Chapter 1

Diferensiyel denklemler

1.1 Birinci basamaktan birinci dereceden Diferensiyel denklemler

Türev içeren denklemlere *diferensiyel denklem* denilir. Denklem hiç türev içermiyorsa, o bir diferensiyel denklem değildir. Tek değişkenli fonksiyonlarda türev söz konusu değişkene göredir; ama çok değişkenli fonksiyonlarda türevin hangi değişkene göre alındığı önem taşır. Ayrıca türevin kaçıncı basamaktan olduğunun bilinmesi gerekir. Dolayısıyla Diferensiyel Denlemler Kuramı değişken sayısına, denklemin içerdiği türevlerin basamağına ve denklemin yapısına göre çok çeşitlilik gösterir.
Bu kitapta tek değişkenli fonksiyonların birinci basamaktan türevlerini içeren denklemleri ele alacağız. Bazı kaynaklarda bu tür diferensiyel denklemlere "adi diferensiyel denkemler" denilir. Bu kitap "Tek Değişkenli Diferensiyel Denklem" deyimini kulanacaktır.
Bazı kaynaklarda $y = f(x)$ fonksiyonun yalnız x değişkenine bağlı olduğunu ve türevin bu değişkene göre alındığını göstermek için $y' = \frac{dy}{dx}$ yerine $\dot{y}$ simgesi kullanılır. Ona göre,

Tanım 1.1. $F(t, y, \dot{y}) = 0$ *biçemindeki denklemlere birinci basamaktan diferensiyel denklem denilir.*

Burada $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ türevini temsil eder. Bu kitapta $\dot{y}$ yerine y' simgesini kullanmayı tercih edeceğiz. Tek değişkenli fonksiyonlarla ilgileneceğimiz için, türevlerin hangi değişkene göre alındığı sorunuyla hiç karşılaşmayacağız. $f(x, y) = 0$ gibi kapalı fonksiyonlar için, gerektiğinde $\frac{\partial f}{\partial y}$ ve $\frac{\partial f}{\partial x}$ kısmi türev simgelerini kullanacağız.
Birinci basamaktan diferensiyel denklem $F(t, f(t), f'(t)) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $f(t)$ fonksiyonudur.

Tanım 1.2. *Diferensiyel denklemin bir çözümü değişkenin ait olduğu bölgedeki her t için $F(t, f(t), f'(t)) = 0$ eşitliğini sağlayan $y = f(t)$ fonksiyonudur.*

Örnek:
$y = \sin 2x$ fonksiyonu $y''+4y = 0$ diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. Çünkü; $y''+4y = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$ olur.
Örnek:
$y = 3e^x$ fonksiyonu $y'4y = 0$ denkleminin bir çözümü değildir. Çünkü; $y' + y = 3e^x + 3e^x = 6e^x \neq 0$ olur. O hlde $y = 3e^x$ fonksiyonu $y'4y = 0$ diferensiyel denkleminin bir çözümü değildir.
Yukaıdaki ifadede F üç değişkenli bir fonksiyondur. Değişkenleri sırasıyla $t, y = f$ ve $y' = f'$ dür. Birinci basamak denmesinin nedeni denklemin yalnızca birinci basamaktan türev içermesidir.

1.2 Özel ve Genel Çözüm

Birinci basamaktan bir diferensiyel denklem bilinmeyen y fonksiyonunun y' türevini içerir. y' nün yokedilmesi için en az bir kez integral almak gerekir. Her integral keyfi bir sabit getirdiğinden, birinci basamaktan bir diferensiyel denklemin genel çözümü bir tane keyfi C sabiti (arbitrary) içerir.

Burada "keyfi" denmesinin nedeni, bu kitaptaki kısıtlamaya göre, C nin her gerçel değeri alabilmesidir. Böylece genel çözüm C nin alabileceği değerlere göre bir vektör uzayı olur. Geometrik olarak düşünmek için denklemin genel çözümüne $\mathscr{G}$ diyelim. Tek değişkenli bir diferensiyel denklemin özel çözümü genel çözüme ait olan bir $y = f(x)$ fonksiyonudur.Bu fonksiyonun grafiği düzlemde $graf(y) = \{(x.f(x))|f \in \mathscr{G}\}$ olur. $\mathscr{G}$ genel çözümüne ait bütün özel çözümlerin grafiği bütün düzlemi doldurur. Bu grafiklere *integral eğrileri* denilir. Düzlemde boş yer kalmaz. Ama genel çözüme ait iki özel çözümün grafikleri de kesişmez. O nedenle, düzlemde herhangi bir (x, y) noktasından geçen özel çözüm bulunabilir. Bu şekilde, düzlemin belirli bir noktasından geçen özel çözümün bulunmasına *başlangıç koşunu* sağlayan çözümün ya da *sınır değeri* koşulunu sağlayan çözümün bulunması denilir. Geometrik olarak, bizim uğraş alanımıza giren denklemler için *sınır değeri problemi*, denklemin genel çözüm uzayı içinden grafiği verilen (x_0, y_0) noktasından geçen integral eğrisinin bulunması problemidir. Bu tür problemlerin çözümü için, önce diferensiyel denklemim genel çözümü bulunur, sonra genel çözümdeki C sabiti belirlenir. C nin belirlenmesi demek (x_0, y_0) noktasından geçen integral eğrisinin $\mathscr{G}$ uzayından seçilmesi demektir.

1.3 Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler

Diferensiyel Denklemler bilimin hemen her alanında önemli bir araçtır. Doğa olaylarını açıklamakta kullanılan başlıca alettir. Konusu çok geniştir. O nedenle, üniversitelerde farklı dersler olarak okutulur. Diferensiyel denklemleri çözmek için genel geçerliği olan bir yöntem yoktur. Onun için, denklemler sınıflara ayrılır ve her denklem sınıfına özgü çözüm yöntemleri geliştirilir. Bu kitapta bu geniş konunun ancak çok çok özel bir sınıfına kısaca değineceğiz. Kısıtlamalardan birisi değişken sayısı olacaktır. Çok değişken içeren kısmi türevli diferensiyel denlemlere hiç girmeyeceğiz. Tek değişkenli fonksiyonları ve türevlerini içeren diferensiyel denklemleri de türevlerin basamak sayısı ile kısıtlayacağız. Onunla da yetinmeyip, tek değişkenli fonksiyonların birinci basamaktan türevlerini içeren doğrusal diferensiyel denklemlerle ilgili çok temel bilgileri vereceğiz. Okurun, burada verilen bilgilerin çok dar bir alana sıkıştığını bilmesi gerekir.
Genel olarak, $n, \quad (n > 1)$ değişkenli $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonun
$y', y'', y^{'''}, y^4, \ldots, y^{n-1}, y^{^n}$
gibi türevlerini içeren

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \ldots + a_n(x)y^{^n} = b(x) \tag{1.1}$$

biçimindeki denklemlere yüksek basamaktan doğrusal diferensiyel denklem denilir. Tek değişkenli diferensiyel denklemelere bazı kaynaklarda *adi diferensiyel denklemler* denilir. Bu kitapta *tek değişkenli diferensiyel denklem* demeyi tercih ediyoruz. Doğrusal (linear) denmesinin nedeni y ve
$y, y', y", y^{'''}, y^4, \ldots, y^{n-1}, y^{^n}$
fonksiyonlarının kuvvetlerinin 1 oluşudur. Bu kitapta $n = 1$ ve doğrusal olma halini ele alacağız.

Tanım 1.3. *(1.1) ifadesinde denklemin basamağı en yüksek basamaklı türevin basamağıdır.*

Tanım 1.4. *Bir diferensiyel denklemin bilinmeyen fonksiyonunun en yüksek basamaktan türevin polinom şeklinde yazılılındai derecesine denklemin derecesi denilir.*

(1.1) denkleminde, $a_n(x) \neq 0$ ise, diferensiyel denkleme *n-inci basamaktan tek değişkenli doğrusal diferensiyel denklem* denilir.
Örnekler:
$(x^2 - 1)y^{'''} - y'' + ysinx = 0$ üçüncü basamaktan doğrusal diferensiyel denklemdir.
$y' + (x^2 + 1)y^3 = 0$ birinci basamaktan doğrusal olmayan (nonlinear) diferensiyel denklemdir.
$x^3y'' + x(y')^3 = 5$ ikinci basamaktan birinci dereceden bir diferensiyel denklemdir.
$(y')^2 - ye^x = 0$ birinci basamaktan ikinci dereceden bir diferensiyel denklemdir.

$\sin y' = xy'$ 1. basamaktandır, ama derecesi yoktur.
$(y''')^3 - 5x(y')^4 0E^x + 1$ birinci basamaktan üçüncü dereceden bir diferensiyel denklemdir.
x bağımlı, y bağımsız değişken olmak üzere $f = f(x, y)$ fonksiyonunun kısmi türevlerinin var ve sürekli olduğunu varsayalım.

$$f(x, y) = C, \quad \text{(C keyfi sabit)} \tag{1.2}$$

denleminde kısmi türevleri zincir kuralına göre alırsak;

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.3}$$

olur. $\frac{\partial f}{\partial x} = P = P(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q = Q(x, y)$ dersek (1.3) denklemi

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.4}$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemin

$$Pdx + Qdy = 0 \tag{1.5}$$

denklemine eşit olduğu apaçıktır. Burada (1.2) fonksiyonunun (1.5) denklemini sağladığı apaçıktır. O nedenle (1.2) fonksiyonuna (1.5) diferensiyel denkleminin *genel çözümü* denilir. Genel çözüm denmesinin nedeni, denklemin bütün özel çözümlerini içeriyor olmasıdır. Bunu açıklamak kolaydır: C keyfi bir sabit olduğundan (1.2) bir vektör uzayıdır. Bu uzaydaki her fonksiyon (1.5) denkleminin bir özel çözümüdür. Bu demektir ki, (1.2) uzayındaki her fonksiyon, C nin belirli bir değerine karşılık gelen bir özel çözümüdür. Özel çözümlerde C sabiti yerine özel değerler alınır. Örneğin $C = k$ alındığında çözüm uzayından belirli bir tanesi seçmiş oluruz. Genel hali *başlangıç değer problemi* diye adlandırılan bu konunun derinliğine girmeden şunu söyleyeceğiz. $y = f(x_0) = k$ değerini alan çözüme (x_0, k) noktasından geçen *özel çözüm* denilir. Genel çözüme ait fonksiyonlar (çözüm uzayı) bütün düzlemi doldurur; ancak düzlemin her noktasından geçen bir ve yalnızca bir tane özel çözüm fonksiyonu vardır. Bu çözüm grafiği (x_0, k) noktasını içeren biricik çözümdür. Bu çözümü bulma eylemine *başlangıç değer problemi* denilir. Özel olarak tek değişkenli diferensiyel denklemler için, çözüm uzayına *integral eğrileri*, bu kümeye ait her fonksiona bir *integral eğrisi* denilir. Seçilen (x_0, k) noktası da sınır değeridir.

1.4 Denklemin Doğrusala Dönüşmesi

Bu kitapta birinci basaktan birinci dereceden diferensiyel denklemler ele alınmaktadır. Denklemin içerdiği y ve y' fonksiyonlarının kuvvetleri 1 olduğu için, bu tür denklemlere **doğrusal** dendiğini söylemiştik. Ne var ki uygulamada basamağı 1 olduğu halde bazen derecesi 1'den büyük olan diferensiyel denklemlerle karşılaşırız. Bu tür denklemlerden bazılarını uygun bir değişken değiştirmeyle doğrusal denklem tipine indirgeyebilir ve bilinen çözüm yöntemlerini uygulayabiliriz. Yüksek dereceli olan *Bernoulli*, *Riccati*, *Clairaut* ve *Lagrange* tiplerini indirgemeyi ve çözüm yöntemlerini ele alacağız.

