Bölüm 9

Seriler

Tanım 9.1 *$\{a_n\}$ sonsuz bir dizi olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{9.1}$$

toplamına sonsuz seri denilir.

Eşitliğin sağında sonsuz çoklukta terimin toplamı vardır. Oysa bizim toplama (+) işlemi ikili (binary) bir operatördür. Bu demektir ki, (+) operatörü ancak iki sayıyı toplayabilir. Üç ya da daha çok sayı olunca birleşme opratörü kullanılır: a, b, c herhangi üç sayı ise,

$$a + (b + c) = (a + b) + c = c + (b + a) \tag{9.2}$$

yazarız. En sağdaki eşitlik (+) operatörünün yer değiştirme özeliğinden çıkar. Bileşme ve yer değiştirme özeliklerini kullanarak sonlu çoklukta olan her sayı kümesini toplayabiliriz. Ama (10.5) ifadesinde sonsuz çoklukta terimin toplamı var. Bunu yazabilmek için bir ikili işlem olan toplma işlemini sonsuz terimin toplamına genelleştirmeliyiz. Bu işi yapmak için çok kolay iki adım atacağız:

9.1 Kısmi Toplam

(10.5) serisi verildiğinde, n sonlu bir doğal sayı olmak üzere serinin ilk n-terimin toplamını s_n ile gösterelim.

Tanım 9.2

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{9.3}$$

toplamına (10.5) serisinin n-inci kısmi toplamı denilir.

9.2 Yakınsak Seri

Şimdi n indisini $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ gibi bütün doal sayıları kapsayacak biçimde değiştirelim . O zaman $\{s_n\}$ sonsuz bir dizi olur. Buna *kısmi toplamlar dizisi* denilir. Önceki bölümde diziler için gördüğümüz yakınsama kavramını kısmi toplamlar dizisine de uygulayabişliriz:

Tanım 9.3 *$\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve limiti S ise (10.5) serisine yakınsaktır ve toplamı S dir, denilir.*

(10.3) tanımı (+) operatörünün işlevini sonsuz çoklukta terimin toplamına genelleştiriyor. Bunu

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} = s \tag{9.4}$$

biçiminde yazıyouz.

9.3 Iraksak Seri

Tanım 9.4 *Yakınsak olmayan serilere ıraksaktır, denilir.*

Dizilerde olduğu gibi, serierde de istenilen bir simge indis olarak kullanılabilir. Toplama işlemi 0'dan başlamak yerine herhangi bir doğal sayıdan başlayabilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} a_i, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

İşlemlerde kısalığı sağlamak için gerektiğinde,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

gösterimini kullanırız. Bu gösterimin integrale uygulanış biçimi şöyledir:

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

9.4 Geometrik Seri

Terimleri geometrik bir dizinin terimleri olan serilere geometrik seri denilir. Bunu biraz daha genelleştirerek şöyle diyebiliriz:

Tanım 9.5 *r ve a sabit iki sayı olmak üzere,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = ar^0 + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots \tag{9.5}$$

serisine geometrik seri, denilir.

Teorem 9.1 $|r| < 1$ *ise* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ *dir.*

İspat: Serinin

$$s_n = ar^0 + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

kısmi toplamlar dizisinden rs_n terimini çıkaralım:

$$s_n - rs_n = (ar^0 + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = a - ar^n$$

Buradan, $s_n - rs_n = a - ar^n$ ya da

$$s_n(1-r) = a(1-r^n) \Longleftrightarrow s_n = \frac{a}{1-r}(1-r^n) \qquad (r \neq 1) \tag{9.6}$$

yazılabilir. $|r| < 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ dır. Öyleyse,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

olur ki bu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \qquad (|r| < 1) \qquad \blacksquare$$

olması demektir.

Teorem 9.2

Geometrik seri

1. $|r| < 1$ için yakınsar
2. $|r| \geq 1$ için ıraksar

İspat: () formlünü

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}$$
$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

Geometrik dizinin limitinden en sağdaki limitin $0 < r \leq 1$ için yakınsk olduğunu biliyoruz. Ama 0 ile bölme tanımsız olduğundan öteki terimlerde $r = 1$ olamaz. O hald $-1 < r < 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} \qquad (-1 < r < 1)$$

olduğunu söyleyebiliriz. $|r| > 1$ ise

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} - (-\infty) = \infty \qquad (|r| > 1)$$

olacağı yukarıdaki bağıntıdan görülüyor. $r = 1$ ise

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a1^n = a(1+1+1\cdots+1) = a.(n)$$

dir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

dir.

$r = -1$ ise kısmi toplamlar dizisi,

$$s_n = \begin{cases} a & : \quad n \text{ tek ise} \\ 0 & : \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur. Bu durumda $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisi bir limite gitmiyor; yani ıraksaktır.

Örnek 9.1

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \tag{9.7}$$

serisinin yakınsak olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Seri genel terimi $r^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ olan bir geometrik seridir. r ortak oranı $r = \frac{1}{3} < 1$ olduğu için, Teorem (10.2) uyarıca seri yakınsar. Ayrıca serinin toplamı,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

olur.

9.5 İntegral Testi

a_n terimi yerine $f(n)$ yazıldığında f sürekli, pozitif değerli ve $1 \leq x \leq \infty$ için azalan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{yerine} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

serisi ile düzensiz

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim u \to \infty \int_1 \hat{u} f(x)\,dx$$

integralinin davranışı aynıdır. Yani ya her ikisi de ıraksak ya da her ikisi de yakınsak olur. serisini koyarsak, belirli integral tanımında yaptığımız gibi $[1, n]$ aralığını $1 < 2 < 3 \ldots < n < n+1$ sayıları ile n eşit parçaya bölelim. Her bir küçüğk aralık üzerindeki dış dikdörtgenlerin alanlarının toplamı,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n > \int_1^n (f(x)\,dx$$

ve iç dikdörtgenlerin alanlarının toplamı

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n (f(x)\,dx$$

olacaktır.

