13.2 SÜZGEÇLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

13.2.1 PROBLEMLER

1. Sonlu bir küme üzerinde ki bütün mümkün süzgeçleri bulunuz.

   Cevap: Örneğin $X = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. Bu küme üzerinde

   (a) $\varphi_1 = \{X\}$

   (b) $\varphi_a = \{\{a\}, X\}$, $\varphi_b = \{\{b\}, X\}$, $\varphi_c = \{\{c\}, X\}$, $\varphi_d = \{\{d\}, X\}$
   $\varphi_e = \{\{e\}, X\}$

   (c) $\varphi_{ab} = \{\{a, b\}, X\}$, $\varphi_{ac} = \{\{a, c\}, X\}$, $\varphi_{ad} = \{\{a, d\}, X\}$
   $\varphi_{ae} = \{\{a, e\}, X\}$, $\varphi_{bc} = \{\{b, c\}, X\} \ldots$

   (d) $\varphi_{abc} = \{\{a, b, c\}, X\}$, $\varphi_{acd} = \{\{a, c, d\}, X\}$, $\varphi_{ace} = \{\{a, c, e\}, X\}$
   $\varphi_{bcd} = \{\{b, c, d\}, X\}$, $\varphi_{bce} = \{\{b, c, e\}, X\}, \ldots$

   (e) $\varphi_{abcd} = \{\{a, b, c, d\}, X\}$, $\varphi_{abce} = \{\{a, b, c, e\}, X\}$, $\varphi_{bcde} = \{\{b, c, d, e\}, X\}$
   $\varphi_{abde} = \{\{a, b, d, e\}, X\}$, $\varphi_{acde} = \{\{a, c, d, e\}, X\} \ldots$

2. φ ailesi X üzerinde bir süzgeç olsun ve bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. φ nin A üzerindeki φ_A izinin (trace) bir süzgeç olması için gerekli ve yeterli koşul φ nin her kümesinin A ile kesişmesidir. Gösteriniz.

   Cevap:
   $$\varphi_A = \{A \cap S | S \in \varphi\}\}$$

   ailesinin A üzerinde bir süzgeç olduğunu göstereceğiz.

   (a) φ nin her kümesi A ile kesişiyorsa $A \cap S \neq \emptyset$ olur. O halde $\emptyset \notin \varphi_A$ dir.

(b) $A \cap S_1 \in \varphi_A$ ve $A \cap S_2 \in \varphi_A$ ise

$$(A \cap S_1) \cap (A \cap S_2) = A \cap (S_1 \cap S_2) \in \varphi_A$$

olur.

(c) $(A \cap S_1) \subset (A \cap S_2)$ ise $S_1 \subset S_2$ olacağından $S_2 \in \varphi$ dir. O halde $(A \cap S_2) \in \varphi_A$ dır.

13.3 SÜZGEÇ TABANLARI

13.3.1 PROBLEMLER

1. X ve Y kümeleri ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu veriliyor.T ailesi Y kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı ise $f^{-1}(T)$ nin X üzerinde bir süzgeç tabanı olması için gerekli ve yeterli koşul, her $B \in T$ için $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olmasıdır. Gösteriniz.

   Cevap:

   [B1]: $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olduğundan $\emptyset \notin f^{-1}(T)$ ve $f^{-1}(T) \neq \emptyset$ dir.

   [B2]: $B_1, B_2 \in T$ ise $B_3 \subset B_2 \cap B_1$ olacak biçimde bir $B_3 \in T$ var olduğundan

   $$f^{-1}(B_3) \subset f^{-1}(B_2) \cap f^{-1}(B_1)$$

   olacaktır.

2. $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon ve φ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç ise $f(\varphi)$ nin Y üzerinde bir süzgeç olacağını gösteriniz. *"Örtenlik"* koşulu kalkarsa ne olur?

   Cevap:

   [S1]: Her $S \in \varphi$ için $S \neq \emptyset$ olduğundan $f(S) \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $f(\varphi) \neq \emptyset$ dir.

[S2]: Her $f(S_1), f(S_2) \in f(\varphi)$ için $S_3 \subset S_1 \cap S_2$ seçilebilir. Buradan $f(S_3) \subset f(S_1 \cap S_2) \subset f(S_1) \cap f(S_2)$ çıkar.

[S3]: Her $f(S) \subset A$ ise $S \subset f^{-1}(f(S)) \subset f^{-1}(A)$ olduğundan $f^{-1}(A) \in \varphi$ dir. O halde, $f(S) \subset fof^{-1}(A) = A$ bağıntısından $A \in f(\varphi)$ olduğu sonucu çıkar.
Son olarak her $S \in \varphi$ için $f(S) \subset Y$ olduğundan $Y \in f(\varphi)$ olmalıdır. Bunun olması için f nin örten olması gerekir. Bu durumda $X \in \varphi \Rightarrow f(X) \in f(\varphi)$ olacaktır. f fonksiyonu örten değilse bu koşul sağlanamaz, dolayısıyla $f(\varphi)$ bir süzgeç olamaz.

13.4 SÜZGEÇİN LİMİTİ

13.5 PROBLEMLER

1. Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri veriliyor. τ_1 topolojisinin τ_2 den daha ince dokulu olması için gerekli ve yeterli koşul, τ_1 topolojisine göre yakınsak olan her süzgeçin τ_2 ye göre de aynı noktaya yakınsamasıdır. Gösteriniz.

   Cevap: τ_1 topolojisine göre $\varphi \to x \Leftrightarrow B_1(x) \subset \varphi$ dir. $\tau_2 \subset \tau_1$ ise $B_2(x) \subset B_1(x) \subset \varphi$ olacağından τ_2 topolojisine göre de $\varphi \to x$ olacaktır.

2. X sonsuz bir küme olsun. X içinde tümleyenleri sonlu olan bütün alt kümelerin oluşturduğu ailenin bir süzgeç olduğunu gösteriniz. Bunu simgelerle gösterirsek,

$$\mathscr{F} = \{A : A \subset X, A \text{ } sonlu\}$$

   ailesi bir süzgeçtir. Gösteriniz.

   Cevap:

   [S1]: X boş değilse tümleyeni sonlu olan kümelerin hiç birisi boş değildir. Dolayısıyla F boş değildir.

   [S2]: Tümleyenleri sonlu olan iki kümenin arakesitinin de tümleyeni sonludur; yani $A, B \in F$ ise $(A \cap B)' = A' \cup B'$ sonludur. Dolayısıyla

$A \cap B \in F$ dir.

[S3]: $A \in F$ ve $A \subset B$ ise $B' \subset A'$ olduğundan B nin tümleyeni sonludur. O halde $B \in F$ dir.