1.5 Tam Diferensiyel

Şimdi yukarıda söylediklermizin tersini düşünelim. $M(x, y)$ ile $N(x, y)$ sürekli kısmi türevlere sahip iki fonksiyon olmak üzere, bir D bölgesinde

$$df = Mdx + Ndy \tag{1.6}$$

eşitliği sağlanıyorsa

$$M\,dx + N\,dy \tag{1.7}$$

ifadesine bir *tam diferensiyel* denilir. Bu durumda $y = f(x, y)$ fonksiyonu (1.6) diferensiyel denklemini sağlayan bir çözüm olur. $f = f(x, y)$ fonksiyonu verilmişken, sözkonusu türevler varsa (1.6) diferensiyel eşitliğini daima kurabiliriz. Ama bizim asıl sorumuz, onun tersi olan problemdir:

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1.8}$$

diferensiyel denklemi verilmişken, acaba (1.6) eşitliğini sağlayan bir $y = f(x, y)$ fonksiyonu var mıdır? Varsa nasıl bulunur?
Bu problemin çözümü zor değildir. Öncelikle, (1.7) ifadesinin bir fonksiyonun tam diferensiyeli olup olmadığını araştırmalıyız. D bölgesinde f fonksiyonun ikinci kısmi türevleri var ve sürekli ise,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{1.9}$$

olduğunu biliyoruz. Bu koşulu (1.7) ifadesindeki M ve N fonksiyonlarına uygularsak;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.10}$$

koşulu çıkar. Demekk ki, (1.7) ifadesinin bir $f = f(x, y)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli olması için (1.10) eşitliği gereklidir.
Örnekler:

1.

$$f(x, y) = x^2 + y + 6x - y^3 \tag{1.11}$$

fonksiyonunun tam diferensiyelini bulunuz.

Çözüm:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = (2x+6)\,dx + (6+3y^2)\,dy$$

2.

$$[cos(x)sin(x) - xy^2]\,dx + y(1-x^2)\,dy = 0 \tag{1.12}$$

ifadesinin bir tam diferensiyel olup olmadığını gösteriniz. Tam diferensiyel ise verilen diferensiyel denklemin çözümünü bulunuz.

$$M(x, y) = cos(x)sin x - xy^2$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy$$

$$N(x, y) = y(1-x^2)$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen ifade bir tam diferensiyeldir. Şimdi $df = M\,dx + N\,dy$ eşitliğini sağlayan $f = f(x,y)$ fonksiyonunu bulacağız.

$$\begin{aligned} f_y = N \Longrightarrow f(x,y) &= \int N\,dy + h(x) \\ f(x,y) &= \int y(1-x^2)\,dy + h(x) \\ &= \frac{1}{2}(y^2 - x^2y^2) + h(x) \end{aligned}$$

Uyarı: İntegral sabiti, integral değişkeni olan y değişkenin bağlı değildir, ama x değişkenine bağlı olabilir.

Şimdi $h(x)$ integral sabitinin değerini bulmalıyız. Bunu bulmak için $f_x = M$ eşitliğini kullanmak yetecektir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}(y^2 - x^2y^2) + h(x) \\ f_x &= M \qquad \Longrightarrow h'(x) = cosx.sinx \\ h(x) &= \int cosx.sinx \\ &= \frac{1}{2}sin^2 x \end{aligned}$$

bulunur. Bu değeri $f(x,y) = C$ (C sabit) eşitliğinde kullanırsak

$$f(x,y) = C \Longrightarrow \frac{1}{2}(y^2 - x^2y^2 + sin^2 x) = C$$

aradığımız fonksiyonun kapalı (implicit) biçemidir.

3.

$$2xy\,dx + (x^2 + 3y^2)\,dy = 0 \qquad (1.13)$$

ifadesinin bir tam diferensiyel olup olmadığını gösteriniz. Tam diferensiyel ise verilen diferensiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} M(x,y) &= 2xy \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(x,y) &= x^2 + 3y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan verilen ifade bir tam diferensiyeldir. Şimdi $df = M\,dx + N\,dy$ eşitliğini sağlayan $f = f(x, y)$ fonksiyonunu bulacağız.

$$\begin{aligned} f_x = M \Longrightarrow f(x,y) &= \int M\,dx + h(y) \\ f(x,y) &= \int 2xy\,dx + h(y) \\ &= x^2 y + h(y) \end{aligned}$$

Uyarı: İntegral sabiti, integral değişkeni olan x değişkenin bağlı değildir, ama y değişkenine bağlı olabilir.

Şimdi $h(y$ integral sabitinin değerini bulmalıyız. Bunu bulmak için $f_y = N$ eşitliğini kullanmak yetecektir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 y + h(y) \\ f_y = N &\Longrightarrow x^2 + h'(y) = x^2 + 3y^2 \\ h(y) &= \int 3y^2\,dy \\ &= y^3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değeri $f(x, y) = C$ (C sabit) eşitlşğinde kullanırsak

$$x^2 y + y^3 = C$$

aradığımız fonksiyonun kapalı (implicit) biçemidir.

4.

$$(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0 \tag{1.14}$$

ifadesinin bir tam diferensiyel olup olmadığını gösteriniz. Tam diferensiyel ise verilen diferensiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$M_y = 4x = N_x$ olduğundan ifade bir tam diferensiyeldir. Şimdi bunu tam diferensiyel kabul eden $f=f(x,y)$ fonksiyonunu bulalım.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx \\ &= \int (3x^2+4xy)\,dx + h(y) \\ &= x^3+2x^2y+h(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= N(x,y) \\ 2x^2+h'(y) &= 2x^2+2y \\ h'(y) &= 2y \\ h(y) &= \int 2y\,dy \\ h(y) &= y^2+C \qquad \text{(C sabit)} \end{aligned}$$

O halde aradığımız fonksiyon
$x^3+2x^2y+y^2=C$ dir.

5.

$$3x^2\,dx+3y^2\,dy=0 \tag{1.15}$$

ifadesinin bir tam diferensiyel olup olmadığını gösteriniz. Tam diferensiyel ise verilen diferensiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$M_y=0=N_x$ olduğundan ifade bir tam diferensiyeldir. Şimdi $df=M\,dx+N\,dy$ eşitliğini sağlayan $f=f(x,y)$ fonksiyonunu bulacağız.

$$f_x=M \Longrightarrow f(x,y)=\int M\,dx+h(y)$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 3x^2\,dx+h(y) \\ &= x^3+h(y) \end{aligned}$$

(1.15) tam diferensiyel olduğu için $M(x,y)$ nin integrali $f=f(x,y)$ fonksiyonuna eşit olur. Tabii, x değişkenine bağlı olamayan bir $h(y)$ integral sabiti olacaktır: $f_x=M$ eşitliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M\,dx+h(y) \\ &= x^3+h(y) \end{aligned}$$

f fonksiyonunun y değişkenine göre türevi $N(x,y)$ olduğundan;

$$\begin{aligned} h'(y) &= 3y^2 \\ h(y) &= \int 3y^2\,dy \\ h(y) &= y^3+C \end{aligned}$$

bulunur. Bu değeri $f(x,y)=C$ (C sabit) eşitliğinde kullanırsak

$$x^3+y^3=C$$

aradığımız fonksiyonun kapalı (implicit) biçemidir.

6.

$$(e^x siny-2ysinx)\,dx+(e^x cosy+2cosx)\,dy=0 \tag{1.16}$$

ifadesinin bir tam diferensiyel olup olmadığını gösteriniz. Tam diferensiyel ise verilen diferensiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}M_y &= e^x cosy-2sinx\\ N_x &= e^x cosy-2sinx\end{aligned}$$

$M_y=e^x\cos y-2\sin x=N_x$ olduğundan (1.16) ifadesi bir tam diferensiyeldir. Bu ifadenin kimin tam diferensiyeli olduğunu bulmak için $f_y=N$ eşitliğini kullanabiliriz:

$$\begin{aligned}f_y &= N\\ f &= \int N\,dy+h(x)\\ &= \int (e^x cosy+2cosx)\,dy+h(x)\\ N &= e^x siny+2y\cos x+h(x)\end{aligned}$$

Burada $h(x)$ integral sabitinin değerini bulmak için $f_x=M$ eşitliğini kullanabiliriz:

$$\begin{aligned}f(x,y) &= e^x siny+2y\cos x+h(x)\\ f_x &= e^x\sin y-2y\sin x+h'(x)\\ M &= e^x\sin y-2y\sin x\\ h'(x) &= 0\end{aligned}$$

M_y ve N_x türevlerini hesaplarsak:

$$\begin{aligned}M_y &= e^x\cos y-2\sin x\\ N_x &= e^x\cos y-\sin x\end{aligned}$$

olur. Buradan $M_y=N_x$ çıkar. O halde verilen diferensiyel denklem tamdır. $h'(x)=0 \Longrightarrow h(x)=C$ değerini kullanırsak $f(x,y)=C$ eşitliğinden

$f(x,y)=e^x siny+2ycosx=C$

genel çözümü bulunur.

7.

$$(cos^2 x - ycosx)\,dx - (1 + sinx)\,dy = 0 \tag{1.17}$$

ifadesinin bir tam diferensiyel olup olmadığını gösteriniz. Tam diferensiyel ise verilen diferensiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$M_y = -cosx$$
$$N_x = -cosx$$

$M_y = -\cos x = N_x$ olduğundan olduğundan (1.16) ifadesi bir tam diferensiyeldir. Bu ifadenin kimin tam diferensiyeli olduğunu bulmak için $f_y = N$ eşitliğini kullanabiliriz:

$$\begin{aligned} f_y &= N \\ f &= \int N\,dy + h(x) \\ &= -\int (1 + sinx)\,dy + h(x) \\ &= -y - ysinx + h(x) \end{aligned}$$

Burada $h(x)$ integral sabitinin değerini bulmak için $f_x = M$ eşitliğini kullanabiliriz:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -y - ysinx + h(x) \\ f_x &= M \\ -ycosx + h'(x) &= cos^2 x - ycosx \\ h'(x) &= cos^2 x \\ h(x) &= \int cos^2 x\,dx + C \\ &= \int \frac{1 + cos2x}{2}\,dx + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x + C \end{aligned}$$

Bu değerleri $f(x, y) = C$ eşitliğinde kullanırsak;

$f(x, y) = C \Longrightarrow -2y(1 + sinx) + x + sinxcosx = C$ genel çözümü bulunur.

1.6 Alıştırmalar

Aşağıdakilerin tam diferensiyel olup olmadıklarını denetleyiniz. Tam diferensiyel olanları için $f = f(x, y)$ fonkiyonunu ya da kapalı biçemini ve varsa istenen integral eğrisini bulunuz.

1.

$$(ycosx + 2xe^y)\,dx + (sinx + x^2 e^y + 1)\,dy = 0 \qquad \text{Yanıt: } ysin(x)x^2 e^y - y = C$$

2.

$$(e^{x+y}-2x)\,dx+(e^{x+y}+2y)\,dy=0,\, y(0)=0 \qquad \text{Yanıt: } 1=e^{x+y}-x^2+y^2$$

3.

$$2xy\,dx+(x^2+3y^2)\,dy=0 \qquad \text{Yanıt: } x^2y+y^3=C$$

4.

$$(1+2x\sqrt{x^2-y^2}\,dx-2y\sqrt{x^2-y^2}\,dy=0 \qquad \text{Yanıt: } x+\frac{2}{3}(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}+C=0$$

5.

$$2xy-9x^2+(2y+x^2+1)y'=0$$
Çözüm: $y^2+(x^2+1)y-3x^2=C$

6.

$$2xy^2+4-2(3-x^2y)y'=0, \qquad y(-1)=8$$
Çözüm: $x^2y^2-6y+4x=C, C=12, x^2y^2-6y+4x-12=0$

7.

$$\frac{2ty}{t32^41}-2t-\left(2-ln(t^2+1)\right)y'=0, \qquad y(5)=0$$
Çözüm: $y\left(ln(t^2+1)\right)-t^2-2y=C, C=-25, y\left(ln(t^2+1)-2\right)-t^2+25=0$

8.

$$(y^2-2x)dx+(2xy+1)dy=0,$$
Çözüm: $xy^2-x^2+y=C$

9.

$$x(1-siny)dy = (cosx - cosy) - y)dx = 0$$
$$\text{Çözüm: } xy + xcosy - sinx = C$$

10.

$$(3x^2y-1)dx + (x^2+6y-y32)dy = 0, \qquad y(0) = 3$$
$$\text{Çözüm: } x^3y - x + 3y^2 - \frac{1}{3}y^3 = C, C = 18, x^3y - x + 3y32 - \frac{1}{3}y^3 - 18 = 0$$

11. $\left(2xlny + e^y\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} + xe^y + y^2\right)dy = 0$

    Çözüm: $x^2lny + xe^y + \frac{y^3}{3} = C$

12. $\left(6xy - y^3\right)dx + \left(4y + 3x^2 - 3xy^2\right)dy = 0$

    Çöüm: $3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C$

1.7 Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler

Tam diferensiyel denklemlerden sonra çözümü en kolay olan denkelm türü değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklemlerdir. Bu denlemlerde x ve y değişkenlerine bağlı ifadeler birbirlerinden ayrılabilir. Böylece ayrılmış ifadelerin integralleri alınarak genel çözüme elde edilebilir. Birinci basamaktan

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.18}$$

214 diferensiyel denklemin de $f(x,y)$ fonksiyonu

$$g(x).h(y) = \frac{g(x)}{f(y)} \tag{1.19}$$

biçiminde yazılabiliyorsa, (1.18) diferensiyel denklemine *değişkenlerine ayrılabilir* denir. Tabii burada $h(y) = \frac{1}{f(y)}$ dir. Dolayısıyla denklem $f(y)dy = g(x)dx$ biçiminde yazılarak integral alınırsa

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C \Longrightarrow F(y) = G(x) + C \tag{1.20}$$

genel çözümü elde edilir.
Aşağdaki örnekler, bu eylemin nasıl yapıldığını göstermektedir.