9.6 Harmonik Seri

Harmonik dizinin terimlerinin toplamı olan seri harmonik seridir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \tag{9.8}$$

Teorem 9.3 *Harmonik seri ıraksaktır.*

İspat: Serinin 2^k– ıncı kısmi toplamını yazalım:

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{2^k}$$

Sonra terimleri, baştan başlayarak ardışık $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$ tanesini bir grup yapalım:

$$\begin{aligned}
s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) \\
&= \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&+ \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{2^{k-1} \text{ terim}} \\
&= 1 + \frac{k}{2}
\end{aligned}$$

Son çıkan $1 + \frac{k}{2}$ terimi k ile birlikte sonsuza gider:

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\right) = \infty$$

olduğundan harmonik serinin kısmi toplamlar disi ıraksar. O halde harmonik seri de ıraksar.

9.7 Yakınsaklık İçin gerekli Koşul

Teorem 9.4

- Yakınsak serinin genel teriminin limiti 0'dır.

- Genel teriminin limiti 0'a gitmeyen seri ıraksar.

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a3 \cdots + a_n + \cdots \tag{9.9}$$

serisi verilsin. (10.9) serisi için $s_n = a_0 + a_1 + a3 \cdots + a_n$ kısmi toplamlar dizizisinden

$$a_n = s_{n+1} - s_n$$

yazabiliriz.

(10.9) serisi yakınsak ve toplamı s ise,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0 \qquad \blacksquare$$

olur. tersine olark genel terimin limiti 0'yakınsamıyorsa, teoremin ilk ifadesi sağlanmaz; yani seri ıraksak olur.

Uyarı 9.1 *Seri yakısak ise genel teiminin limiti* 0 *olur. Bu gerekli koşuldur, ama yeterli koşul değildir. Başka bir deyişle, genel terimi sıfıra gittiği halde ıraksayan seriler vardır.*

Karşıt örnek olarak, yukarıda incelediğimiz harmonik seriyi gösterebiliriz. Harmonik serinin genel terimi 0'a yakınsar, ama seri ıraksaktır.

Örnek 9.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right) \tag{9.10}$$

serisinin yakınsak olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Genel teriminin limitinin 0'a gidip gitmediğine bakalım.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}$$

Genel terimin limiti 0'a gitmiyor. Öyleyse seri ıraksar.

9.8 Alterne Seri

Tanım 9.6 *Almaşık bir dizinin terimelri toplamı olan*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots \qquad (a_n \geq 0)$$

biçimindeki serilere almaşık (alterne) seri denilir.

Almaşık serinin ardışık terimlerinin işaretleri farklıdır. Almaşık serinin ilk terimi pozitif ya da negatif olabilir.

Teorem 9.5 *Yeterince büyük indisler için*

1. $a_n \geq 0$
2. $\{a_n\}$ *dizisi monoton azalıyor*
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \tag{9.11}$$

serisi yakınsar.

İspat:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \tag{9.12}$$

alterne serisi verilsin. İspat için koşulların gerekli ve yeterli olduğunu göstermeliyiz.

Gerekelilik: Seri yakınsak ise, genel teriminin sıfıra gideceğini biliyoruz. O halde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olacaktır. $\{a_n\}$ genel teriminin azalan bir dizi olduğunu göstermek için

$$s_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

dizisini oluşturalım. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğuna göre, yeterince büyük indisler için $a_n \geq a_{n+1}$ olacağından, yukarıdaki seride parantez içleri yeterince büyük indisler için pozitiftir. O halde çift sayı indisli $\{s_{2k}\}$ serisi artan bir dizidir. Ayrıca bu dizi $s_{2k} < a_0$ eşitsizliğini sağlar. Öte yandan

$$s_{2k} = a_1 - [(a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) + \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}] - a_{2k}$$

yazabiliriz. Burdan

$$(a_{2k-1} < a_1$$

çıkar. O halde $\{s_{2k}\}$ dizisi sınırlıdır. Artan sınırlı diziler yakınsaktır. Dolayısıyla„

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s$$

limiti, vardır. Tek sayı indisli terimler için

$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1}$$

yazarsak

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = s + 0 = s$$

çıkar. Tek sayı ve çift sayı indisli kısmi toplmlar aynı bir s limitine yakınsıyor. O halde (10.12) serisi yakınsaktır.

Yeterliği: $n-$inci kalan R_n termininin sıfıra gittiğini göstermek yetecektir.

$$R_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots)$$

dir. Parantez içindeki toplam, orijinal serinin terimlerinden oluşan alterne bir seridir. Öyleyse pozitif bir limite gider. Öyleyse, R_n in işareti $(-1)^n$ nin işareti ile aynıdır. Ayrıca,

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots$$
$$= a_{n+1} - (a_{n+2} + a_{n+3} - (a_{n+4} + a_{n+5} - \cdots < a_{n+1}$$

olur; çünkü çıkarılan bütün terimler pozitiftir. En sağdaki teimin limiti 0 olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \tag{9.13}$$

olur. Bu ise serinin yakınsadığını gösterir.

