdaki η dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned}
1 &= \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + (\rho\cos\phi - 1)^2 \\
&= \rho^2 \sin^2\phi \left(\cos^2\theta + \sin^2\phi\right) \rho^2 \cos^2\phi 2\rho\cos\phi + 1 \\
&\Rightarrow = \rho^2 \left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) \\
&\Rightarrow 2\rho\cos\phi \\
&\Rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\phi \\
&\Rightarrow \rho = 2\cos\phi
\end{aligned}$$

çıkar.

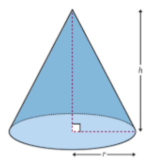


Figure 65: Dik dairesl koni1

Örnek 0.65. *Dikey kartezyen koordinat sistemindeki denklemi*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olan koniyi küresel koordinat sisteminde gösteriniz.

Çözüm: Yukrıdaki η dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned}
\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi} \qquad & (\rho \ge 0, \sin\phi \ge 0) \\
& \rho\cos\phi = \rho\sin\phi \\
& \cos\phi \sin\phi \\
\phi = \frac{\pi}{4} \qquad & (0 \le \phi \le \pi)
\end{aligned}$$

çıkar.

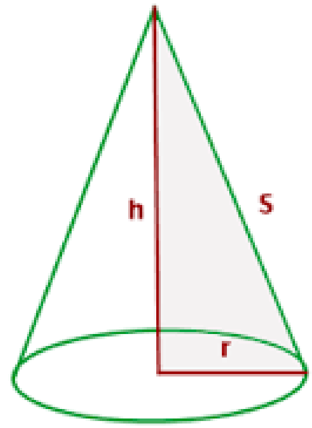


Figure 66: Dik dairesel koninin boyutları

Dikey kartezyen koordinat sistemindeki üç katlı integrali küresel koordinat siteminde üç katlı integrale dönüştürmek için aşağıdaki teoremi kullanırız:

Theorem 0.66. *:*

1. *Küresel koordinatlarda gösteilen S sınırlı cismi üzerinde $\xi = f(\rho, \phi, \theta)$ fonksiyonu sürekli,*
2. *η dönüşümü geçerli,*
3. *η dönüşümünün Jacobiyanı,*

$$\begin{aligned}
\rho^2 \sin\phi &= \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} \right| = \left\| \begin{matrix} x_\rho & x_\phi & x_\theta \\ y_\rho & y_\phi & y_\theta \\ z_\rho & z_\phi & z_\theta \end{matrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{matrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & -\rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{matrix} \right\|
\end{aligned}$$

ise

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \iiint_{S^*} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta \qquad (155)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 0.67. *Üstten $\rho \leq 1$ küresi ve alttan $\phi = \frac{1}{3}$ konisi ile sınırlı S bölgesinin hacmini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_S \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2 \sin\phi d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3}\sin\phi d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\cos\phi\Big|_0^{\pi/3} d\theta \\
&= \frac{1}{6}2\pi \\
&= \frac{\pi}{3} \quad birim^3
\end{aligned}$$

Örnek 0.68. $S = \{(x,y,z): \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ *ise,*

$$\iiint_S e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dV \qquad (156)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

S cismi küre olduğundan küresel koordinatları kullanamak kolaylık sağlar. Üç katlı interali ardışık integrallere dönüştürüsek,

$$\begin{aligned}
&\iiint_S e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dV \\
&= \int_0^{pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{(\rho^2)^3}\rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2 \sin\phi d\theta d\phi \\
&= \left(-\cos\phi\Big|_0^{\pi}.2\pi\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\Big|_0^1\right.\right. \\
&= \frac{4}{3}\pi(e-1)
\end{aligned}$$

Örnek 0.69.

$$\int_0^{2\imath}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} 3r \, dz dr d\theta \qquad (157)$$

integralini

1. *Dikey katezyen koordinat istemine dönüştüünüz.*

2. *Küresel koordinat sistemine dönüştürünüz.*

3. *Silindirsel koordinat sistemine dönüştürerek hesaplayınız.*

Çözüm:

1.
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{(x^2+y^2)}^{(4-x^2-y^2)} 3dzdxdy$$

2.
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 3\rho^2 \sin\phi d\phi d\theta$$

3.
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} 3rdzdrd\theta &= 3\int_0 +2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(r(4-r^2)^{1/2} - r^2\right) drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (8-4\sqrt{2})d\theta \\ &= (8-4\sqrt{2}2\pi\end{aligned}$$

Alıştırmalar

Aşağıdaki interallerin integral bölgelerini çiziniz ve interali hesaplayınız.

1. (a)
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{9-r^2} rdzdrd\theta$$

   (b)
$$\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

2. S bölgesi $z = 0$ düzleminin üstünde, $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ konisinin altında ve yandan $x^2 + y^2 = 1$ sindiri ile sınırlı ise
$$\iiint_S x^2 dV$$
integralini bulunuz.

3.
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)dzdydx$$
integralini silindirsel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

4.
$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy\,dV$$
integralini silindirsel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

5.
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdxdy$$
integralini hesaplayınız.

6.
$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dzdxdy$$
integralini hesaplayınız.

7. Birinci bölgede $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresi ile sınırlı S bölgesi üzerinde
$$\iiint_S e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$$
integralini hesaplayınız.

Bibliography

Index