1.

$$(1+y^2)\,dx - 2y\sqrt{1-x^2}\,dy \tag{1.21}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Veilen denklemi $\sqrt{1-x^2}(1+y^2)$ ile bölerek değişkenlerine ayırabiliriz:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2y\,dy}{1+y^2}$$

İki yana integral formülleri uygulanırsa genel çözüm,

$$Arcsinx - ln|1+y^2| + C = 0$$

olur.

2.

$$xy^2\,dx - (x+5)\,dy = 0 \tag{1.22}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Veilen denklemi $y^2(x+5)$ ile bölerek değişkenlerine ayırabiliriz:

$$\frac{x\,dx}{x+5} = \frac{dy}{y^2}$$

İki yana integral formülleri uygulanırsa genel çözüm,

$$\int \frac{x\,dx}{x+5} = \int \frac{dy}{y^2} + C$$

olur.

$$x - 5ln|x+5| + \frac{1}{y} = C$$

ya da

$$y = \frac{1}{C - x + ln|x+5|^5}$$

olur.

3.

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x, \qquad y(1) = \frac{1}{25} \tag{1.23}$$

diferensiyel denklemini çözünüz ve çözümün geçerli olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm:

Aşağıdaki ilk satırdan görüldüğü gibi, denklem değişkenlerine ayrılabilir türdendir.

$$\begin{aligned} y^{-2}\,dy &= 6x\,dx \\ \int y^{-2}\,dy &= \int 6x\,dx \\ -\frac{1}{y} &= 3x^2 + C \end{aligned}$$

Son satır denklemin kapalı genel çözümüdür. Şimdi $y(1) = \frac{1}{25}$ koşulunu sağlayan özel çözümü bulmak için, C sabitini belirlemeliyiz:

$\frac{1}{\frac{1}{25}} = 3(1)^2 = C \Longrightarrow C = -28$

çıkar. O halde aranan özel çözüm

$y = f(x) = \frac{1}{28-3x^2}$

olur. Son olarak bu çözümün hangi aralıkta geçerli olduğunu belirleyelim. Önceki derslerimizden bildiğimiz gibi iki koşulun sağlanması gerekiyor.

(a) Aralıkta fonksiyon sürekli olmalıdır. Dolayısyla aralık keintisiz olmalı, delik noktalar içermemelidir.

(b) Aralık başlangıç değeri olan $x = 1$ noktasını içermelidir.

Aralığın delik komşuluk içermemesi için, çözümün paydasının sıfıra eşit olduğu $x = \pm\sqrt{\frac{28}{3}}$ noktalarını içermemlidir. Öyleyse çözümüm geçerli olduğu aralık:

$$-\sqrt{\frac{28}{3}} < x < \sqrt{\frac{28}{3}}$$

aralığıdır.

4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x-4}{2y-4}, \qquad y(1) = 3 \tag{1.24}$$

Çözüm:

Aşağıdaki ilk satırdan denklemin değişkenlerine ayrılabilir olduğu görülür. Son satır genel çözümü vermektedir:

$$\begin{aligned} (2y-4)\,dy &= (3x^2+4x-4)\,dx \\ \int (2y-4)\,dy &= \int (3x^2+4x-4)\,dx \\ y^2 - 4y &= x^3 + 2x^2 - 4x + C \end{aligned}$$

Şimdi $y(1) = 3$ olan özel çözzüme karşılık gelen C sabitini belirleyelim. Genel çözümde $x = 1,\ y = 3$ koyarsak

$$3^2 - 4(3) = 1^3 + 2(1^2) - 4(1) + C \Longrightarrow C = -2$$

olur. Bu değri genel çözümde kullanırsak aranan özel çözüm elde edilir:

$$y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$$

$$y^2 - 4y - (x^3 + 2x^2 - 4x - 2) = 0$$

Çözümün geçerli olduğu aralığı bulmak için, genel çözümden y fonksiyonunu çekersek;

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{4 \pm 2\sqrt{4 + (x^3 + 2x^2 - 4x - 2)}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{4 + (x^3 + 2x^2 - 4x - 2)} \end{aligned}$$

Tek çözüm istediğimize göre, bu sonuçlardan + işaretli olan kolu seçebiliriz:

$$3 = y(1) = 2 \pm \sqrt{1 + 2 - 4 + 2} = 2 \pm 1 = 3, 1$$

olur. Bu durumda,

$$x^3 + 2x - 4x + 2 \geq 0$$

çıkar. Bu denklemi Matlab ya da Mathematica gibi bir araçla çözerseniz $x \geq -336523$ çıkar. demek ki çözümün geçerli olduğu aralık $[-336523, \infty)$ dir.

5.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}, \qquad r(1) = 2 \tag{1.25}$$

Çözüm: Aşağıdaki ilk denklem denklemin değişkenlerine ayrılabilir olduğunu, son denklem ise genel çözümü veriyor.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{\theta}\, d\theta \\ \int \frac{1}{r^2} &= \int \frac{1}{\theta}\, d\theta \\ -\frac{1}{r} &= ln(|\theta|) + C \end{aligned}$$

Şimdi $r(1) = 2$ olan özel çözümü veren C sabitini belirlemeliyiz: $\theta = 1, r = 2$ değerlerini genel çözümde kullanırsak $C = -\frac{1}{2}$ bulunur. O halde özel çözüm

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2} - ln(|\theta|)}$$

olur. Bu çözümde öncelikle $|\theta| = 0$ değerinden sakınmalıyız. Çözümde $|\theta|$ yazdığımız için negatif değerler girmeyecektir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - ln|\theta| &= 0 \\ ln|\theta| &= \frac{1}{2} \\ |\theta| &= e^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \pm\sqrt{e} \end{aligned}$$

çıkar. Buradan çözümün geçerli olduğu aralığı belirleyebiliriz:

$$-\infty < \theta < -\sqrt{e}$$
$$-\sqrt{e} < \theta < 0$$
$$0 < \theta < \sqrt{e}$$
$$\sqrt{e} < \theta < \infty$$

Bu aralıklar arasında başlangıç $\theta = 1$ değerini içeren ama 0 değerini içermeyen aralık $0 < \theta < \sqrt{e}$ aralığıdır. Öyleyse aranan aralık budur.

1.8 Alıştırmalar

1.

$$2ydy = (x^2+1)dx$$

Çözüm: $y^2 = \frac{1}{3}x^3 + x + C$

2.

$$xdx + secx\,siny\,dy = 0$$

Çözüm: $cosy = xsinx + cosx + C$

3.

$$(x^2-1)y^3\,dx + x^2\,dy = 0$$

Çözüm: $\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{x} + x = C$

4.

$$y' = 2y, \qquad y(0) = 8$$

Çözüm: $y = C.e^{2x}, C = 8, y = 8e^{2x}$

5.

$$y' = xe^{x^2 - lny^2}$$

Çözüm: $y^3 = \frac{3}{2}e^{x^2} = C$

6.

$$y' = \frac{x^2 - 4y}{x+2}$$

Çözüm: $y = Ce^{\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)}$

7.

$$xy' = 2(y-4)$$

Çözüm: $y = 4 + Cx^2$

8.

$$\frac{dx}{x} + 2tx = 0$$

Çözüm: $x(t) = Ce^{-t^2}$

9.

$$y' = xy$$

Çözüm: $lny = \frac{1}{2}x^2 + C$

10.

$$(2yx^2 + 4)y' + (2y^2 - 3) = 0$$

Çözüm: $y^2x^2 - 3x + 4y = C$

11.

$$y'' = \frac{4-2x}{3y^2 - 5}$$

Çözüm: $y^3 - 5y = 4x - x^2 + C$

12.

$$2\sqrt{x}\,y' = \cos^2 y, y(4) = \frac{\pi}{4}$$

Çözüm: $tan^{-1}\left(\sqrt{x} - 1\right)$

1.9 İntegral Çarpanı

Önceki bölümde

$$M(x,y)+N(x,y)=0 \tag{1.26}$$

denklemleri için

$$M_y = N_x \tag{1.27}$$

eşitliği sağlanıyosa; yani (1.26) tam diferensiyel ise,

$$df = Mdx + Ndy \tag{1.28}$$

eşitliğini sağlayan $f = f(x,y)$ fonksiyonunun nasıl bulunacağını gördük. Gerçekten orada anlatılan yöntem tam diferensiyel olma koşulunu sağlayan (1.26) türü diferensiyel denklemlerin çözümü için çok kolay bir yöntemdir.
Ancak, verilen diferensiyel denklem her zaman tam diferensiyel olma koşulunu sağlamayabilir. (1.26) tipinde ama

$$M_y \neq N_x \tag{1.29}$$

eşitsizliğini sağlayan; yani tam olmayan diferensiyel denklemlerin çözümü için integral çarpanı diye adlandırılan bir yöntem geliştireceğiz. Düşünce oldukça basittir: Tam olmayan diferensiyel denklemi uygun bir fonksiyon ile çarparak tam hale getirmek.

Tanım 1.5. *$M(x,y)$, $N(x,y)$ fonksiyonları sürekli kısmi türevlere sahip ve (1.29) eşitsizliğini sağlıyor olsunlar. Eğer*

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y) \tag{1.30}$$

ifadesi bir tam diferensiyel oluyorsa $\mu(x,y)$ fonksiyonuna (1.26) için bir integral çarpanı*'dır denilir.*

μ bir integral çarpanı ise, tamlık koşulu gereğince

$$\frac{\partial(\mu.M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu.N)}{\partial x} \tag{1.31}$$

eşitliği sağlanır. Buradan;

$$\frac{\partial(\mu)}{\partial y}M + \mu\,\frac{\partial(M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu)}{\partial x}M + \mu\,\frac{\partial(N)}{\partial x} \tag{1.32}$$

eşitliği yazılabilir. Düzenlersek;

$$\mu\left(M_y - N_x\right) = \mu_x.N - \mu_y.M \tag{1.33}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten $\mu(x,y)$ çarpanını çekersek;

$$\mu = \mu(x,y) = \left(\frac{\mu_x.N - \mu_y.M}{M_y - N_x}\right) \tag{1.34}$$

eşitliği çıkar. Bu eşitliğin sağ yanı üç farklı tipte değer alabilir:

1. $\mu = \mu(x)$ olur; yani integral çarpanı yalnızca x değişkenine bağlı olabilir.
2. $\mu = \mu(y)$ olur; yani integral çarpanı yalnızca y değişkenine bağlı olabilir.

3. $\mu = \mu(x, y)$ olur; yani integral çarpanı hem x değişkenine hem y değişkenine bağlı olabilir.