9.9 Mutlak Yakınsaklık

Dizileri ve serileri incelerken, genellikle terimleri pozitif aldık. Ama bu her zaman böyle olmayabilir. Alterne seride ardışık terimler farklı işaretlidir. O tür serilerin davranışını önceki kesimde ele aldık. Şimdi alterne olmayan ama bazı terimleri negatif olan serileri düşünelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{9.14}$$

serisi verilsin. Serinin terimlerinin mutlak değerlerinden oluşan

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \tag{9.15}$$

serisi yakınsak ise, (10.14) serisine mtlak yakınsaktır denilir. (10.15) serisine pozitif terimli seriler için geçerli olan bütün teoremler uygulanabilir.

Bazı seriler yakınsak olduğu halde mutlak yakınsak olmayabilir. Bunun tipik örneği alterne harmonik seridir.

Örnek 9.3

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \tag{9.16}$$

serisinin mutlak ıraksak ama kendisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (10.16) serisi alterne serilerin yakınsaklığı için gerekli koşulları sağlar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

dır. Dolayısıyla , (10.16) serisi yakınsaktır. Ama terimlerinin mutlak değerlerinden oluşan seri harmonik seridir. Harmonik serinin ıraksak olduğunu biliyoruz. O halde, (10.16) serisi yakınsaktır ama mutlak yakınsak değildir.

9.10 Koşullu Yakınsama

Bir seri yakınsak olduğu halde mutlak yakınsak değilse, ona koşullu yakınsak seri denilir. Biraz önce incelediğimizalterne harmonik seri koşullu yakınsaktır. Tabii, mutlak yakınsaklık daha güçlü olduğu için şu teoremi doğal bir sonuçtur:

Teorem 9.6 *Mutlak yakınsak seriler koşullu yakınsaktır.*

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

serisi yakınsak ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

serisini düşünelim. Bu serinin trimleri pozitiftir. Ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n|$$

serisi tarafından baskılanır (dominated). Son yazdığımız baskın seri yakınsaktır. Öyleyse, mukayese teoremi gereğince verilen seri yakınsak olur.

9.11 Serinin Yeniden Düzenenmesi

Sonlu çoklukta sayının cebirsel toplmında işlme giren sayıların sırası istenildiği gibi değiştirilbilir. Bu eylem tolma işleminin yer değiştirebilme özeliği ile ilgisisdir. Acab sonsuz çoklukta sayıyı toplarken termlerin yrlerini değiştirebilir miyiz sorusu akla gelir. Bu kitabın kapsamı dışında olan ispatı vermeden ifadw edbiliriz:

Mutlak yakınsak serilerin terimlerinin yerlrini istediğimi gibi değiştirebiliriz. Serinin toplamı değişmez.

Ancak mutlak yakınsak olmayan serilerin terimlerinin yerlerini değiştirerek farklı toplamlar elde edilebileceğini görmek mümkündür. Bunu bir örnekle açıklamak daha kolay olacaktır.

Örnek 9.4

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{({}_1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

alterne harmonik serinin terimlerini yeniden düzenleyerek farklı bir toplama gittiğini gösteriniz.

Serinin terilerini şöyle gruplayalım:

$$
\begin{aligned}
S &= (1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})-\frac{1}{8}+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10})-\frac{1}{12}+\cdots \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
&= \frac{1}{2}ln2
\end{aligned}
$$

Böylece asıl seri kendi yarısına eşit olur.

9.12 Yakınsaklık Testleri

Limit, türev, integral gibi başlıca kavramlarda görüğümüz gibi, bir kavramın tanımını kullanarak problemleri çözmek çoğunlukla uzun bazen çok zor olabilir. Onun yerine tıpkı bir ustanın elindeki aletler gibi alertler yapar ve onları kullanırız. Benzetmek gerekirse, balta ile mobilya yapmak teorik olarak ümkündür, ama pratik değildir. Onun için mobilya ustası balta yerine testere, planya vb. aletlei kullanır. Matematikte de limit, türev, integral işlemlei için kolaylık sağlayan aletler kullanırız. Onlara teorem diyoruz. Teoremler, varsayımları altında daima doğru sonıuç verdiğinden, varsyımın sağlandığı her yerde onları çekincesiz kullanırız.

Serilerin yakınsklığını test ederken de aynı kurala uyacağız. yakınsaklık tanımını sağlamak uzun bazen çok zor olabilir. onun yerine bize pratik kolaylık sağlayan teoremleri kurar ve kullanmaya başlarız. Seril matematiğin çok önemli bir dalıdır. dolayısıyla, çoğu tarihi değeri de olan çok sayıda yakınsaklık toremi üretilmiştir. Bu bölümde onlar arasından bize gerekli olacak bir kaçını ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 9.7 *Pozitif terimli bir serinin yakınsaması için kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olması gerekli ve yeterlidir.*

Teorem 9.8 *(Cauchy Serisi): Terimleri $\mathbb{R}$'den alınan her Cauchy serisi yakınsar.*

Teorem 9.9 *(Karşılaştırma Testi):Yeterince büyük n indisleri için $|a_n| \le |b_n|$ eitsizliği sağlanıyor ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serisi yakınsıyorsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsar.*

Örnek 9.5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{9.17}$$

serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

İspat: $n \geq 4$ olduğunda $n! \leq 2^n$ dir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

gromrtrik serisi yakınsaktır. O halde, (10.9) karşılaştırma tesi uyarınca (10.17) serisi yanınsar.

Teorem 9.10 *(İntegral Testi- [Dirichlet, Abel]): a_n terimi yerine $f(n)$ yazıldığında f sürekli, pozitif değerli ve $1 \leq x \leq \infty$ aralığında azalan bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

serisinin davranışı ile düzensiz

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^u f(x)\,dx$$

integralinin davranışı aynıdır. Yani ya her ikisi de ıraksak ya da her ikisi de yakınsak olur.

$$x_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)\,dx$$

diyelim. f zalan olduğundan,

$$x_n - x_{n-1} = f(n) - \int_{n-1}^n f(x)\,dx \leq 0$$

olur. Öyleyse $\{x_n\}$ dizisi azalan bir dizidir ve

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)\,dx \leq f(k-1)$$

sağlanır. $2 \leq k \leq n$ içn toplam alırsak,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

çıkar. Burdan istenen sonuç çıkar:

$$0 \leq f(n) \leq x_n \leq f(1)$$ ■

Örnek 9.6

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

serisinin davranışını inceleyiniz

Çözüm: a_n yerine $f(n)$ alırsak, f sürekli, azalan pozitif değerli bir fonksiyon oluyor. Dolayısıyla integral testi uygulanabilir:

$$\begin{aligned}
s &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} = \lim u \to \infty \int_2^{u} \frac{1}{x \ln x} \\
&= \lim_{u\to\infty} [ln(lnu) - ln(ln2)] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olduundan seri ıraksar. Burada $n = 1$ için a_n tanımsız olduğu için serinin toplamını $n = 2$ den başlatıyoruz.

Örnek 9.7

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

serisinin davranışını inceleyiniz

Çözüm: a_n yerine $f(n)$ alırsak, f sürekli, azalan pozitif değerli bir fonksiyon oluyor. Dolayısıyla integral testi uygulanabilir:

$$\begin{aligned}
s &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} = \lim_{u\to\infty} \int_2^{u} \frac{1}{x(\ln x)^2} \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{lnx}\bigg|_2^u \\
&= \lim_{u\to\infty} \left(\frac{1}{ln2} - \frac{1}{lnu} \right) \\
&= \frac{1}{ln2}
\end{aligned}$$

olduğundan seri yakınsar.

9.13 p-Serisi

Örnek 9.8

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^p} \tag{9.18}$$

serisinin $p > 1$ ise yakınsak, $p \leq 1$ ise ıraksask olduğunu gösteriniz.

İspat: Bu seri p-serisi diye bilinir. Serinin yakınsaklığı farklı yöntemlerle gösterilebilir. Burada (10.10) integral testini uygulayacağız.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x^p}\, dx$$

Bu integralin değrini $n \to \infty$ iken $p > 1, p = 1, p < 1$ için ayrı ayrı inceleyeceğiz. Sağdaki integralin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun $p > 1$ olduğunu biliyoruz. $p = 1$ olduğunda,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$$

çıkar. $n \to \infty$ iken sağ yan sonsuza gider. O halse $p = 1$ için seri ıraksar. $p < 1$ ise

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}}$$

$p - 1 < 1$ olduğunda $n \to \infty$ iken sağ yan sonsuza gider. O halde p-serisi $p > 1$ iken yakınsak $p \leq 1$ iken ıraksaktır.

9.14 Oran Testi

Teorem 9.11

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad ve \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

serileri verilsin ve

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = L \tag{9.19}$$

olsun. ($L = \infty$ olabilir).

$$L = \begin{cases} < 1 & \textit{ise her iki seri mutlak yakınsar} \\ > 1 & \textit{ise her iki seri ıraksar} \\ = 1 & \textit{ise her iki serinin davranışı aynır.} \end{cases}$$

Son ifade her iki serin eş zamanlı yakınsadığını, ıraksadığını y da koşullu yakınsadığını söyler.

İspat: $n = 1$ alırsak genelllik bozulmaz. Önce $L < 1$ olduğunu varsayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$$

olduğuna göre öyle bir N doğal sayısı bulabiliriz ki $n \geq N$ olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < r \quad \Rightarrow \quad |a_{n+1}| < r|a_n|$$

olur. N den sonraki terimler aynı eşitsili ğağlayacağına göre,

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| < r|a_N| \\
&|a_{N+2}| < r|a_{N+1}| < r^2|a_{N+1}| \\
&|a_{N+3}| < r|a_{N+2}| < r^3|a_{N+3}| \\
&\qquad \vdots |a_{N+k}| < r|a_{N+k-1}| < r^k|a_{N+k-1}|
\end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k |a_{N+k-1}|$$

geometik serisi yakınsar. O halde, mukayese teoremi (Teorem (10.9)) uyarınca,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

serisi de yakınsar.

$L > 1$ olsun. Serinin mutlak ıraksadığını göstereceğiz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$$

olduğuna göre, öyle bir N doğal sayısı vardır ki, $n \geq N$ 0lduğunda,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad |a_{n+1}| > |a_n|$$

olur. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} |a| \neq 0$$

olmalıdır. Genel terimi 0'a gitmediğine göre, Teorem (10.4) uyarınca seri ıraksar.

Son olarak $L = 1$ olduğunu varsayalım.

Örnek 9.9

$$\sum_{n=1} \infty \left(\frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)} \right)$$

serisinin davranışını inceleyiniz.

Çözüm:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} . \frac{4^{2n+1}(n+1)}{(-10)^n}$$

eşitliğinde $n \to \infty$ için limite geçersek,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} | \frac{a-n+1}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} . \frac{4^{2n+1}(n+1)}{(-10)^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-10(n+1)}{4^2(n+2)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| \\
&= \frac{10}{16} && < 1
\end{aligned}$$

çıkar. O halde oran testi uyarınca seri mutlak yakınsar.