İlk iki halin ortaya çıkması durumunda μ çarpanı genellikle kolay bulunur. Şimdi bu üç hali örneklerle inceleyelim.
1) $\mu = \mu(x)$ **Durumu:**

$$\mu = \mu(x) \tag{1.35}$$

ise $\mu_y = 0$ olacağından (1.34) eşitliği

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\mu_x . N_x}{M_y - N_x} \\
\frac{d\mu}{\mu} &= \frac{M_y - N_x}{N} dx \\
ln\mu &= \int \frac{M_y - N_x}{N} dx \\
\mu(x) &= e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}
\end{aligned}$$

eşitliklei yazılabilir. Son eşitlikte integrallenen ifadenin yalnız x değişkenine bağlı olduğu için $p(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$ konumuyla, integral çarpanını

$$\mu(x, y) = e^{\int p(x) dx} \tag{1.36}$$

biçiminde yalınlaştırabiliriz.
2) $\mu = \mu(y)$ **Durumu:**
Yukarıda x ile y değişkenlerinin rollerini değiştirirsek, μ çarpanının yalnızca y değişkenine bağlı olduğu özel durum ortaya çıkar. Bu durumda $\mu_x = 0$ olacağından, $q(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$ konumuyla integral çarpanı için

$$\mu(x, y) = e^{\int q(y) dy} \tag{1.37}$$

yazılabilir.
3) $\mu = \mu(x, y)$ **Durumu:**
Bu durumda ifadede bir kısaltma olmaz. μ çarpanı doğrudan (1.34) eşitliğinden bulunur.
Şimdi bu üç durumu örnekler üzerinde inceleyelim.

Örnekler:

1.

$$(x^2 + 2y) dx - x dy = 0 \tag{1.38}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$M(x, y) = x^2 + 2y, \quad N(x, y) = x \tag{1.39}$$

dersek verilen denklem (1.26) biçemindedir.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

yani $M_y \neq N_x$ dir. O halde (1.38) ifadesi bir tam diferensiyel değildir. Problemi çözmek için, (1.38) ifadesini tam diferensiyel yapan bir μ intgral çarpanı bulmaya çalışalım.

$$\frac{\partial\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2-(-1)}{-x} = -\frac{3}{x}$$

dir. bu ifde y den bağımsız olduğu için μ integral çarpanı yalnız x değişkenine bağlı olmalıdır:

$$\begin{aligned} ln\mu &= \int -\frac{3}{x}dx \\ &= -3lnx \\ \mu(x) &= e^{-3lnx} \\ &= e^{-lnx^3} \\ &= \frac{1}{e^{lnx^3}} \\ &= \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

Şimdi integral çarpanı ile çarpıldığında ifadenin tam diferensiyel olup olmadığını görelim:

$$\begin{aligned} \mu M &= \frac{x^2+2y}{x^2} \\ \frac{\partial\mu M}{\partial y} &= \frac{2}{x^3} \\ \mu N &= \frac{x}{x^3} \\ \frac{\partial\mu N}{\partial x} &= \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

olduğundan $\mu = \frac{1}{x^3}$ bir integral sabitidir. Şimdi

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^3}\right) dx - \frac{1}{x^2}dy = 0$$

ifadesini tam diferensiyel kabul eden $f = f(x,y)$ fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \mu M dx + C(y) \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^3}\right) dx + C(y) \\ &= lnx - \frac{y}{x^2} + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y &= \mu N \\
&= -\frac{1}{x^2} + C'(y) = -\frac{1}{x^2} \\
&\Longrightarrow C'(y) = 0 \\
&\Longrightarrow C(y) = C
\end{aligned}$$

O halde genel çözüm; $f(x,y) = -\frac{y}{x^2} + lnx = C$

olur.

2.

$$2y^2(x+y^2)dx + xy(x+6y^2)dy \tag{1.40}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$M(x,y) = 2y^2(x+y^2), \quad N(x,y) = xy(x+6y^2) \tag{1.41}$$

dersek verilen denklem (1.26) biçemindedir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= 4xy + 8y^3 \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= 2xy + 6y^3
\end{aligned}$$

yani $M_y \neq N_x$ dir. O halde (1.40) ifadesi bir tam diferensiyel değildir. Problemi çözmek için, (1.40) ifadesini tam diferensiyel yapan bir μ intgral çarpanı bulmaya çalışalım.

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M} = -\frac{2y(x+y^2)}{2y^2(x+y^2)} = -\frac{1}{y}$$

dir . Buradan

$$\begin{aligned}
ln\mu &= \int -\frac{1}{y} dy \\
&= -lny \\
\mu(y) &= e^{-lny} \\
&= \frac{1}{e^{lny}} \\
&= \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

Şimdi integral çarpanı ile çarpıldığında ifadenin tam diferensiyel olup olmadığını görelim:

$$\begin{aligned}
\mu M &= 2y(x+y^2) \\
\frac{\partial \mu M}{\partial y} &= 2x + 6y^2 \\
\mu N &= x^2 + 6xy^2 \\
\frac{\partial \mu N}{\partial x} &= 2x + 6y^2
\end{aligned}$$

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

olduğundan $\mu = \frac{1}{y}$ bir integral sabitidir. Şimdi

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$$

ifadesini tam diferensiyel kabul eden $f = f(x, y)$ fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int (2xy + 2y^3)dx + C_1(y) \\
&= x^2y + 2xy^3 + C_1(y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 6xy^2 + C_1'(y) \\
&= \mu N \\
&= x^2 + 6xy^2 \\
&\Longrightarrow C_1'(y) = 0 \\
&\Longrightarrow C_1(y) = C, \quad \text{(C sabit)} \\
f(x,y) &= x^2y + 2xy^3 + C
\end{aligned}$$

3.

$$\left(xcosx + \frac{y^2}{x}\right)dx - \left(\frac{xsinx}{y} + y\right)dy = 0 \tag{1.42}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$M(x,y) = \left(xcosx + \frac{y^2}{x}\right), \quad N(x,y) = -\left(\frac{xsinx}{y} + y\right) \tag{1.43}$$

dersek verilen denklem (1.26) biçemindedir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{2y}{x} \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{sinx + xcosx}{y}
\end{aligned}$$

yani $M_y \neq N_x$ dir. O halde (1.42) ifadesi bir tam diferensiyel değildir. Problemi çözmek için, (1.42) ifadesini tam diferensiyel yapan bir μ intgral çarpanı bulmaya çalışalım. (1.42) ifadesini $\mu(x, y)$ ile çarpıp tam diferensiyel olma koşulunu yazarsak;

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y)$$

eşitliği çıkar. Buradan

$$\frac{\mu_y}{\mu}\left(xcosx + \frac{y^2}{x}\right) - \frac{\mu_x}{\mu}\left[-\left(\frac{xsinx}{y} + y\right)\right]$$
$$= -\frac{sinx + xcosx}{y} - \frac{2y}{x}$$

Bu eşitlik ancak,

$\frac{\mu_y}{\mu} = -\frac{1}{y}, \quad \frac{\mu_x}{\mu} = -\frac{1}{x}$

olması halinde sağlanır. Oysa bu eşitlikler

$$M(x,y) = \frac{1}{xy} \tag{1.44}$$

olmasının gerektirir. O halde integral çarpanı hem x hem y değişkenine bağlıdır. (1.42) ifadesini $\mu(x,y) = \frac{1}{xy}$ ile çarptığımızda elde edilen ifade

$\left(\frac{cosx}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{sinx}{y^2} + \frac{1}{x}\right)dy = 0$

olur. Bunun tam diferensiyel olma koşulunu sağladığı kolayca görülür. Son ifadeyi tam diferensiyel kabul eden $f = f(x,y)$ fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int \left(\frac{cosx}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx + C_1(y) \\
&= \frac{sinx}{y} - \frac{y}{x} + C_1(y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{sinx}{y^2} - \frac{1}{x} + C_1'(y) \\
&= \mu N \\
&= -\frac{1}{xy}\left(\frac{xsinx}{y} + y\right) \\
&\Longrightarrow C_1'(y) = 0 \\
&\Longrightarrow C_1(y) = C, \quad \text{(C sabit)} \\
f(x,y) &= \frac{sinx}{y} - \frac{y}{x} + C
\end{aligned}$$

4.

$$\left(xe^x + xlny + y\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} + xlnx + xsiny\right)dy = 0 \tag{1.45}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$M(x,y) = (xe^x + xlny + y), \quad N(x,y) = \left(\frac{x^2}{y} + xlnx + xsiny\right) \tag{1.46}$$

dersek verilen denklem (1.26) biçemindedir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{x}{y} + 1 \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{2x}{y} + lnx + 1 + siny
\end{aligned}$$

yani $M_y \neq N_x$ dir. O halde (1.45) ifadesi bir tam diferensiyel değildir. Problemi çözmek için, (1.45) ifadesini tam diferensiyel yapan bir μ integral çarpanı bulmaya çalışalım.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{-\frac{x}{y} - lnx - siny}{x(\frac{x}{y} + lnx + siny} = -\frac{1}{x}$$

dir. bu ifde y den bağımsız olduğu için μ integral çarpanı yalnız x değişkenine bağlı olmalıdır:

$$\begin{aligned} ln\mu &= \int -\frac{1}{x} dx \\ &= -lnx \\ \mu(x) &= e^{-lnx} \\ &= e^{-lnx} \\ &= \frac{1}{e^{lnx}} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Şimdi integral çarpanı ile çarpıldığında ifadenin tam diferensiyel olup olmadığını görelim:

$$\begin{aligned} \mu M &= \frac{1}{x}(xe^x + xlny + y) \\ &= e^x + lny + \frac{y}{x} \\ \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \\ \mu N &= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{y} + xlnx + xsiny\right) \\ &= \frac{x}{y} + lnx + siny \\ \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} &= \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \\ (\mu M)_y &= (\mu N)_x \end{aligned}$$

olduğundan $\mu = \frac{1}{x}$ bir integral sabitidir. Şimdi

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$$

ifadesini tam diferensiyel kabul eden $f = f(x, y)$ fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \mu M dx \\ &= \int \left(e^x + lny + \frac{y}{x}\right) dx + C_1(y) \\ &= e^x + xlny + ylnx + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{y} + lnx + C_1'(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu N &= \frac{x}{y}\left(\frac{x^2}{y} + xlnx + xsiny\right) \\ &= \frac{x}{y} + lnx + \sin y \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\Longrightarrow C_1'(y) = siny \\ &\Longrightarrow C_1(y) = -cosy + C, \quad \text{(C sabit)} \end{aligned}$$

O halde, genel çözüm;

$f(x,y) = e^x + xlny + ylnx - cosy + C$

olur.

5.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3xy+y^2}{x^2+xy} \tag{1.47}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

denklemi

$$(3xy+y^2)dx + (x^2+xy)dy = 0 \tag{1.48}$$

biçeminde yazarsak;

$$M(x,y) = 3xy+y^2$$
$$N(x,y) = x^2+xy$$

olur. Burdan

$$M_y = 3x+2y, \qquad N_x = 2x+y \Longrightarrow M_y \neq N_x$$

sonucu çıkar. Şimdi (1.48) ifadesini tam diferensiyel yapan bir integral çarpanı bulmaya çalışalım:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$$

olduğundan yalnız x değişkenine bağlı bir $\mu(x)$ integral çarpanı vardır:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{lnx} = x$$

(1.48) ifadesini $\mu(x) = x$ ile çarparsak, çarpımın tam diferensiyel olduğu görülür. Bunu tam diferensiyel kabul eden $f = f(x,y)$ fonksiyonunu bulmak için $f_x = 3x^2y + xy^2$ eşitliğini kullanalım:

$$f(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$$

çıkar. $h(y)$ integral sbitinin değerini bulmak için $f_y = x^3 + x^2y + h'(y)$ eitliğini kullanalım:

$$f_y = x^3 + x^2y \quad \text{ve } h'(y) = x^3 + x^2y \Longrightarrow h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = C, \text{ (C sabit)}$$

çıkar. Bunu yerine yazarsak genel çözüm;

$$f(x,y) = x^3y + x^2y = C$$

olur.

1.10 Alıştırmalar

1.

$$x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0, \quad \text{Çözüm: } \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2y^2} + ln|y| = C$$

2.

$$(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0, \quad \text{Çözüm: } e^{3x}x^2y + e^{3x}y^3 = C$$

3.

$$x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0, \quad \text{Çözüm: } \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2y^2} + ln|y| = C$$

4.

$$y' - \frac{3}{x+1}y = (x+1)^4, \quad \text{Çözüm: } y = (x+1)^3\left(\frac{1}{2}x^2 + x + C\right)$$

5.

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{sinx}{x^2}, \quad \text{Çözüm: } y = \frac{C - cosx}{x^2}$$

6.

$$y' - \frac{1}{x} = xe^{-x}, \quad \text{Çözüm: } y = x(e^{-x} + C$$

7.

$$y' + 2xy = x, \quad \text{Çözüm: } y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

8.

$$y' - \frac{1}{x}y = 3x^3, \quad \text{Çözüm: } y = \frac{3}{4}x^4 + Cx^2$$

9.

$$y' - \frac{2}{x}y = 0, \quad \text{Çözüm: } y = Cx^2$$

10.

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad \text{Çözüm: } y = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\frac{C}{t^2}$$

11.

$$ty' - 2y = t^5 sin(2t) - t^3 + 4t^4 \qquad y(\pi) = \frac{pi}{4}, \quad \text{Çözüm: } y = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\frac{C}{t^2}$$

12.

$$\left(2x^2 + y\right)dx + \left(x^2y - x)\right)dy = 0, \qquad \text{Çözüm: } y = 2x + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = C$$

1.11 Birinci Basamaktan Homojen denklemeler

Tam diferensiyel denklemlerden sonra en kolay çözülebilen denklem türünün *değişkenlerine ayrılabilir* diferensiyel denklemler olduğunu söylemiştik.
Bazı denklemler her iki türe girmez. Ama uygun ilemlerle o türlerden birisine dönüştürülebilen denklem sınıfları vardır. Onlardan birisi bu kesimde ele alacağımız, homojen denklem sınıfıdır.
$f(tx, yt) = t^n f(x, y)$ eşitliğini sağlayan $f(x, y)$ fonksiyonuna n-inci dereceden *homojendir* denilir.
$t = \frac{1}{x}$ alınırsa;

$$\frac{1}{x^n}f(x,y) = f(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}) = \phi(\frac{y}{x})$$
$$f(x,y) = x^n f(1, \frac{y}{x}) = x^n\phi(\frac{y}{x})$$

biçimine dönüşebilir. $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlaarı x ve y değişkenleine göre aynı dereceden homojen iseler

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

biçimindeki diferensiyel denklemlere homojen'dir denilir.
Örnek:
$f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu ikinci dereceden homojendir. Çünkü; $f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2 f(x,y)$ dir.
Örnek:
$\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx - x dy = 0$ denklemi homojendir. Çünkü;
$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2} = \phi(\frac{y}{x})$ dir.

Tanım 1.6. *Birinci basamaktan*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

biçimindeki diferensiyel denklemlere birinci basamaktan homojen diferensiyel denklem denilir.

Bu tür denklemleri çözmek için;

$$u = \frac{y}{x} \longrightarrow y = ux, y' = u + u'x$$

konumu yapılırsa;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} \\ &= \phi\left(\frac{y}{x}\right) && = \phi(v) \\ y' &= f'(x) \\ v + v'x &= f(x) = y' \\ v' &= \frac{\phi(v) - v}{x} \\ \frac{dv}{f(v) - v} &= \frac{dx}{x} \\ \frac{dv}{\phi(v) - v} &= \int \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilir. Son eşitlikte bilinen integral fomülleri kullanılarak çözüme ulaşılır.

Örnekler:

1.

$$(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0 \tag{1.49}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklem ikinci dereceden homojendir. $y = ux$, $dy = xdu + udx$ konumu yapılılırsa, verilen denklem;

$$\begin{aligned} x^2(1+u^2)\,dx + x^2u(udx + xdu) &= 0 \\ (1+u^2)\,dx + u(udx + xdu) &= 0 \\ (1+2u^2)\,dx + uxdu &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{udu}{1+2u^2} &= 0 \end{aligned}$$

Son ifade değişkenlerine ayrılabilir bir diferensiyel denklemdir. Onun x ve u değişkenlerine göre çözümü:

$$lnx + \frac{1}{4} ln(1+2u^2) = K$$
$$4lnx + ln(1+2u^2) = 4K$$
$$lnx^4(1+2u^2) = 4K$$

Son eşitlikte logaritma fonksiyonunun tersini kullanırsak, ifadeyi üstel biçime sokabiliriz:

$$x^4(1+2u^2) = e^{4K} = C$$

Şimdi $u = \frac{y}{x}$ konumuyla u değişkenini yokedersek

$$x^4\left(1+2\frac{y^2}{x^2}\right) = C$$

ya da

$$x^4 + 2x^2y^2 = C$$

elde edilir. Bu aradığımız genel çözümdür.

2.

$$y' = \frac{xy}{x^2+2y^2} \tag{1.50}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklem 2-inci dereceden homojendir. $y = ux, y' = u'x + u$ konumuyla;

$$u'x + u = \frac{u}{1+2u^2}$$
$$u = u'x + 2xu^2u' + u + 2u^3$$
$$2u^3 = (x+2xu^2)u'$$

$$\frac{1+2u^2}{2u^3} = -\frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^3} + \int\frac{du}{u} = -\int\frac{dx}{x} + C$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{u^2} lnu + lnx = C$$
$$-\frac{1}{4} + u^2 lnu + u^2 lnx = Cu^2$$
$$-\frac{1}{4} + \frac{y^2}{x^2}\left(ln(\frac{y}{x}x)\right) = C\frac{y^2}{x^2}$$
$$-\frac{1}{4} + \frac{y^2}{x^2} lny = C\frac{y^2}{x^2}$$

3.

$$y' = \frac{x^3 + 3xy^2}{3x^2y + 2y^3} \tag{1.51}$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklem 3-üncü dereceden homojendir.

$y = ux, y' = u'x + u$ konumuyla denklemi değişkenlerine ayırabiliriz:

$$u'x + u = \frac{1+3u^2}{3u+u^3}$$
$$3uxu' + u^3u'x + 3u^2 + u^4 = 1 + 3u^2$$
$$x(3u+u^3)u' = 1 - u^4$$
$$\frac{3u+u^3}{1-u^4}u' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{3u+u^3}{1-u^4}du = \int \frac{dx}{x} + lnC$$
$$\int \frac{3udu}{1-u^4} + \int \frac{u^3}{1-u^4}du - lnCx = 0 \tag{1.52}$$

Şimdi (1.52) eşitliğinin solundaki integralleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$t = u^2, dt = 2u\ du$ konumuyla

$$\int \frac{3u}{1-u^4}du = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1-t^2}$$
$$= -\int \frac{1}{t^2-1}dt$$
$$= -\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1}$$

$u = t+1, du = dt$ konumuyla ilk integral hesaplanabilir:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= -\frac{1}{2}lnu$$
$$= ln\frac{1}{\sqrt{u}}$$
$$= ln\frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Benzer düşünüşle, $v = t-1, dv = dt$ konumu yapılırsa;

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v}$$
$$= -\frac{1}{2}lnv$$
$$= ln\frac{1}{\sqrt{v}}$$
$$= ln\frac{1}{\sqrt{t-1}}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{4}\ln\frac{1+t}{1-t}\\
&= \frac{3}{4}ln\frac{1+u^4}{1-u^4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{4}ln\frac{1+u^2}{1-u^4}\\
&= -\frac{1}{4}ln(1-u^4)\\
&= -\frac{1}{4}ln(1-u^4)
\end{aligned}
$$

Şimdi (1.52)'in ikinci integralini hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{u^3du}{1-u^4} = -\frac{1}{4}\int\frac{-4u^3du}{1-u^4}\\
&-\frac{1}{4}ln(1-u^4)+lnC\\
&= ln\frac{1}{\sqrt[4]{1-u^4}}+lnC\\
&= ln\frac{C}{\sqrt[4]{1-u^4}}\\
&= ln\frac{Cx^2}{\sqrt[4]{1-y^4}}
\end{aligned}
$$

Bulduklarımızı biraraya getirirsek genel çözüm ortya çıkar:

$$
ln\frac{1}{\sqrt{t+1}}+ln\frac{1}{\sqrt{t-1}}+ln\frac{Cx^2}{\sqrt[4]{1-y^4}} = lnCx \tag{1.53}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{u^3}{1-u^4}du &= \frac{1}{4}\int\frac{-4u^3}{1-u^4}du\\
&= \frac{1}{4}\ln(1-u^4)
\end{aligned}
$$

Buradan;

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1} &= -\frac{1}{2}\left(ln(t+1)-ln(t-1)\right)\\
&= -\frac{1}{2}ln\frac{t+1}{t-1}
\end{aligned}
$$

4.

$$
y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \tag{1.54}
$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Eşitliğin sağındaki terimi ayırıp düzenleyelim:

$$y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}$$
$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$
$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \frac{y}{x}$$

Buradan;

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \frac{y}{x}$$
$$u + xu' = u^{-1} + u$$
$$x\frac{du}{dx} = u^{-1}$$

İfade değişkenlerine ayrılabilir hale gelmiştir.

$$u\,du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$\int u\,du = \int \frac{1}{x}dx$$
$$\frac{u^2}{2} = lnx + ln(Cx$$
$$u = \pm\sqrt{(2lnCx)}$$

bulunur. Buradan $u = \frac{y}{x}$ koyarsak çözüm;

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{(2lnCx)}$$
$$y = \pm x\sqrt{(2lnCx)}$$

genel çözümü bulunur.

5.

$$y' = \frac{y(x-y)}{x^2} \tag{1.55}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Eşitliğin sağındaki terimi ayırıp düzenleyelim:

$$y' = \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$$
$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$
$$y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Buradan;

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ u + xu' &= u - u^2 \\ x\frac{du}{dx} &= -u^2\end{aligned}$$

İfade değişkenlerine ayrılabilir hale gelmiştir.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{u^2}\,du &= \frac{1}{x}\,dx \\ -\int \frac{1}{u^2}\,du &= \frac{1}{x}\,dx \\ \frac{1}{u} &= lnx + lnC \\ \frac{1}{u} &= ln(Cx) \\ u &= \frac{1}{lnCx}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $u = \frac{y}{x}$ koyarsak çözüm;

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= ln(Cx) \\ y &= \frac{x}{lnCx)}\end{aligned}$$

genel çözümü bulunur.

1.12 Alıştırmalar

1.

$$\begin{aligned}y' + y &= 0 \\ \text{Çözüm}: \ y &= Ce^{-5x}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}y' + x^2y &= 0 \\ \text{Çözüm}: \ y &= Ce^{-x^3/3}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}y' + y = 0 \qquad y(0) &= 4 \\ \text{Çözüm}: \ y &= 4e^{-x}\end{aligned}$$

4.
$$y' + ysinx = 0 \qquad y(\pi) = 1$$
$$\text{Çözüm}: \; y = e^{1+cosx}$$

5.
$$x^2y' + y = 0 \qquad y(1) = -2, x > 0$$
$$\text{Çözüm}: \; y = e^{1+cosx}$$

6.
$$x^3y' - 2y = 0 \qquad y(1) = 1, x > 0$$
$$\text{Çözüm}: \; y = e^{1-t^2}$$

7. $y(x)$ fonkiyonu $y' + Cy = 9$ diferensiyel denkleminin çözümü ve $y(2) = 4$ ide $y(x)$ fonksiyonu nedir?

   Çözüm :

   $C = ln5,\; y = 100e^{xln5}$

8. Bir bakteri türünün çoğalması nüfusü ile doğru orantılıdır. Bakteri nüfusu $t = 0$ anıda 1 milyon ve $t = 1$ anında 1.5 milyon ise, bakterilerin t anındaki nüfusu nedir?

   Çözüm : $10^6e^{tln(\frac{3}{2})}$

9. Bir radyoaktif elementin yarı ömrü 6 yıldır. $t = 0$ anında bir radyoaktif element kütlesinin ağırlığı 10 ton ise, t anındaki element miktarını bulunuz.