Örnek 9.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{5^n} \right)$$

serisinin davranışını inceleyiniz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!5^n}{5^{n+1}n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{5n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)}{5} \right| = \infty > 1$$

olduğundan oran testi uyarınca seri ıraksar.

Örnek 9.11

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9^n}{(-2)^{n+1}n} \right)$$

serisinin davranışını inceleyiniz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{9^{n+1}}{(-2)^{n+2}(n+1)}.\frac{(-2)^{n+1}n}{9^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{9n}{(-2)(n+1)}\right| = \frac{2}{9}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n)}{n+1}\right| = \frac{2}{9} > 1$$

olduğundan oran testi uyarınca seri ıraksar.

Örnek 9.12

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)$$

serisinin davranışını inceleyiniz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}.\frac{n^2+1}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\right| = 1$$

olduğundan oran testi serinin yakınsayıp yakınsamaığı hakkında bir şey söylemez. O nedenle başka testlere başvurmalıyız. İlk akla gelen şey, serinin bir almaşık (alterne) seri oluşuudur. Genel terimi 0'a giden azalan alterne seri yakınsaktır:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^2+1}\right| = 0$$

ve

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} = a_{n+1}$$

olur. Böylece serinin yakınsaklığı ortaya çıkar. Aslında serinin alterne olduğu görülünce, birinci kısımda yapılanları yapmaya gerek kalmaz.

Örnek 9.13

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{3n+7}\right)$$

serisinin davranışını inceleyiniz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+3}{3n+7}\right| = \frac{1}{3} \neq 0$$

0lduğundan seri ıraksar.

Uyarı 9.2 *n indisine göre genel terimi rasyonel olan serilerin genel teriminin limiti aranırken, rasyonel fonksiyonlardan bildiğimiz bir kuralı uygulayabiliriz: Pay ve paydanın en yüksek dereceli terimlerinin katsayıları oranı aranan limittir. Bu limit sıfırdan farklı ise seri ıraksar.*

9.15 Kök Testi

Bazı durumlarda başka tst işlemediğinde kök testi denilen aşağıdaki kural kullanışlı bir alet olur:

Teorem 9.12

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L, \qquad (0 \leq L \leq \infty) \tag{9.20}$$

olsun.

$$L = \begin{cases} 0 \leq L < 1 & \text{ise seri yakınsar} \\ 1 \leq L \leq \infty & \text{ise seri ıraksar} \end{cases}$$

İspat: $0 \leq L \leq 1$ olduğunda her nn indisi için

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$$

olacak biçimde bir r sayısı vardır. O hlde,

$$n \geq N \Rightarrow |a_n| < r^n$$

olacak biçimde dğal bir N sayısı vrdır. Buradan,

$$\begin{aligned} R_n &= |a_n| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots < r^n + r^{N+1} + r^{N+2} + \cdots \\ &= r^N(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots) \\ &= r^N(\frac{1}{1-r} \end{aligned}$$

Mukayese teoremi gereğince seri yakınsar.

Şimdi $1 \leq L\infty$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $1 < r \leq L$ olacak biçimde bir r sayısı seçelim.

$$n \geq N \Rightarrow |a_n| > r^n > 1$$

olacak biçinde doğal N sayısı bulabiliriz. Bu durumda serinin genel terimi sıfıra gitmez; seri ıraksar.

Örnek 9.14

$$\sum_{n=1}^{infty} \frac{2^n}{n^4}$$

serisinin davranışını incelyiniz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^4} = 2 > 1 \qquad \blacksquare$$

9.16 Rasyonel Sayıların Gösterimi

Bilindiği gibi bir sayıyı ya da fonksiyonu farklı biçemlerde adlandırabilir ya da gösterebiliriz. Örneğin, aynı 5 sayısının Türkçe adı *"beş"*, İngilizce adı *"five"*, Fransıca adı "senq", Farsça adı *"penç"*,... dır. Ama bunların hiç biris 5 sayısı değildir. Bir insanın adı ile kendisinin farklı oluşu gibidir. Sayıların gösterimi de öyledir. Beş sayısını 10 tabanın ya da başka bir tabana göre yazabiliriz. $5 = 5/1 = 10/2 = 15/3\dots$ yazabiliriz. Bunların hiç birisi 5 sayısı değildir. 5 sayısının farklı gösterimleridir. $0.3333333\dots = 1/3 = 2/6 = 3/9 = \dots$ sayılarından hiçbirisi $\frac{1}{3}$ sayısı değildir, onun farklı gösterimleridir. Rasyonel sayıların $\frac{p}{q}$ kesri olarak temsili ile onlu açılımı farklı gösterimlerdir. Hatta rasyonel sayıların $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$ gibi farklı gösterimleri vardır. Yapılacak işleme göre ya da okurun kolay algılmasını sağlamak için sayının gösterimini istediğimiz biçemde seçebiliriz.

Birinci bölümde rasyonel sayılaraın 10 tabanına göre gösterimlerinin belli bir basamaktan sonra devirli olacağını söylemiştik. Geometrik serinin toplamını biliyorsak, on tabanına göre devirli açılımların neden $\frac{p}{q}$ kesri biçiminde yazılabildiklerini gösterebiliriz.

Teorem 9.13 *On tabanına gire devirli açılımlar $\frac{p}{q}$ biçiminde yazılabilir.*

İspat:

Grup olma özeliğinden yararlanarak her gerçel sayıdan tam kısmını çıkarırsak onu $[0,1]$ aralığına gönderebiliriz. Dolayısıyla rasyonel sayıyı $[0,1]$ aralığında almak genelliği bozmayacaktır.