   Çözüm : $y = 10e^{-tln(2)}$

10.
$$y' - ycos(e^t) = 0, \qquad y(0) = 0$$
$$\text{Çözüm}: \; y = 0$$

11. $2xyy' = 4x^2 + 3y^2, \qquad$ Çözüm :$y^2 + 4x^2 = Cx^3$

12. $xy' = y + \sqrt{x'3 - y^2}, \qquad$ Çözüm :$Sin^{-1}\frac{y}{x} = lnx + C$

1.13 Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler

Uygulamada karşımıza çıkan denklem sınıflarından birisi de Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklem sınıfıdır Bu sınıftaki denklemler için uygun bir integral çarpanı bulunur ve tam diferensiyel tipine indirgenebilir.

$$y' + yP(x) = Q(x) \tag{1.56}$$

biçimindeki denklemlere birinci basamaktan doğrusal diferensiyel denklem denilir. Dikkat edilirse, denklemde y' ve y değişkenlerinin kuvvetleri 1 dir. Doğrusal denmesinin nedeni budur. $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları x dğişkenine bağlı herhangi iki fonksiyondur. Bu tür denklemleri ayrılabilir diferensiyel denklem tipine dönüştürmek için uygun bir $I(x)$ integral çarpanı bulunur:
$I(x)$ bir integral çarpanı ise

$$I\,dy + (yP - Q)I\,dx = 0$$

ifadesi bir tam diferensiyel olur. O halde;

$$\begin{aligned} \frac{\partial(yP-Q)I}{\partial y} &= \frac{\partial I}{\partial x} \\ PI &= \frac{dI}{dx} \end{aligned}$$

olur. P, Q, I fonksiyonları yalnız x değişkenine bağlı olduğu için, son denklem değişkenleine ayrılabilir bir türdür. Buradan

$$\int P\,dx = lnI$$

ya da

$$I = e^{\int P\,dx}$$

bulunur. Böylece aradığımız $I(x)$ integral çarpanını bulmuş olduk. Verilen (1.56) denklemini bununla çarparsak;

$$e^{\int P\,dx}\big(y' + yP(x)\big) = Q(x)e^{\int P\,dx}$$

denklemi bir tam diferensiyel olur. Bunun çözümü

$$\begin{aligned} ye^{\int P\,dx} &= \int Q(x)e^{\int P\,dx}\,dx + C \\ y &= e^{-\int p\,dx}\left[\int e^{\int P\,dx}Q(x)\,dx + C\right] \end{aligned}$$

olur, ki bu aranan genel çözüdür.
Örnekler:

1.

$$y' + \frac{1}{x}y = 2$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: denklem birinci basamaktan doğrusal bir diferensiyel denklemdir.İntegral çarpanı;

$$e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{lnx} = x$$

olur. O halde, verilen asıl denklemi $I(x) = x$ ile çarparsak;

$$xy' + y = 2x$$

biçimini alır.Bu bir tam diferensiyeldir ve çözümü;

$$yx = \int 2x\,dx$$

$$yx = x^2 + C$$

olur.

2.

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1$$

difrensiyel denkleminin $(1, \frac{1}{2})$ noktasından geçen özel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen ifade x ile bölünürse

$$y' + 2\frac{1}{x}y = x - 1 + \frac{1}{x}$$

biçimini alır. Bu birinci basamaktan doğrusal bir diferensiyel denklemdir. $\mu(x)$ integral arpanı;

$$\mu(x) = e^{\frac{1}{x}\,dx} = e^{2lnx} = e^{lnx^2} = x^2$$

Verile ifadeyi bununla çarparsak

$$(x^2y)' = x^3 - x^2 + x$$
$$x^2y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}$$

Bu genel çözümdür. . Şimdi başlangıç koşullarını sağlayan özel çözümü bulmak için $(y(1) = \frac{1}{12}$ eşitliğini sağlayan C sabitini tayin etmeliyiz. Yerlerine konulursa

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{C}{2}$$
$$\Rightarrow C = \frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow C = \frac{4}{3}$$
$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{4}{3x^2}$$

özel çözümü bulunur.

3.

$$y' + \frac{2}{x}y = lnx$$

difrensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Denklem birinci basamaktan doğrusal bir diferensiyel denklemdir. $\mu(x)$ integral arpanı;

$$\mu(x) = e^{\frac{2}{x}dx} = e^{2lnx} = e^{lnx^2} = x^2$$

Verile ifadeyi bununla çarparsak

$$(x^2y)' + 2xy = x^2lnx$$

Eşitliğin iki yanının integrali alınırsa;

$$x^2y = \frac{1}{3}x^3lnx - \frac{1}{9}x^3 + C$$

olur. Bu ifadeyi x^2 ile bölersek;

$$y = \frac{1}{3}xlnx - \frac{1}{9}x + \frac{C}{x^2}$$

4.

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v, \qquad v(0) = 48 \tag{1.57}$$

diferensiyel denkleminin başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Bu denklemi $\frac{dv}{dt} + 0.196v = 9.8$ biçiminde yazarsak, doğrusal biçeme dönüştürmüş oluruz. İntegral çarpanı

$$\mu(t) = e^{\int 0.196dt} = e^{0.196t}$$

olur. Verilen denklemi $\mu(t)$ integral çarpanı ile çarpar ve gösterilen işlemleri yaparsak genel çözümü buluruz:

$$\begin{aligned}
e^{0.196t}\frac{dv}{dt} + 0.196e^{0.196t}v &= 9.8e^{0.196t} \\
\left(e^{0.196t}v\right)' &= 9.8e^{0.196t} \\
\int \left(e^{0.196t}v\right)' dt &= \int 9.8e^{0.196t}dt \\
e^{0.196t}v &= 50e^{0.196t} + C \\
e^{0.196t}v+ &= 50e^{0.196t} + C \\
v(t) &= 50 + Ce^{0.196t}
\end{aligned}$$

Başlangıç koşulunu sağlayan özel çözümü bulmak için, koşula uyan C sabitini belirlemek gerekir. Son datırda verilen genel çözümde $T = 0, V = 48$ değerlerini koyarsak

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v \Longrightarrow C = -2$$

çıkar. O halde istenen özel çözüm;

$$v = 50 - 2e^{0.196t}$$

olur.

5.

$$y'cosx + ysinx = 2cos^3xsin^{-1}x - 1, \qquad y(\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}, 0 \le x \le \frac{pi}{2} \tag{1.58}$$

diferensiyel denkleminin başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Bu denklemi

$$y' + \frac{sinx}{cosx}y = 2cos^2xsinx - \frac{1}{cosx}$$
$$y' + ytanx = 2cos^2xsinx - secx$$

$$\mu(x) = e^{\int tanx\,dx} = e^{ln(|secx|)} = e^{ln(secx)} = secx$$

olur. Verilen denklemi $\mu(x)$ integral çarpanı ile çarpar ve gösterilen işlemleri yaparsak genel çözümü buluruz:

$$\begin{aligned} y'secx + ysecxtanx &= 2cos^2xsecxsinx - sec^2x \\ (ysecx)' &= 2cosxsinx - sec^2x \\ \int \left(ysecx\right)'\,dx &= \int (2cos^2xsecxsinx - sec^2x)\,dx \\ ysecx &= \int (sin(2x) - sec^2x)\,dx \\ ysecx &= -cos(2x) - tanx + C \end{aligned}$$

$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$ eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}cosxcos(2x) - cosxtanx + Ccosx \\ &= -\frac{1}{2}cosxcos(2x) - sinxCcosx \end{aligned}$$

Başlangıç koşulunu sağlayan özel çözümü bulmak için, koşula uyan C sabitini belirlemek gerekir. Son satırda verilen genel çözümde $t = \frac{\pi}{4}, y = 3\sqrt{2}$ değerlerini koyarsak

$$3\sqrt{2} = y(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}cos(\frac{\pi}{4})cos(\frac{\pi}{2}) - sin(\frac{\pi}{4}) + Ccos(\frac{\pi}{4})$$
$$3\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + C\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$C = 7$$

çıkar. O halde istenen özel çözüm;

$$y(x) = -\frac{1}{2}cos(2x) - sinx + 7cosx$$

olur.

6.

$$y'\,t + 2y = t^2 - t + 1, \qquad y(1) = \frac{1}{2} \tag{1.59}$$

diferensiyel denkleminin başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Bu denklemi

$$y' + \frac{2}{t}y = t - 1 + \frac{1}{t}$$

biçiminde yazarsak, doğrusal biçeme dönüştürmüş oluruz. İntegral çarpanı

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}\,dt} = e^{2ln|t|} = e^{lnt^2} = t^2$$

olur. Verilen denklemi $\mu(t)$ integral çarpanı ile çarpar ve gösterilen işlemleri yaparsak genel çözümü buluruz:

$$y'secx + ysecxtanx = 2cos^2xsecxsinx - sec^2x$$

$$\begin{aligned}
(yt^2)' &= t^3 - t^2 + t \\
\int \left(yt^2\right)' dt &= \int (t^3 - t^2 + t)\,dt \\
yt^2 &= \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + C \\
y(t) &= \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2}
\end{aligned}$$

Başlangıç koşulunu sağlayan özel çözümü bulmak için, koşula uyan C sabitini belirlemek gerekir. Son satırda verilen genel çözümde $t = 1, y = \frac{1}{2}$ değerlerini koyarsak $C = 12$ buluruz. O halde istenen özel çözüm;

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$

olur.

1.14 Alıştırmalar

Aşağıdaki diferensiyel denklemlerini çözünüz.

1.

$$ty' - 2y = t^5 sin(2t) - t^3 + 4t^4, \quad y(\pi) = \frac{3pi}{4}$$

Çözüm: $y(t) = -\frac{1}{2}t^4cos(2t) + \frac{1}{2}t^3sin(2t) + \frac{1}{4}t^2cos(2t) - t^3 + 2t^4 + \left(\pi - \frac{1}{4}\right)t^2$

2.

$$2y' - y = 4sin(3t), \qquad y(0) = y_0$$

Çözüm: $y(t) = -\frac{24}{37}cos(3t) - \frac{4}{37}sin(3t) + \left(y_0 + \frac{24}{37}\right)e^{\frac{t}{2}} - t^3 + 2t^4 + (\pi - \frac{1}{4}$

3.

$$y' - ytanx = cos^2 x, \qquad y(0) = 2$$

Çözüm: $y(x) = (sinx + 2)\, cosx$

4.

$$y' = \sqrt{x}, \qquad y(0) = 0$$

Çözüm: $y(x) = \frac{x^4}{4}$

5.

$$y' + 2xy = x,$$

Çözüm: $y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$

6.

$$y' + \frac{1}{x}y = sinx, \qquad y(\pi) = 1$$

Çözüm: $xy = -xcosx + sinx$

7.

$$y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

Çözüm: $y = Ce^{2/x}$

8.

$$y' - \frac{4}{x}y = 0$$

Çözüm: $y = Cx^4$

9.

$$y' - \frac{4}{x}y = x^4$$

Çözüm: $y = Cx^4 + x^5$

10.

$(1 - x^2)y' = x(1 - y), \qquad$ (0,0) noktasından geçen özel çözüm

Çözüm: $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

11.

$$(x^2+1)y'+3xy=6x,$$
$$\text{Çözüm:} \quad y=C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}+2$$

12.

$$(1-4xy^2)y'=y^3,$$
$$\text{Çözüm:} \quad x=\frac{1}{2y^2}+\frac{C}{y^4}$$

13.

$$y^2dx+(3xy-1)dy=0,$$
$$\text{Çözüm:} \quad x=\frac{1}{2y}+\frac{C}{y^3}$$

14.

$$y'+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{x}{x^2+1}, \quad y(2)=1$$
$$\text{Çözüm:} \quad x=(x^2+1)^2y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+19$$

1.15 Bernoulli Diferensiyel Denklemi

Dereceleri 1'den büyük olan bazı diferensiyel denklemlerin derecelerini uygun bir dönüşümle 1'e indirmek mümkündür. Bunlardan birisi Bernoulli , ötekisi Riccati denklemidir. Derecesi 1'e indirildikten sonra denklem çözüm yöntemini bildiğimiz doğrusal denklem tipine dönüşür ve o denlemin çözümü bulun duktan sonra geriye dönüşle asıl denklemin çözümü elde edilebilir.

Tanım 1.7. $y'+p(x)y=q(x)y^n$

tipinde olan diferensiyel denklemelere Bernoulli diferensiyel denklemi denilir. Bu denklemin derecesi y^n teriminin derecesi olan n tam sayısına eşittir.

Alıştırmalar 1.1.