$[0,1]$ aralığındaki her gerçel sayının açılımı

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_i (10)^{-n} \tag{9.21}$$

serisi ile temsil edilebilir. Bu temsilde rasyonel sayıların açılımı ya sonlu ya da devirli olurlar. Pratikte bu uzun toplamı yazmak yerine

$$0.a_1a_2\dots a_m\overline{b_1b_2\dots b_{n-1}b_n} \tag{9.22}$$

yazarız. Bilindiğ gibi bu gösterimde çizgi altındaki basamaklar sonsuz kez art arda tekrar ediyor kabul edilir. Bu gösterim

$$\begin{aligned} t &= 0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{(10)^2}+\frac{a_3}{(10)^3}+\cdots\frac{a_m}{(10)^m} \\ &+\frac{1}{(10)^m}\frac{1}{(10)^m}\left(\frac{b_1}{(10)^1}+\frac{b_2}{(10)^2}+\frac{b_3}{(10)^3}+\cdots+\frac{b_n}{(10)^n}\right)+\cdots \end{aligned}$$

gibi yazılırsa, ikinci satırda parantez içindeki terimler (9.22) denkleminde çizgi altındaki basamaklara karşılık gelir. Bu basamaklar art arda sonsuz kez tekrarlanır. Göterimi basitleştirmek için ilk satırı S ile ikinci satırı T ile gösterelim:

$$\begin{aligned} t &= 0+S+\frac{1}{(10)^m}\frac{1}{(10)^m}\left(\frac{b_1}{(10)^1}+\frac{b_2}{(10)^2}+\frac{b_3}{(10)^3}+\cdots+\frac{b_n}{(10)^n}\right)+\cdots \\ &= \frac{T}{(10)^m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(10)^n}\right)^k \\ &= \frac{1}{(10)^m}\frac{T}{(10)^{m+n}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(10)}\right)^k \\ &= \frac{S}{(10)^m}\frac{T}{(10)^{m+n}}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\ &= \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} t &= 0.a_1a_2\dots a_m\overline{b_1b_2\dots b_{n-1}b_n} \\ &= \frac{S\big((10)^{m+n+1}\big)+9T(10)^{m+n}}{(10)^{m+n+1}} \end{aligned} \tag{9.23}$$

çıkar. m ve n sonlu olduğu için son ifadede ki pay ve payda pozitif birer tam sayı olduğundan ispat biter.

Örnek 9.15 $4.54\overline{325}$ *devirli ondalık sayısını kesirli sayı olarak yazınız.*

Çözüm: Öncelikle sayını tam kısımını atalım. Sonra (9.23) formülünü uygulayabilmek için sayının m devretmeyen ve n devreden basamaklarının sayısını bulalım. $m = 2$, $n = 3$ dür. (9.23) formülününden,

$$\begin{aligned} t &= 0.54\overline{325} \\ &= \frac{54(10^3-1)+325}{10^2(10^3-1)} \\ &= \frac{54(999)+325}{100(999)} \\ &= \frac{54271}{99900} \end{aligned}$$

çıkar. Bu sayıya attığımız 4 tam sayısını eklersek, verilen devirli sayının $4\frac{54271}{99900}$ olduğunu görebiliriz.

Bazen devri sayıyı kesirli sayıya çevirmek için şöyle bir yol izleyebiliriz:

Örnek 9.16 $t = 0.\overline{7} = 0.777\ldots$ *devirli ondalık sayısını kesirli sayı olarak yazınız.*

Çözüm:

$$\begin{aligned} t &= 0.\overline{7} \\ 10t &= 7.\overline{7} \end{aligned}$$

Her iki taraftan t sayısını çıkarırsak,

$$\begin{aligned} 9t &= 7 \\ t &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 9.17 $t = 0.5\overline{4} = 0.5444\ldots$ *devirli ondalık sayısını kesirli sayı olarak yazınız.*

Çözüm:

$$\begin{aligned} t &= 0.5\overline{4} = 0.5444\ldots \\ 10t &= 5.\overline{4} = 5.444\ldots \\ 100t &= 54.\overline{4} = 54.444\ldots \\ 100t - 10t = 90t &= 49 \\ t &= \frac{49}{90} \end{aligned}$$

■

9.17 Cauchy Serisi

Tanım 9.7 *her $\epsilon > 0$ sayısı için $n, m > N \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon$ koşulunu sağlayanb bir $N > 0$ sayısı varsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine Cauchy serisi denilir.*

Bizim ele aldığımız R uzayında Cauchy serileri yakınsaktır.

9.18 Kuvvet Serilerinin Yakınsklığı

İşlemleri kolaylaştırmak için c merkzini 0 başlangıç noktasına kaydırmakla genellikten bir şey kaybetmeyiz. O nedenle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

serisi yerine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.24}$$

serisini el alacağız. Buna ileride *Taylor serisi* diyeceğiz

Teorem 9.14

1. (9.24) serisi bir $x = r, \quad (r \neq 0)$ değeri için yakınsıyora bütün $|x| < |r|$ için yakınsar.
2. (9.24) serisi bir $x = s$ değeri için ıraksıyorsa bütün $|x| > |s|$ için ıraksar

   İspat: Önce $x = r$ için serinin ıraksadığını varsayalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

serisi yakınsaksa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

serisi de yakınsar. Yakınsak serilerin genel terimleri sınırlı olduğundan her n indisi için

$$|a_n r^n| \leq M$$

eşitsizliğini sağlayan bir M sayısı varıdır. Buradan,

$$|a_n x^n| = |a_n r^n|.\left|\frac{x}{r}\right| \le M\left|\frac{x}{r}\right|$$

yazılabilir. Bu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{r}\right| = M\left(1+\left|\frac{x}{r}\right|+\left|\frac{x}{r}\right|^2+\cdots\right)$$

olması demektir. Eğer $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ ya da denk olarak $|x| < |r|$ ise parantez içindeki geometrik seri yakınsar. Öyleyse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

serisi yakınsaktır. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

serisi $|x| < |r|$ için mutlak yakınsar.

Şimdi $x = s$ için serinin ıraksadığını varsayalım. O durumda her $|x| > |s|$ için seri ıraksayacaktır. Gerçkten bir $|x_0| > |s|$ için yakınsıyor olsaydı, teoremin ilk kısmı gereğince $\sum a_n s^n$ serisi de yakonsak olurdu. Bu çelişki olamayacağına göre seri $|x| > |s|$ için ıraksar.

9.19 Yakınsaklık Aralığı

Teorem 9.14 uyarınca (9.24) Taylor serisinin yakınsak olduğu yerler 0 noktasını içeren bir aralıktır. Bu aralığa (9.24) serisinin yakınsaklık aralığı denilir. Yakınsaklık aralığını I ile gösterlim. $I = [0,0]$ ise (9.24 serisi hiç bir $x \neq 0$ noktasında yakınsamaz. Bu tür seriler her yerde ıraksayan kuvvet serileridir. $I = (-a, a), \quad (0 < a < \infty)$ ise serinin yakınsaklık aralığı sonludur. $I = (-\infty, \infty)$ ise seri bütün $\mathbb{R}$ için yakınsar. Bu söylediklerimizden şu sonuçlar çıkar:

1. (9.24) serisinin I yakınsaklık aralığı orta noktası 0 olan bir aralıktır.

2. Yakınsaklık aralığının uzuluğu 0'dan ∞'e kadar değişen uzunlukta olabilir.

3. Yakınsaklık teoremi yakınsaklık aralığının uç noktaları için bir şey söylemez. Uç noktalarda serinin davranışı, bu değerler yerlerine yazılarak elde edilen sabit terimli seriye bilinen testlerden uygun olan birisi uygulanarak belirlenebilir.

Örnek 9.18

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Yakınsaklık aralığının uç noktalarıda serinin davranışını belirleyiniz.

Çözüm: Oran testini uygularsak,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} . \frac{n+1}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} |x| = |x|$$

çıkar Ohalde $|x| < 1$ ise seri mutlak yakınsar. $|x| > 1$ ise seri ıraksar. Serinin yakınsaklık aralığı $I = (-1, 1)$ dir.

Şimdi yakınsaklık aralığının uç noktalarında serinin davranışını inceleyelim. Sol uç noktada $x = -1$ dir Bu değeri verilen seride kullanırsak

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots$$

alterne harmonik serisi elde edilir. Bu serinin koşullu yakınsak olduğunu biliyoruz.

Sağ uç nokta $x = 1$ noktasıdır. Bu değeri verilen seride kullanırsak,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots$$

harmonik serisi elde edilir. Harmonik serinin ırak olduğunu biliyoruz.

Örnek 9.19

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Yakınsaklık aralığının uç noktalarıda serinin davranışını belirleyiniz.

Çözüm: Oran testini uygularsak,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{n+2} . \frac{n+1}{x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} |x|^2 = |x|^2$$

O halde $|x|^2 > \Leftrightarrow x < 1$ için seri mutlak yakınsar. Yakınsaklık aralığı $I = (-1, 1)$ dir. Bu aralığın sol ve sağ uçlarındaki $x = \pm 1$ değerleri verilen seride kullnılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

alterne serisi elde edilir. Alterne seri koşullu yakınsaktır.

Örnek 9.20

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(ln2)^n}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Yakınsaklık aralığının uç noktalarıda serinin davranışını belirleyiniz.

Çözüm: Oran testi sonuç vermez. O nedenle kök testini uygulayalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2 x^{2n}}{(lnn)^n}\right|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{(lnn)} |x|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

çıkar. O halde verilen seri her x için yakınsar. yakınsaklık aralığı $(-\infty, \infty)$ olur.

9.20 Çözümlü Kuvvet Serisi Problemleri

Örnek 9.21

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Yakınsaklık aralığının uç noktalarındaki davranışını inceleyiniz.

Çözüm:

Bu serinin $x = -3$ noktasında yakınsak olduğunu biliyoruz. Yakınsaklık yarıçapını belirlemek için oran testini kullanalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{4^{n+1}} (x+3)^{n+1}}{\frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x+3)^{n+1}}{4^{n+1}} . \frac{4^n}{(-1)^n n (x+3)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-(n+1)((x+3)}{4n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n} |x+3| \\ &= \frac{1}{4} |x+3| \end{aligned}$$

çıkar. Oran tesstinden biliyoruz ki $L < 1$ ise seri yakınsar, $L > 1$ ise seri ıraksar. $L = 1$ için oran testi bir karara varmaz. O nedenle, $\frac{1}{4}|x+3| < 1$ olduğunda kuvvet serisinin yakınsak, $\frac{1}{4}|x+3| > 1$ olduğunda kuvvet serisinin ıraksak olduğuna karar verebiliriz. Buradan $|x+3| < 4$ olduğunda serinin yakınsak, $|x+3| > 4$ olduğunda serinin ıraksak olduğu sonucu çıkar. Yakınsaklık aralığı, merkezi -3 olan $(-7,1)$ aralığıdır. Yakınsaklık yarıçapı $r = 4$'dür.