Aşağıdaki diferensiyel denklemler Bernoulli tipindendir:

1. $y'+\frac{4}{x}y=xy^3, \quad y(2)=-1, x>0$
2. $y'+xy=xy^3$
3. $y'+\frac{1}{x}y=xy^3$
4. $y'+\frac{1}{3}y=e^xy^4$
5. $xy'+y=xy^3$
6. $y'+\frac{2}{x}y=-x^2\cos x.y^2$
7. $2y'+y.tanx=\frac{(4x+5)^2}{\cos x}y^3$
8. $xy'+y=y^2x^2lnx$
9. $y'+ycotx+y^3cscx$

1.16 Bernoulli Diferensiyel Denkleminin Çözümü

$v = y^{1-n} = \frac{1}{y^{n-1}}$ konumuyla, (1.7) denklemi

$$\frac{dy}{dx} = (1-n)p(x)v = (1-n)q(x) \tag{1.60}$$

biçimine dönüşür. Bu doğrusal tiptir ve çözüm yöntemi biliniyor. (1.60) denkleminin v çözümü bulunduktan sonra $y = v^{\frac{1}{1-n}}$, $n > 1$ dönüşümünde geriye dönülerek asıl (1.7) Bernoulli denkleminin çözümü bulunur.

1.17 Alıştırmalar

1. $y' = y + y^3$ diferensiyel denklemini çözünüz.

   Çözüm:

   $n = 3$ olduğundan denklem üçüncü dereceden bir Bernoulli denklemidir. $v = y^{1-3} = y^{-2}$ konumuyla

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{v} \\ 2yy' &= -\frac{v'}{v^2} = 2y^2 + 2y^4 \\ &\Rightarrow -v' = 2v + 2 \\ &\Rightarrow v' + 2v = -2 \end{aligned}$$

   çıkar. Bu doğrusal denklemi çözmek için, integral çarpanını arayalım:

   $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$ olur. Denklemi bununla çarparsak

$$v = \frac{-e^{2x} + C}{e^{2x}} = Ce^{-2x} - 1$$

   Asıl denklemin çözümü için $y^2 = v^{-1}$ olduğunu anımsarsak

$$y = \pm\left(Ce^{-2x} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

   genel çözümünü buluruz.

2.

$$y' + xy = xy^3$$

   Bernoulli diferensiyel denklemleri çözünüz.

   Çözüm:

   Her iki tarafı y^{-3} ile çarpalım:

$$\begin{aligned} y^{-3}y' + xyy^{-3} &= xy^{-3}y^3 \\ y^{-3}y' + xy^{-2} &= x \end{aligned}$$

çıkar. Şimdi $v = y^{1-3} = y^{-2}$ konumu yapılırsa $v' = -2y^{-3}y'$ çıkar. Buradan

$$-\frac{1}{2}v' + xv = x$$

doğusal denklemi elde edilir. Bunu çözmek için integral çarpanını bulalım:

$$\mu(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

Denklemi bununla çarparak tam diferensiyel yapabiliz.

$$e^{-x^2}v' - 2xve^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left(ve^{-x^2}\right) = -2xe^{-x^2}$$

İki tarafın x değişkenine göre integralleri alınırsa;

$$\int \frac{d}{dx}\left(ve^{-x^2}\right)dx = \int -2xe^{-x^2}\,ve^{-x^2} = -2\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) + C \qquad \text{(C sabit)}\ ve^{-x^2} = e^{-x^2} + C$$

bulunur. Eşitliğin iki yanının e^{-x^2} ile bölersek;

$$v = 1 + \frac{C}{e^{-x^2}}$$
$$v = 1 + Ce^{x^2}$$

sıl denklemin çözümünü bulmak için $v = y^{-2}$ konumu yaptığımızı anımsayalım. Buradan $v = 1 + Ce^{x^2} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$ ya da

$$y^2 = \frac{1}{1 + Ce^{x^2}}$$

çıkar.

3. $y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$

denkleminin , $y(2) = -1, x > 0$ başlangıç koşullarını sağlayan özel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Denklem ikinciderceden Bernoulli tipindendir. $v = y1 - 2 = y^{-1}$ konumuyla denklemi

$-v' + \frac{4}{x}v = x^3$

biçiminde yazabiliriz. Bu doğrusal bir denklem tipidir. Çözüm için integral çarpanının bulalım:

$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4ln|x|} = x^{-4}$

çıkar. Eşitliğin iki yanının μ ile çarparsak

$$\int \left(x^{-4v}\right)' dx = \int -x^{-1}\,dx$$

$$x^{-4v} = -\ln|x| + Cv(x) = Cx^4 - x^4 lnx \quad (x > 0)$$

Asıl denklemin çözümünü blmak için v yerine y koymalıyız:

$y^{-1} = x^4(C - lnx)$

genel çözüm olur. Şimdi bu genel çözümden soruda istenen başlangıç koşullarını sağlayan özel çözümü elde edeceğiz. Aslında özel çözümü bulmak demek, genel çözümdeki keyfi sabit olan C sabitinin değerini, istenen koşulu sğlaycak şekilde bulmak demektir.

$$(-1)^{-1} = C2^4 - 2^4 ln2$$
$$C = ln2 - \frac{1}{16}$$

Bu değeri genel çözümde kullanırsak

$$y = \frac{1}{x^4\left(ln2 - \frac{1}{16} - lnx\right)}$$
$$= \frac{-16}{x^4(1 + 16lnx - 16ln2)}$$
$$= \frac{-16}{x^4(1 + 16ln(\frac{x}{2}))}$$

istenen özel çözümdür.

4.

$$y' = 5y + e^{-2x}y^{-2}$$

denkleminin $y(0) = 2$ koşulunu sağlayan özel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$n = -2$ olduğundan dnklem (-2)-inci dereceden bir Bernoulli denklemidir.

$v = y^{1-(-2)} = y^3$ konumuyla denklem

$$v' - 15v = 3e^{-2x}$$

doğrusal denklemine dönüşür. Bunu çözmek için integral çarpanı bulacağız;

$$\mu(x) = e^{\int -15dx} = e^{-15x}$$

Denklemi bununla çarpınca tam diferensiyel olur. Eşitliğin iki yanının bununla çarpıp çıkan tam diferensiyelden integral alınırsa;

$$v(x) = Ce^{15x} - \frac{3}{17}e^{-2x}$$

bulunur. Asıl denklemdeki y fonksiyonunu bulmak için $v = y^3$ konumunu kullanalım.

$$y^3 = Ce^{15x} - \frac{3}{17}e^{-2x}$$

çıkar. C sabitini bulmak için başlangıç koşulunu kullanalım:

$$8 = C - \frac{3}{17}$$
$$C = \frac{139}{17}$$

olur.Buna göre istenen özel çözüm;

$y(x)=\left(\frac{139e^{15x}-3e^{-2x}}{17}\right)^{\frac{1}{3}}$

olur.

5. $y'+xy=xy^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

Denklem ikinci dereceden Bernoulli tipindendir. $v=y^{1-2}=y^{-1}=\frac{1}{y}$ konumuyla denlem

$-\frac{1}{v^2}v'+x\frac{1}{v}=x\frac{1}{v}\Rightarrow v'-xv=-x$

doğrusal denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek için bir $\mu(x)$ integral çarpanı bulalım:

$$\mu(x)=e^{\int -xdx}=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

bulunur. Verilen denklem bununla çarpılırsa

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}}.v'-x.e^{-\frac{x^2}{2}}v &= -xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ \frac{d}{dx}\left(ve^{-\frac{x^2}{2}}\right) &= -xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ ve^{-\frac{x^2}{2}} &= e^{-\frac{x^2}{2}}+C \\ v &= 1+Ce^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

çıkar. Buradan $v=\frac{1}{y}$ dönüşümünden geri dönüş yapılırsa,

$$y=\frac{1}{1+ce^{\frac{x^2}{2}}}$$

genel çözümü bulunur.

6. $y'+y=y^2(cosx-sinx)$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

Denklem ikinci dereceden Bernoulli tipindendir. $v=y^{1-2}=y^{-1}=\frac{1}{y}$ konumuyla denklem

$v'-v=sinx-cosx$

doğrusal denklem tipine indirgenir. Bu denklemi çözmek için bir $\mu(x)$ integral çarpanı bulalım:

$$\mu(x)=e^{\int -dx}=e^{-x}$$

bulunur. Verilen denklem bununla çarpılıp düzenlenirse,

$$ve^{-x}=\int(sinx-cosx)e^{-x}dv=-e^{-x}sinx+C$$

çıkar . Buradan

$$\frac{1}{y}=-sinx+Ce^{x}$$

genel çözümü bulunur.

1.18 Problemler

1. $\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$
2. $\frac{1}{y} = x(C - lnx)$
3. $\frac{1}{y^3} = e^x(C - 3x)$
4. $y^2 = \frac{1}{2x+Cx^2}$
5. $\frac{1}{y} = x^2(sinx + C)$
6. $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{12cosx}(4x+5)^3 + \frac{C}{cosx}$
7. $\frac{1}{xy} = C + x(1 - lnx)$
8. $y^2 = \frac{sin^2x}{2cosx+C}$
9. $y' - \frac{3}{2x}y = 2xy^{-1}$ çözüm: $y^2 = -4x^2 + Cx^3$
10. $xy' + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$ çözüm: $y = \frac{1}{(}x + CX^2)^3$
11. $2xe^{2y}y' = 3x^4 + e^{2y}$ çözüm: $y = \frac{1}{2}ln|x^4 + Cx|$
12. $y' + y = xy^3$ çözüm: $\frac{1}{y} = x + frac12 + e^{2x}$
13. $xdy - \left(y + xy^3(1 + lnx)\right)dx = 0$ çözüm: $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3(\frac{2}{3} + lnx) + C$
14. $y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$ çözüm: $\frac{1}{y^3} = -1 - 2x + Ce^x$
15. $xdy + ydx = x^3y^6$ çözüm: $y = \left(\frac{5}{2}x^3 + Cx^5\right)^{-\frac{1}{5}}$
16. $dy + (4y - 8y^{-3})xdx = 0$ çözüm: $y = (2 + Ce^{-8x^2})^{\frac{1}{4}}$
17. $xy' - 2y = 2x^4, y(2) = 8$ çözüm: $y = x^4 - 2x^2$
18. $e^x\left(y - 3(e^x+1)\right)dx + (e^x+1)dy = 0, y(0) = 4,$ çözüm: $y = (e^x+1)^2$

1.19 Riccati Diferensiyel Denklemi

En genel biçimiyle $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ fonksiyonuna yaklaşan

$$f(x,y) = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 + \dots \tag{1.61}$$

sonsuz serisini dişünelim. Sağ yandan ilk iki terim alınırsa doğrusal yaklaşım olur. İlk üç terim alınırsa Riccati diferensiyel denklemi elde edilir. (1.61) tipindeki denklemler, genellikle, lineer olmayan (nonlinear) ve genel çözüm yöntemleri bulunamayan denklemlerdir. Bu kitapta o tiplere yer vermeyeceğiz. Ancak çok genel olan (1.61) serisini hiç düşünmeden $p(x)$, $r(x)$ ve $g(x)$ integrallenebilir fonksiyonlar ve $r(x) \neq 0$ ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$y' = p(x)y + r(x)y^2 + g(x) \tag{1.62}$$

tipindeki diferansiyel denklemleri ele alacağız. Bu tip denklemlere *Riccati Diferansiyel Denklemi* denir. Özellikle cebirsel geometri, konform dönüşümler ve fiziksel uygulamalarda bu tip denklemlerle çok karşılaşılır. Bu kesimde (1.62) tipindeki dnklemlerin çözümünü ele alacağız. Özel olarak,

$$r(x) = 0$$

ise, (refriccati) denklemi doğrusal denklem tipine dönüşür.

$$g(x) = 0$$

ise, (1.62) denklemi Bernoulli denklem tipine dönüşür. Bu iki durumdan birisi yoksa denklemin genel çözümünün doğrudan bulunamayacağı Bernoulli tarafından gösterilmiştir. Ne var ki (1.62) denkleminin bir özel çözümü biliniyorsa genel çözümü de bulunabilir.