Şimdi $L = 1$ halini yani yakınsaklık aralığının uç noktalarında serinin davranışını inceleyelim. yakınsaklık aralığının sol ucunda $x = -7$ dir. Bunu verilen kuvvet serisinde kullanırsak,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(-4)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n n}{4^n}(4)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(-1)^n n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$= \infty \neq 0$$

çıkar ki bu serinin yakınsaklık aralığının sol ucunda ıraksadığını söyler.

Şimdi serinin yakınsaklık aralığının sağ ucundaki davranışına bakalım: Sağ çta $x = 1$ dir. Buradan seri için,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n = \infty$$

çıkar.

Ohalde verilen seri yakınsaklık aralığının her iki ucunda da ıraksar. Dolayısyla seri $-7 < x < 1$ için yakınsaktır.

Örnek 9.22

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Yakınsaklık aralığının uç noktalarındaki davranışını inceleyiniz.

Çözüm: Oran testini uygularsak,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}(4x-8)^{n+1}}{\frac{2^n}{n}(4x-8)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(4x-8)^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{2^n(4x-8)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n(4x-8)}{n+1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}|4x-8| \\
&= 2|4x-8|
\end{aligned}$$

çıkar. O halde,

1. $2|4x-8| < 1$ ise seri yakınsar

2. $2|4x-8| > 1$ i se seri ıraksar

3. $2|4x-8| = 1$ ise bu test sonuç vermez.

$$2|4x-8| < 1 -> 8|x-2| < 1 -> |x-2| < \frac{1}{8} -> \frac{15}{8} < x < \frac{17}{8}$$

ise seri yak?nsak

$$2|4x-8| > 1 -> 8|x-2| > 1 -> |x-2| > \frac{1}{8} -> \frac{15}{8} > x, \text{ ya da } x > \frac{17}{8}$$

ise seri yakınsaklık aralığının uç noktalarında serinin davranışını inceleyelim: Sol uçta, $x = \frac{15}{8}$ dir.

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(4\frac{15}{8}-8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

çıkar. Bu seri alterne harmonik seridir; yakınsar.

Şimdi yakınsaklık aralığının sağ ucunu inceleyelim. Seride $x = \frac{17}{8}$ koyarsak,

$$
\begin{aligned}
s_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(4\frac{17}{8} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n 2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

çıkar. Bu seri harmonik seridir; ıraksar.

Örnek 9.23

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x+1)^n$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Yakınsaklık aralığının uç noktalarındaki davranışını inceleyiniz.

Çözüm: Oran testini uygularsak,

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!(2x+1)^{n+1}}{n!(2x+1)^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)n!(2x+1)}{n!} \right| \\
&= |2x+1| \lim_{n\to\infty} (n+1) \\
&= \infty \quad (x \neq -frac12)
\end{aligned}
$$

çıkar. Burada ilginç bir duruml karşı karşıyayız. Seri $x = -frac12$ noktasında yakınsar. Yakınsaklık aralığı yalnızca $frac12$ noktasından ibarettir. Yakınsaklık yarıçapı ise $r = 0$'dır.

Örnek 9.24

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Yakınsaklık aralığının uç noktalarındaki davranışını inceleyiniz.

Çözüm: Kök testini uygularsak,

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-6)^n}{n^n} \right|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-6)}{n} \right| \\
&= |x-6| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

çıkar. Yakınsaklık yarıçapı $r = \infty$ ve yakıklık aralığı $(-\infty, \infty)$ olur.

Örnek 9.25

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(-2)^n}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Yakınsaklık aralığının uç noktalarındaki davranışını inceleyiniz.

Çözüm: Kök testini uygularsak,

$$
L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n}}{(-3)^n} \right|^{\frac{1}{n}} L \qquad = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{(-3)} \right|
$$

$$
= \frac{x^2}{3}
$$

çıkar. Öyleyse, $\frac{x^2}{3} < 1 \Rightarrow x^2 < 3 \Rightarrow |x| < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} < x\sqrt{3}$ için seri yakınsar. yakınsaklık aralığı $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$dir. yakınsaklık yarıçapı $r = \sqrt{3}$'dir.

Aralığın sol ucunda,

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{(-3)^n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((-\sqrt{3})^2 \right)^3 n}{(-3)^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3)^n}{(-1)^n (3)^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n
\end{aligned}
$$

olduğundan aralığın sol ucundaki bu seri ıraksar.

Aralığın sağ ucundaki $x = \sqrt{3}$ değeri seride kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
s_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\sqrt{3})^{2n}}{(-3)^n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n
\end{aligned}
$$

olduğundan aralığın sağ ucundaki bu seri de ıraksar.

9.21 e Sayısı

Formüller:

$$e^x.e^y = e^{x+y} \quad \Leftrightarrow \quad exp(x).exp(y) = exp(x+y) \tag{9.25}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{expx}{expy} = exp(x-y) \tag{9.26}$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad \Leftrightarrow \quad (exp(x))^y = exp(xy) \tag{9.27}$$

$$ln(e^x) = x \quad \Leftrightarrow \quad ln(exp(x)) = x \tag{9.28}$$

$$e^{ln(x)} = x \quad \Leftrightarrow \quad exp(ln(x)) = x \tag{9.29}$$

$$e^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad exp(0) = 1 \tag{9.30}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad \Leftrightarrow \quad exp(-a) = \frac{1}{exp(a)} \tag{9.31}$$