1.20 Örnekler

1. $y' = y + y^2 + 1$
2. $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$
3. $x^3 y' + x^2 y - y^2 = 2x^4$
4. $y' + 6y^2 = \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}
y' &= y + y^2 + 1 \\
dx &= \frac{1}{y + y^2 + 1} \\
\int dx &= \int \frac{dy}{y + y^2 + 1} \\
&= \int \frac{dy}{y^2 + y\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4}} \\
&= \int \frac{dy}{(y+1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
x + C &= \frac{2}{\sqrt{3}} arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Örnek:

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2} \tag{1.63}$$

denkleminin bir özel çözümünü bulduktan sonra genel çözümünü bulunuz.
Çözüm:
Özel çözüm bulmak için genel geçerliği olan bir yöntem yoktur. Genellikle sınama-yanılma yöntemiyle özel çözüm ararız. Denklemin

$$y = \frac{c}{x} \tag{1.64}$$

biçiminde özel çözümü var mı diye bakalım. Dnklemde $y' = -\frac{c}{x^2}$ konulursa

$$-\frac{c}{x^2} + \left(\frac{c}{x}\right)^2 = \frac{2}{x^2}$$

$$-\frac{c}{x^2}+\frac{c^2}{x^2}=\frac{2}{x^2}$$

Bu eşitlik düzenlenirse c ye göre ikinci dereceden bir denklem elde edilir:

$$c^2-c-2=0$$

Bu denkelm c için çözülürse $c_1=-1$ ve $c_2=2$ bulunur. Bu değerlerin her ikisi (1.64) eşitliğinde yerlerine konularak (1.63) denklemin sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Örneğin, $c_2=2$ değeri için denklem sağlanıyor. O halde

$$y=z+\frac{2}{x},\qquad y'=z'-\frac{2}{z^2}$$

değerleri (1.63) denkleminde yerlerine konulursa;

$$\frac{2}{x^2}=z'-\frac{2}{x^2}+\left(z+\frac{2}{x}\right)^2 \tag{1.65}$$

$$=z'-\frac{2}{x^2}+z^2+\frac{4}{x}z+\frac{4}{x^2} \tag{1.66}$$

$$-z^2=z'+\frac{4}{x}z \tag{1.67}$$

Son eşitliğin $n=2$ olan Bernoulli yipi bir denklem olduğu görülüyor. O halde bernoulli denkleminin çözüm yöntemini uygulayabiliriz:

$$v=z^{1-2}=z^{-1}=\frac{1}{z}\Rightarrow v'=-\frac{z'}{z^2}$$

değerleri yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}-1&=\frac{z'}{z^2}+\frac{4z}{xz^2}\\ 1&=-\frac{z'}{z^2}-\frac{4}{xz}\\ &=v'-\frac{4}{x}v\end{aligned}$$

Buradaki son denklem doğrusaldır. denklemi tam diferensiyel yapan bir $\mu(x)$ integral çarpanı bulalım:

$$\mu(x)=e^{\int-\frac{4}{x}dx}=e^{-4ln|x|}=\frac{1}{|x|^4}=\frac{1}{x^4}$$

çıkar. Denklemi bununla çarpıp tam diferensiyel yaptıktan sonra çözümü bulabiliriz:

$$\begin{aligned}v&=\frac{\int u(x)f(x)\,dx+C}{u(x)}\\ &=\frac{\int\frac{dx}{x}^4+C}{\frac{1}{x^4}}\\ &=\left(-\frac{1}{3}x^{-3}+C\right)x^4\\ &=-\frac{x}{3}+Cx^4\end{aligned}$$

imdi $z = \frac{1}{v}$ konumundan geri dönüş yapalım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= -\frac{x}{3} + Cx^4 \\
z &= \frac{1}{-\frac{x}{3} + Cx^4} \\
&= \frac{3}{x + 3Cx^4} \\
&= \frac{3}{x(1 + 3Cx^3)}
\end{aligned}$$

eşitliğinden y fonksiyonuna geçebiliriz:

$$\begin{aligned}
y &= z + \frac{2}{x} \\
&= -\frac{3}{x(1 + 3Cx^3)} + \frac{2}{x} \\
&= \frac{-3 + 2(1 + 3Cx^3)}{x(1 + 3Cx^3)} \\
&= \frac{-3 + 2 + 6Cx^3)}{x(1 + 3Cx^3)} \\
&= \frac{2Cx^3) - 1}{x(1 + 3Cx^3)}
\end{aligned}$$

Son denklemde sabit $3C = C_1$ konumuyla

$$y = \frac{2C - 1x^3 - 1}{x(1 + C_1x^3)}$$

genel çözümüne ulaşılır.
Örnek:

$$x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4 \tag{1.68}$$

Riccati denkleminin önce bir özel çözmünü, sonra da genel çözümünü bulunuz.
Çözüm:
özel çözümü bulmak için genel geçerliği olan bir yöntem yoktur. Sınama yanılma yoluyla $y_1 = cx^2$ nin bir özel çözüm olduğu gösterilebilir. Burada c sabitinin değerini bulmak için, c değeri (1.68) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2x &= (cx^2)' + \frac{cx^2}{x} - \frac{(cx^2)^2}{x^3} \\
&= 2cx + cx - c^2x2 \qquad\qquad = 3c^2 - c^2 \\
0 &= c^2 - 3c + 2
\end{aligned}$$

Son denklemden $c_1 = 2$ ve $c_2 = 2$ bulunur. Bunların her birisi bir özel çözüm verceği için, aslında iki özel çözüm bulmuş oluyoruz. Birinci kökü alalım. $y_1 = x^2$ özel çözümü biliniyorken (1.68) Riccati denkleminin genel çözümünü bulacağız:

$$y = y_1 + u = x^2 + u$$

denkleminden

$$\begin{aligned}
2x &= (x^2+u)' + \frac{x^2+u}{x} - \frac{(x^2+u)^2}{x^3} \\
&= 2x + u' + x + \frac{u}{x} - \frac{x^4+2ux^2+u^2}{x^3} \\
0 &= u' + x + \frac{u}{x} - x - \frac{2ux}{x} - \frac{u^2}{x^3} \\
\frac{u^2}{x^3} &= u' - \frac{u}{x}
\end{aligned}$$

eşitliğine gelinir. Son eşitlik $n = 2$ olan ikinci dereceden Bernoulli tipidir. $z = \frac{1}{u}$ konumuyla doğrusal denkleme dönüşür:

$$\begin{aligned}
z' &= \left(\frac{1}{u}\right)' \\
&= \frac{u'}{u^2} \\
&\Rightarrow u' - \frac{u}{x} = \frac{u^2}{x^3} \\
&\Rightarrow \frac{u'}{u^2} - \frac{1}{xu} = \frac{1}{x^3} \\
&\Rightarrow \frac{u'}{u^2} + \frac{1}{xu} = -\frac{1}{x^3} \\
&\Rightarrow z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^3}
\end{aligned}$$

Son eşitlik z fonksiyonuna göre doğrusldır. Onu çözmek için denklemi tam dferensiyel yapan bir $\mu(x)$ intgral çarpanı arayalım:

$$\mu(x) = e^{\int frac1xdx}0e^{ln|x|} = |x|$$

bulunur. Denklemi bununla çarparsak tam diferensiyel olur. İntegrallersek;

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\int v(x)f(x)dx + C}{v(x)} \qquad = \frac{x\left(-\frac{1}{x^3}\right)dx + C}{x} \\
&= \frac{-\int \frac{dx}{x^2} + C}{x} \\
&= \frac{\frac{1}{z} + C}{x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{C}{x} = \frac{Cx+1}{x^2}
\end{aligned}$$

Şimdi $z = \frac{1}{u}$ dönüşümüyle z den u ya geri dönüş yaparsak;

$$\begin{aligned}
y &= y_1 + u \\
&= x^2 + \frac{x^2}{Cx+1} \\
&= \frac{x^2(Cx+1)}{Cx+1} \\
&= \frac{x^2(Cx+1)+x^2}{Cx+1}
\end{aligned}$$

genel çözümü bulunur. tabii, burada C keyfi bir sabittir.

1.21 Clairaut Diferensiyel denklemleri

f sürekli türetilebilir bir fonksiyon olmak üzre

$$y = xy' + f(y') \tag{1.69}$$

biçimindeki denklemlere *Clairaut* denklemi denilir.(1.69) eşitliğinin iki yanının x değişkenine göte türevi alınırsa;

$$y' = y' + xy'' + f'(y)y'' \Rightarrow \left[x + f'(y)\right] y'' = 0 \tag{1.70}$$

olur. (1.70) ifadesinin sağındaki eşitliğin sağlanması için ya

$$y'' = 0 \tag{1.71}$$

ya da

$$x + f'(y) = 0 \tag{1.72}$$

olmalıdır.

(1.71) sağlanıyorsa

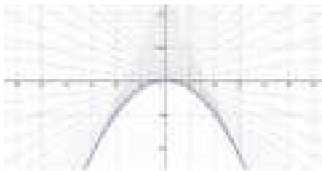
$$\int y''\, dx = y' + C_1 \Rightarrow y' = C \Rightarrow \int y' = Cx + f(C) \qquad C = -C_1) \tag{1.73}$$

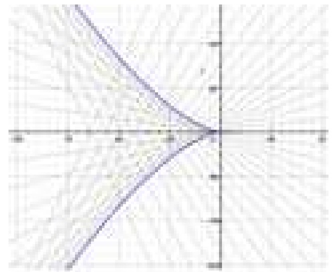
çıkar. Bu halde elde edilen $y = Cx + f(C)$ fonksiyonu (1.69) denkleminin genel çözümüdür.

(1.72) sağlanıyorsa

$$x + f'(y) = 0 \tag{1.74}$$

çıkar. Bu ifade genel çözüme ait olmayan bir çözümdür. tekil (singular) çözüm adını alır. Tekil çözümün grafiğine genel çözümüm zarfı (weenvelope) denilir. Tekil çözümün grafiği, genel çözüme ait her özel çözümün grafiğine dik olur. Clairaut denkleminin genel çözümü doğrulardan oluşur. Tekil çözümün grafiği bu doğruların hepsine diktir. $p = y'$ olmak üzere aşağıdaki birinci şekil $f(p) = p^2$ ikinci şekil $f(p) = p^3$ tekil çözümlerinin özel çözüm olan doğrlara dikey oluşunu gösteriyor. gösteriyor.





1.22 Lagrange Diferensiyel Denklemi

f il g sürekli türetilebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$y = xg(y') + f(y') \tag{1.75}$$

biçimindeki denklemlere *Lagrange diferensiyel denklemi* denilir. (1.75) denleminde x değişkenine göre türev alınırsa, $y' = p$ konumuyla;

$$p = g(p) + \left(xg'(p) + f!(p)\right)\frac{dp}{dx} \tag{1.76}$$

$$p - g(p) = \left(xg'(p) + f'(p)\right)\frac{dp}{dx} \tag{1.77}$$

yazılabilir. Son eşitliğin sol tarafının kökü varsa $p - g(p) = 0$ ise sağ tarafın sıfır olası için şu iki hqlden birisi sağlanmalıdır.

- $\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = c$
- $xg'(p) + f'(p) = 0 \Rightarrow$

Birinci hal varsa $p = c$ olur. İkni hal varsa, (1.75)'nin son eşitliğini

$$\left(xg'(p) + f'(p)\right)\frac{dx}{dp} - xg'(p) = f!(p) \tag{1.78}$$

biçiminde yazabiliiz. Bu son denklem x bağımlı y bağımsız değişken olark düşünüldüğünde doğrusl bir denklem olur. Doğrusal diferensiyel denklemlerin nasıl çözüldüğünü biliyoruz.
Örnek:
$y = p^2 + p^3$ diferensiyel denklemini çözünüz.
Çözüm:
Denklem Lagrange denklemidir. $y' = p$ denirse,

$$p = p^2 + \left(2px + 3p^2\right)\frac{dp}{dx} \tag{1.79}$$

$$p - p^2 = \left(2px + 3p^2\right)\frac{dp}{dx} \tag{1.80}$$

$$p(1-p) = p\left(2x + 3p\right)\frac{dp}{dx} \tag{1.81}$$

elde edilir. Son eşitliğin solundaki ifade sıfırsa

$$p(1-p) = 0 \Rightarrow (p = 0) \cup (p = 1)$$

çıkar. Bu değerler denklemde yerlerine yazılırsa

$$y = 0 \text{ ve } y = x + 1 \tag{1.82}$$

çözümleine ulaşılır. Bu denklem çözülürse,

$$x = \frac{C - 2p^3 + 3p^2}{(p-1)^2} 0$$

bulunur. Öte yandan, verilen deklemde x yok edilirse

$$x(p) = \frac{C - 2p^3 + 3p^2}{(p-1)^2} \tag{1.83}$$

$$y(p) = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left(C - 2p^3 + 3p^2\right) + p^3 \tag{1.84}$$

$$y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left(C - 3p^2 - 2p^3\right) + p^3$$

parametrik çözümü Lagrange denkleminin çözümü olur.

Index